

個別 Dirac 固有値分布を用いた  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論の  
低エネルギー定数の精密決定  
(Precise determination of low-energy constants for  $SU(2) \times U(1)$   
lattice gauge theory via individual Dirac eigenvalue distributions)

平成 31 年 1 月

山本 託也

島根大学大学院総合理工学研究科

# 概要

素粒子物理学における強い相互作用の基礎理論である量子色力学 (QCD) はフェルミオンであるクォークとクォーク間の相互作用を媒介するゲージボゾンであるグルーオンを記述する。QCD は摂動論において漸近的自由性を示し、QCD の繰り込まれたゲージ結合定数は高エネルギースケールになるほど弱結合になることが知られる。このため QCD の低エネルギースケールでは強結合になることが予想され、よく知られた現象であるクォークの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れは非自明な非摂動的量子効果によって起こると考えられている。前者は低エネルギースケールにおいてクォークが単体で存在せず、複合粒子であるハドロンとして存在することを意味し、後者は  $\pi$  中間子の質量が他のハドロンと比べて非常に軽いことを説明する機構を与えることが知られる。強結合領域では、ゲージ結合定数による摂動展開を使うことができないため、QCD の低エネルギーにおける性質を明らかにするための非摂動的な手法が不可欠である。そのような手法の一例として、Wilson によって提案された格子ゲージ理論 (LGT) がある。LGT は、4次元ユークリッド時空を格子化し、QCD を有限な自由度を持つ統計力学系として定式化した理論である。LGT の有用な点はモンテカルロ法による数値シミュレーションを用いて物理量の非摂動的な計算を可能にしたことである。もう一つ重要な視点は QCD が持っている大域的対称性が低エネルギースケールにおいて本質的な役割を果たすことである。その一例である低エネルギー有効理論はカイラル対称性が低エネルギースケールにおいて自発的に破れることに基づいて構成され、最も軽いハドロンである  $\pi$  中間子が擬南部-Goldstone ボゾンとして含まれる理論として知られる。もう一つの重要な大域的対称性は Dirac 演算子の反ユニタリー対称性である。Verbaarschot は反ユニタリー対称性の有無から Dirac 演算子の固有値の準位統計 (Dirac 準位統計) が持ちうる 3 種類の対称性クラスがそれぞれ 3 種類のカイラルランダム行列と同一であることを提案し、Dirac 準位統計からカイラル対称性の自発的破れを反映した低エネルギー有効理論に直接アクセスできることが理解された。一方、ある対称性クラスに属するエルミート演算子に対して、その演算子が持っている大域的対称性を破る摂動を加えることによって別の対称性クラスに遷移することが一般に知られ、この現象は対称性クラス間のクロスオーバーと呼ばれる。そのクロスオーバーに対応するランダム行列は遷移ランダム行列と呼ばれる。Damgaard らは LGT の Dirac 準位統計における対称性クラス間のクロスオーバーを利用して、その対称性を破る摂動を添加したときの Dirac 準位統計の遷移から低エネルギー有効理論に含まれる未定の結合定数である 2 つの低エネルギー定数、すなわち、カイラル凝縮および  $\pi$  中間子の崩壊定数を決定する方法を提案した。

本論文では  $SU(2) \times U(1)$  LGT の基本表現におけるスタaggerド Dirac 演算子の固有値の準位統計を用いた低エネルギー定数の決定手法を考える。  $SU(2)$  LGT の基本表現におけるスタaggerド Dirac 固有値の準位統計は chGSE クラスに属し、固有値は Kramers 縮退している。  $SU(2)$  スタaggerド Dirac 演算子に  $U(1)$  の寄与を摂動的に添加すると、Kramers 縮退が解けて chGUE クラスに遷移する、すなわち、その Dirac 準位統計は遷移カイラルランダム行列の chGSE-chGUE クロスオーバーに属することが予想される。本論文ではこの予想に基づき、  $SU(2) \times U(1)$  LGT のスタaggerド Dirac 固有値を 4次元体積  $V = 4^4$  および  $6^4$  の小規模な格子上で測定し、その Dirac 準位統計が遷移カイラルランダム行列の解析的結果と精密に 2パラメータフィットできることを確認した。本論文における初めての試みは観測量として複数の個別固有値分布、すなわち、最小固有値分布から 4番目までの固有値分布を併用した手法を採用したことである。従来の微視的固有値密度や最小固有値分布のみを用いた方法との比較において、本手法の利点は chGSE の Kramers 縮退した固有値分布が  $U(1)$  の寄与により縮退が解ける影響を考慮することで、個々の固有値分布のフィットで起こりうる系統的な誤差を改善できる点にある。実際に、複数の個別固有値分布のフィットを併用することによって、本論文ではフィットパラメータの確度および統計精度を向上させることに成功した。したがって、小規模な格子上でも従来の方法に比べて精密な低エネルギー定数の決定が可能となった。また、本論文では 2種類の格子サイズの結果から有限サイズスケールングにより低エネルギー定数の熱力学極限を推定することに成功した。

# 目次

概要	2
第 1 章 序論	6
1.1 導入	6
1.2 記号	11
第 2 章 QCD とその大域的対称性	14
2.1 局所的ゲージ不変性	14
2.1.1 U(1) ゲージ変換	14
2.1.2 非可換ゲージ変換	16
2.1.3 場の強度	19
2.2 QCD の大域的対称性	23
2.2.1 カイラル対称性	24
2.2.2 フレーバー対称性	33
2.2.3 反ユニタリー対称性	35
2.3 QCD の Dirac スペクトル	39
第 3 章 2-color QCD の低エネルギー有効理論	42
3.1 Pauli-Gürsey 対称性	43
3.2 カイラルラグランジアン	45
3.3 化学ポテンシャル $\mu \neq 0$ の導入	48
3.3.1 有限密度における符号問題	48
3.3.2 カイラルラグランジアンの構成	49
3.3.3 $\varepsilon$ 領域	51
第 4 章 格子ゲージ理論	53
4.1 格子上的フェルミオン	53
4.1.1 フェルミオンダブリング	53
4.1.2 スタッガードフェルミオン	56
4.2 格子上的ゲージボゾン	59

4.2.1	格子上のゲージ相互作用 . . . . .	60
4.2.2	ブラケット作用 . . . . .	62
4.3	格子シミュレーションの方法 . . . . .	64
4.3.1	熱浴法 . . . . .	65
第 5 章	カイラルランダム行列の準位統計 . . . . .	70
5.1	カイラルランダム行列の導入 . . . . .	71
5.1.1	カイラルガウス型アンサンブル . . . . .	71
5.1.2	固有値分布関数 . . . . .	73
5.2	個別固有値分布 . . . . .	76
5.3	遷移カイラルランダム行列 . . . . .	81
5.3.1	chGSE–chGUE クロスオーバー . . . . .	82
5.3.2	個別固有値分布 . . . . .	88
第 6 章	Dirac 準位統計 : $SU(2) \times U(1)$ LGT . . . . .	91
6.1	数値シミュレーションの詳細 . . . . .	91
6.1.1	シミュレーションの設定 . . . . .	92
6.1.2	固有値分布のフィット方法 . . . . .	93
6.1.3	低エネルギー定数 . . . . .	95
6.2	数値シミュレーションの結果 . . . . .	95
6.2.1	Dirac 固有値分布のフィットの結果 . . . . .	95
6.2.2	低エネルギー定数の決定 . . . . .	105
第 7 章	まとめと考察 . . . . .	109
	謝辞 . . . . .	111
	参考文献 . . . . .	112

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 導入

素粒子物理学における標準模型はこれまで行われた素粒子実験の結果をほとんど矛盾なく再現することができる最もよく知られた有効理論である。標準模型において、物質はフェルミオンから構成され、フェルミオン間の相互作用はゲージボゾン<sup>\*1</sup>を媒介することで生じると考えられている。標準模型はこのゲージボゾンによる相互作用の種類によって 3 種類 — 強い相互作用、弱い相互作用、電磁相互作用 — に分類されている<sup>\*2</sup>。標準模型を記述するための基礎理論は量子場の理論 (QFT) として知られている。QFT において素粒子は量子化された場 (量子場) であると解釈される。場を量子化する方法として主に 2 つの形式 — 経路積分形式と演算子形式 — が知られ、本論文では前者の形式を採用している。QFT を構成するためによく用いられる方法は古典的な場についての作用、すなわち、その被積分関数であるラグランジアンを構成することである。ラグランジアンを構成するために重要なことは前述の 3 つの相互作用をどのように導入するかということである。これらの相互作用を統一的に導入することができる非常に強力な方法としてゲージ理論が知られている。ゲージ理論は作用またはラグランジアンが場に対する局所的ゲージ変換の下で不変であるという要請 (ゲージ原理) を課した理論である。ゲージ対称性<sup>\*3</sup>はゲージ群によって表現され、前述の 3 つの相互作用はまとめて  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_{EM}$  という形のゲージ群で表現される。 $SU(3)_c$  ゲージ対称性を持っている QFT は量子色力学 (QCD) と呼ばれ、 $SU(2)_L \times U(1)_{EM}$  ゲージ対称性を持っている QFT は弱い相互作用と量子電磁力学 (QED) を統一した電弱理論または Weinberg-Salam 理論と呼ばれる。一般に、相互作用を含む QFT は厳密に量子効果を評価することができない。そのため、相互作用を評価するためには摂動論の枠組みにおいて QFT を取り扱う必要がある。量子効果まで含めた実際の物理的な相互作用の強さ、すなわち、結合の強さはラ

---

\*1 「ゲージ」ボゾンと呼ばれる理由は後述するように相互作用を媒介するボゾンがゲージ原理によって導入されるためである。

\*2 現在、自然界には 4 つの相互作用が存在することが知られているが、この中で重力は標準模型の枠組みに入っていない。なぜなら、標準模型で取り扱うスケールにおいて重力が他の相互作用に比べて圧倒的に弱く、相互作用を無視できるからである。

\*3 素粒子論では場に対するある変換の下で作用が不変であるとき、その理論が対称性を持っていると表現する。

グラujan中の裸のゲージ結合定数を繰り込むことで評価される（例えば，[1–3] を参照）．例えば，量子電磁力学における繰り込まれたゲージ結合定数は低エネルギースケールになるほど弱結合であることが知られている．

強い相互作用を記述する基礎理論である QCD は非可換なゲージ理論であり，その作用はフェルミオンであるクォークとクォーク間の相互作用を媒介するゲージボゾンであるグルーオンを含んでいる．グルーオンの運動項は Yang–Mills 理論 [4] で記述され，特徴としてグルーオンの自己相互作用を含んでいる．摂動論において，QCD の繰り込まれたゲージ結合定数は高エネルギースケールになるほど弱結合であることが知られている．このような他の相互作用で見られない特徴的な現象は，高エネルギースケールで相互作用のない自由場のような振る舞いに近づくことから，漸近的自由性 [5, 6] と呼ばれる．一方，摂動論の適用限界のエネルギースケールが  $\Lambda_{\text{QCD}}$  であるとき，それ以下の低エネルギースケールでは強結合になることが予想されている．強結合領域ではゲージ結合定数に関する摂動展開を使うことができないため，低エネルギーにおける QCD の真空を研究するためには非摂動的手法が必要不可欠である．現在知られている QCD の低エネルギーにおける重要な性質の例として，クォークの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れという現象が挙げられ，これらは非自明な非摂動的量子効果によって生じる現象であると考えられている．前者は，低エネルギーにおいてクォークが単体で存在せず，強い相互作用をする複合粒子であるハドロンとして存在することを意味する．後者は  $\pi$  中間子の質量が他のハドロンと比べて非常に軽いことを説明する機構を与えることが知られている．これらの性質を明らかにするための非摂動的手法の例として，格子ゲージ理論や低エネルギー有効理論などが知られている．

格子ゲージ理論 (LGT) [7] は元々クォークの閉じ込めを解明するために Wilson によって導入された 4 次元 Euclid 空間を格子化したゲージ理論である．LGT はクォークの自由度が格子点，グルーオンの自由度が格子のリンク上に配置された格子模型であり，連続極限を適切に取ることによって QCD が再現される．LGT は時空の離散化によって，QCD が持っている局所的対称性のうち，ゲージ対称性は残されるが，Lorentz 対称性は破られている．LGT を用いる最も大きな利点の一つは，QCD を時空の離散化によって有限な自由度の統計力学系として定式化できることである．LGT はモンテカルロ法による数値シミュレーションによって非摂動的に物理量の定量的評価を可能にした（例えば，[8–11] を参照）．現在，この分野は格子 QCD と呼ばれ，アルゴリズムの発展やスーパーコンピュータの高速化に伴い，現実の軽い  $u, d$  クォーク質量を値を持つ物理点における格子 QCD シミュレーションが実行されており，実験的に決められたハドロン質量などの物理量が精密に再現されている（例えば，[12–14] を参照）．

カイラル対称性の自発的破れは，クォークが無質量のときに QCD 作用が持っている古典的な対称性であるカイラル・フレーバー対称性（ゲージ群のような局所的対称性とは異なる大域的対称性）

$$\text{SU}(N_f)_R \times \text{SU}(N_f)_L \times \text{U}(1)_V \times \text{U}(1)_A \quad (1.1)$$

が量子効果によって破られることを意味する．ここで， $N_f$  はクォークのフレーバー数を示し， $\text{U}(1)_A$  はカイラルアノマリーによって明確に破られる．フレーバー対称性  $\text{SU}(N_f)_R \times \text{SU}(N_f)_L$  はカイラル対称性の自発的破れの秩序変数であるカイラル凝縮  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  がゼロでない値を持つことで

破られる： $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \rightarrow SU(N_f)_V$ . カイラル凝縮は Banks–Casher 関係式 [15] によって、QCD の Dirac 演算子のゼロ近傍の小さい固有値 ( $\lambda \simeq 0$ ) の固有値密度  $\rho(\lambda \simeq 0)$  と関係付けられる。 $\lambda \simeq 0$  の固有値密度がゼロであればカイラル対称性は保たれ、ゼロでない値を持てばカイラル対称性は自発的に破られたことになる。実際にカイラル凝縮を評価するためには格子シミュレーションによって、Dirac 演算子の固有値を数値的に計算すればよい。Banks–Casher 関係式は  $\lambda \simeq 0$  の小さい固有値準位間の平均間隔が一定になることを示唆するので、この  $\lambda \simeq 0$  の領域は微視的スケールまたは微視的極限と呼ばれる。Dirac 演算子の固有値をプローブとしてカイラル凝縮を評価するためには、後述するように微視的固有値密度  $\rho_s(z)$  や最小固有値分布  $P(z)$  を用いて平均準位間隔を評価すると便利である。

一方で、カイラル対称性の自発的破れは QCD の低エネルギー有効理論を構成するために本質的な役割を与えることが知られている。4次元 Euclid 空間における有限体積  $V = L^4$  の系を考える。 $L^{-1} \ll \Lambda_{\text{QCD}}$  において、フレーバー群  $G = SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$  がその部分群  $H = SU(N_f)_V$  に破れたとき、このスケールにおいてクォークは閉じ込められてハドロンとして存在する。このハドロンの中で最も質量が小さい  $\pi$  中間子は破れたフレーバー群  $G/H$  によって生じた擬 Nambu–Goldstone ボゾンであるとみなされ、それよりもずっと重い他のハドロンは積分される。このような低エネルギー有効理論はカイラルラグランジアン [16–21] と呼ばれ、カイラル対称性の自発的破れを正確に反映した理論として  $\pi$  中間子のみを記述する。カイラルラグランジアンには対称性のみでは決定できない係数  $\Sigma, F^2$  があり、低エネルギー定数と呼ばれる。元の基本理論である QCD の情報は低エネルギー定数のみが持っていて、それぞれカイラル凝縮と  $\pi$  中間子の崩壊定数と同定される。

低エネルギー有効理論は、 $\varepsilon$  領域 [22] において、時空依存性を持たない質量項のみを持ち、未定係数である低エネルギー定数はカイラル凝縮のみである。このとき、低エネルギー有効理論はカイラルランダム行列の  $\sigma$  模型表現における微視的スケールと等価であることが知られている [23]。カイラルランダム行列は独立な乱数を行列要素として持つ QCD と同じ大域的対称性を有する行列模型であり、行列のサイズが無大の極限においてカイラル対称性の自発的破れが再現される。カイラルランダム行列は反ユニタリー対称性によって 3 種類の対称性クラスに分類され、行列要素の実成分に基づく Dyson 指数  $\beta = 1, 2, 4$  により、それぞれ、カイラルガウス型直交アンサンブル (chGOE)、カイラルガウス型ユニタリーアンサンブル (chGUE)、カイラルガウス型シンプレクティックアンサンブル (chGSE) と呼ばれる。この分類は QCD の Dirac 演算子に対する時間反転対称性による分類と等価である [24, 25]。カイラルランダム行列が有用である理由の一つに、微視的固有値密度  $\rho_s(z)$  を解析的に求められる点が挙げられる [26–29]。カイラルランダム行列における  $\rho_s(z)$  の振る舞いは格子シミュレーションによって得られた Dirac 演算子の固有値 ( $\lambda \simeq 0$ ) から計算される  $\rho_s(z)$  のヒストグラムとよくフィットすることが知られている (例えば, [30–33] を参照)。この一致は QCD の非摂動的な性質であるカイラル対称性の自発的破れの統計的な振る舞いが低エネルギー有効理論の  $\varepsilon$  領域、すなわち、カイラルランダム行列によって記述されるということを主張する。Banks–Casher 関係式に基づく、この主張からカイラル凝縮の値はカイラルランダム行列の固有値分布と Dirac 演算子の固有値分布のフィットによって計算できることを意味す



る。実際にこの方法においてカイラル凝縮を計算すると、値が非常に精度よく得られることが知られている。

ランダム行列（エルミート行列）は 3 種類のカイラルランダム行列を含む 10 種類の対称性クラスに分類され、この分類は対称空間の Cartan 分類と 1 対 1 であることが知られている [34]。この 10 種類の対称性クラスは大きく 3 つのタイプに分けられる。ランダム行列の物理学への最初の適用は重い原子核の共鳴エネルギー準位の間隔分布に対してである [35]。この最初に導入されたランダム行列のタイプは Wigner–Dyson クラスまたは不変ランダム行列と呼ばれ、3 種類 (GOE, GUE, GSE) 存在することが知られている [36]。このクラスは無秩序系における波動関数の局在を記述する Anderson 模型 [37] の研究などに応用されている。2 つ目のタイプは前述したカイラルクラス (3 種類のカイラルランダム行列) である [23, 25]。3 つ目のタイプは無秩序超伝導クラスと呼ばれ、Bogoliubov–de Gennes 型ハミルトニアン の対称性を持っていることで知られる 4 種類のクラスである [38, 39]。一方で、あるクラスが持っている対称性を明確に破る摂動を加えることによって他の異なるクラスに遷移する現象が知られ [36]、対称性クラス間のクロスオーバーと呼ばれる。例えば、Wigner–Dyson クラスにおける GOE–GUE クロスオーバーが挙げられ、この現象の物理系への適用例として、外部磁場下における無秩序系やカオス系が知られている [40, 41]。この場合、GOE が持っている時間反転対称性を破る摂動として外部磁場が導入されている。カイラルクラスにおける例として、chGUE–chGUE クロスオーバー [42] や chGUE–GUE クロスオーバー [43] が挙げられる。これらはどちらも低エネルギー有効理論における複数の係数を定めるための方法として知られている。特に、前者は上述したカイラルラグランジアンに含まれる 2 つの低エネルギー定数  $\Sigma, F^2$  を同時に決定する新しい方法を提案している。このクラスは、QCD において虚数アイソスピン化学ポテンシャルを伴う有限密度系において適用され、低エネルギー定数のうちカイラル凝縮だけでなく、 $\pi$  中間子の崩壊定数も同時に決定できる上に従来の方法よりも小規模な格子上で精度のよい値を得られることが示されている。

本論文では上述のような低エネルギー定数の決定方法を他の異なる対称性クラス間のクロスオーバーに対応する物理的な系に適用することを考える： chGSE–chGUE クロスオーバーに着目する。このクラスに対応する理論の一例として、基本表現におけるスタaggered Dirac 演算子を持つ  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論が考えられる。基本表現の  $SU(2)$  スタaggered Dirac 演算子の固有値の統計的な振る舞いは chGSE に属するため、 $U(1)$  の寄与を少しずつ添加することで Kramers 縮退が解けて chGUE に遷移すると予想される。従来は  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論が chGSE–chGUE クロスオーバーに属するという予想に基づき、観測量として最小固有値分布または最隣接準位間隔分布を利用して低エネルギー定数を決めている [44, 45]。従来との対比において本論文の特徴は、最小固有値分布から  $k$  番目までの複数の個別固有値分布、すなわち、 $k$ -th 最小固有値分布 [46] を用いて低エネルギー定数を精密に決定することである。最小固有値分布のフィットのみを用いる場合は chGSE–chGUE クロスオーバーに伴って Kramers 縮退が解ける影響を無視することになるため、複数の個別固有値分布、特に、Kramers 縮退していた固有値の対を含むように固有値分布をフィットすることが重要がある。そのベストフィットパラメータは chGSE–chGUE クロスオーバーの固有値分布に含まれる遷移パラメータ  $\rho_k$  を決める。これらの

$\rho_k$  をコンバインすることによって、確度や統計精度が改善された  $\bar{\rho}$  が得られ、 $\bar{\rho}$  と U(1) の寄与の強さの線形依存性は低エネルギー定数の精密決定を可能にする。

導入の最後に、私たちが SU(2) 格子ゲージ理論を考える物理的な動機について言及する。この理論に U(1) の寄与を加えた理論は、連続理論において有限密度の 2-color QCD, すなわち、SU(2)<sub>c</sub> ゲージ理論に対応し、通常の QCD とは異なる QCD ライクな理論である。このような QCD ライクな理論を研究する物理的な動機として 2 つの例が挙げられる。1 つ目は有限密度 QCD における符号問題の回避である。通常の 3-color QCD は化学ポテンシャルを含むフェルミオン行列式が複素数になるために、格子シミュレーションにおける重みが正でなくなる。この問題は符号問題と呼ばれ、有限密度 QCD の研究における技術的困難として知られている。一方、2-color QCD は、Dirac 演算子の擬実性のために化学ポテンシャル項を含むフェルミオン行列式が実になり、符号問題を回避できることが知られている。2-color QCD は、3-color QCD と定性的な性質が近いいため、2-color QCD の格子シミュレーションによる研究から通常の有限密度 QCD の研究に新たな知見を与えることができる可能性がある（例えば、[47,48]などを参照）。2 つ目は QCD ライクな理論がゲージ階層性問題に対する解決案を提供しうることである。近年、標準模型において存在が予想されていた Higgs ボゾンが発見され、その質量は  $\mathcal{O}(10^2\text{GeV})$  程度（約 125GeV）であることが報告されている。Higgs ボゾンはスカラー場の理論で表現できるので、その質量を制限する枠組みとしての大域的対称性が存在しない（フェルミオンの場合、カイラル対称性がその大域的対称性に相当する）。そのため摂動論における繰り込まれた質量は、カットオフとして Planck スケール  $\mathcal{O}(10^{19}\text{GeV})$  で量子補正されるため、Higgs 質量に対して  $10^{17}$  桁もの微調整が必要になってしまう。したがって、Higgs 質量が Planck スケールに対して非常に軽いことを理論的に保証するためには何らかの対称性による機構が要求される。標準模型にこのような機構は存在しないことから、この問題はゲージ階層性問題と呼ばれる。この問題の解決案として、超対称性理論やテクニカラー模型が知られている。前者は超対称性によりカイラル対称性のような質量を制限する役割を既に持っている未知のフェルミオン（超対称性粒子）が存在することを仮定する理論である（例えば、[49,50]などを参照）。後者は Higgs ボゾンが素粒子ではなく未知のフェルミオン（テクニクォーク）によって構成される複合粒子であることを仮定する理論である。テクニカラー模型は、Higgs ボゾン中においてテクニクォークが未知のゲージ相互作用によって閉じ込められることを仮定するので、そのゲージ群やその表現の選択に幅広い自由度がある。そのためテクニカラー模型の一例である 2-color QCD を調べることはこの問題に対する新たな知見を与える可能性がある（例えば、[51,52]などを参照）。

本論文はすでに研究成果として発表している [53,54] に基づいている。本論文は第 1 章から第 7 章までで構成される。第 2 章から第 5 章では本論文で必要となる基本事項を簡単にレビューする。第 6 章では本論文の主題である SU(2) $\times$ U(1) 格子ゲージ理論の低エネルギー定数を決定する方法について説明する。第 2 章では、強い相互作用を記述する QCD の基礎的事項と QCD の低エネルギーにおいて本質的な役割を果たす大域的対称性について簡単にレビューする。2.1 節では、

ゲージ理論に基づいてラグランジアンを構成し、2.2 節では、QCD が持っている 3 つの重要な大域的対称性についてまとめる。2.3 節では、Dirac 演算子の小さい固有値とカイラル対称性の自発的破れを関係付ける Banks–Casher 関係式を導出する。第 3 章では、2-color QCD の場合にカイラル対称性の自発的破れに伴って生じる擬 Nambu–Goldstone ボゾンを記述する低エネルギー有効理論について簡単にまとめる。第 4 章では、Dirac 演算子の固有値を計算するために必要となる QCD の非摂動的手法の一つである格子ゲージ理論について簡単にまとめる。第 5 章では、低エネルギーにおける QCD の Dirac 演算子の固有値の統計的な振る舞いを記述するカイラルランダム行列の準位統計について簡単にまとめる。第 6 章では、本論文の主題である  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論における低エネルギー定数を決定するための手法について議論する。私たちは基本表現における  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論のスタaggered Dirac 演算子の固有値を体積  $V = 4^4, 6^4$  の 2 つの小規模な格子上において数値シミュレーションする。U(1) の寄与として虚数化学ポテンシャルおよび非コンパクト U(1) ゲージ場の 2 種類が導入される。k-th 最小固有値分布を通じて、chGSE–chGUE クロスオーバーに伴う Kramers 縮退が解ける様子が確認される。複数の個別固有値分布のフィットから遷移パラメータ  $\rho_k$  が決められるので、それらをコンバインすることによって、確度や統計誤差が改善された  $\bar{\rho}$  が得られる。低エネルギー定数の精密決定は  $\bar{\rho}$  と U(1) の寄与の強さの線形依存性から実現される。また、私たちは有限サイズスケーリングによって 2 つの低エネルギー定数  $\Sigma, F^2 \mu^2$  の熱力学極限を推定する。第 7 章では本論文をまとめる。

## 1.2 記号

本節では、本論文で用いる記号を定義しておく。本論文では 4 次元時空として、4 次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^4$  を考える<sup>\*4</sup>。座標、計量、微分は次のように表記する：

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^1, x^2, x^3, x^4) \\ \delta_{\mu\nu} &= \text{diag}(+1, +1, +1, +1), \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \\ \partial_\mu &:= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Minkowski 空間と異なり、Euclid 空間の場合はベクトルの反変および共変成分を示す上下の添え字を区別する必要がないため、ベクトルや場の記号に付随する時空の添え字は下付きに揃えることが慣習となっている。次に、Dirac の  $\gamma$  行列は次式で定義される反交換関係 (Clifford 代数) を満たす：

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4 \tag{1.3}$$

<sup>\*4</sup> 本論文では最初から Euclid 空間で定義するが、素粒子論における連続時空の量子場の理論は通常 4 次元 Minkowski 空間を考える。その方が Lorentz 不変性が明確な形式で作用を構成できるからである。しかし扱う対象によって、Minkowski 空間よりも Euclid 空間の方が都合がよい場合がある。Minkowski 空間から Euclid 空間に移るときは Wick 回転 ( $x^0 \rightarrow -ix^4$ ) を行う。量子場の理論は経路積分によって定式化されると、Wick 回転によって作用を  $iS \rightarrow -S$  のように置き換えることができる。したがって、Wick 回転によって経路積分は統計力学的な分配関数として扱うことができる。実際、経路積分の数学的な定式化は Euclid 空間においてなされている。また、第 4 章で取り上げる格子ゲージ理論は Euclid 空間において定義される。Wick 回転については [1, 8] などを参照。

以後、 $\gamma_\mu$  はカイラル表現を用いる。このとき、 $\gamma_5$  は次式で定義される<sup>\*5</sup>：

$$\gamma_5 := \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

ここで、 $\mathbf{1} : 2 \times 2$  単位行列、 $0 : 2 \times 2$  零行列とする（以後、 $\mathbf{1}$  は適当なサイズをとる単位行列とし、 $0$  は適当なサイズをとる零行列とする）。このとき、 $\gamma_k (k = 1, 2, 3)$  と  $\gamma_4$  は

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

と表現される。ここで、 $\sigma_k$  は Pauli 行列である：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

後の便利のため、(1.5) を統一して記述する。改めて Pauli 行列を  $\sigma_\mu = (\sigma_k, \sigma_4) = (\sigma_k, -i\mathbf{1})$  と定義すると、(1.5) は次のように表現できる：

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_\mu^\dagger \\ i\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

(1.7) から  $\gamma_\mu$  は明らかにエルミートである。 $\gamma_5$  は  $\gamma_\mu$  との反交換関係：

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad (1.8)$$

を満たす。また、 $(\gamma_5)^2 = \mathbf{1}$  から  $\gamma_5$  の固有値は  $\pm 1$  である。この固有値はカイラリティと呼ばれ、カイラリティ  $+1$  および  $-1$  の固有部分空間に分解できる。よって、次のような射影演算子が定義される：

$$P_R^+ := \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_L^- := \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$P_R^+, P_L^-$  は次の関係式を満たす：

$$P_R^+ + P_L^- = \mathbf{1}, \quad (P_R^+)^2 = P_R^+, \quad (P_L^-)^2 = P_L^-, \quad P_R^+ P_L^- = P_L^- P_R^+ = 0 \quad (1.10)$$

無質量の自由 Dirac 場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_\alpha(x) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \psi_\beta(x) \quad (1.11)$$

によって与えられる。Dirac 場  $\psi_\alpha(x)$  の添え字  $\alpha = 1, 2, 3, 4$  は 4 成分の Dirac スピノルであることを表す（以後混乱のない限り省略する）。 $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4$  は共役 Dirac 場である。Dirac スピノル  $\psi$  は射影演算子 (1.9) によって次のように分解できる：

$$\psi_R := P_R^+ \psi = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_L := P_L^- \psi = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

<sup>\*5</sup>  $\gamma_5$  の表現行列は  $(\gamma_5)^2 = \mathbf{1}$  および  $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$  を満たす単純な表現で定義することが慣習となっている。

ここで、 $\psi_R$  および  $\psi_L$  はそれぞれ右巻き場および左巻き場（Weyl スピノル）である。実際に右巻き場および左巻き場に  $\gamma_5$  を作用させると、

$$\gamma_5\psi_R = +\psi_R, \quad \gamma_5\psi_L = -\psi_L \tag{1.13}$$

であるから、 $\psi_R$  および  $\psi_L$  はそれぞれカイラリティ  $+1$  および  $-1$  に対する場である。

## 第 2 章

# QCD とその大域的対称性

本章では強い相互作用を記述する基礎理論である QCD を導入する。QCD のラグランジアンはゲージ原理に基づいて構成される。2.1 節では自由 Dirac 場のラグランジアンに局所的ゲージ不変性を課すことによって相互作用の形でゲージ場が導入されることを確認する。量子場の理論である QCD は摂動論による解析から漸近的自由性を持っていることが知られている。漸近的自由性は QCD が高エネルギースケールであるほど弱結合になることを示すため、QCD は低エネルギースケールにおいて強結合であることが予想される。クォークの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れのような QCD の低エネルギーにおける現象は強結合領域で生じるため、低エネルギーにおける現象を摂動論によって解析することは困難である。そのため、低エネルギーにおける現象を理解するためには非摂動的な手法が必要となる。そのうち、第 3 章で取り扱う低エネルギー有効理論や第 5 章で取り扱うカイラルランダム行列は非摂動的研究を有効模型を用いて行う解析的手法として知られている。一方で、第 4 章で取り扱う格子ゲージ理論は数値的な手法として知られている。2.2 節では QCD の低エネルギーで重要な役割を果たすと考えられている QCD の大域的対称性についてまとめる。2.3 節では本論文の主題に直接関連する QCD の Dirac 演算子の固有値とカイラル対称性の自発的破れを直接結びつける Banks–Casher 関係式を導出する。

### 2.1 局所的ゲージ不変性

本節では QCD のラグランジアンを構成するための基礎である局所的ゲージ不変性について記述する。局所的ゲージ不変性を持つ場の理論は一般にゲージ理論と呼ばれる。QCD だけでなく、素粒子標準模型は基本的にゲージ理論によって記述されている。本節の議論は主に Ref. [1] に従っている。

#### 2.1.1 U(1) ゲージ変換

本節では相互作用のない自由 Dirac 場に対するラグランジアン (1.11) を考える：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(\gamma_{\mu}\partial_{\mu} + m)\psi(x) \tag{2.1}$$

(2.1) の Dirac 場  $\psi(x)$  に対して、次の変換を考える：

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta} \psi(x), & \theta \in \mathbb{R}, \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i\theta}\end{aligned}\tag{2.2}$$

変換 (2.2) は大域的位相変換であり、U(1) 群をなす。ラグランジアン (2.1) は変換 (2.2) に対して明らかに不変である。変換 (2.2) は実パラメータ  $\theta$  が時空  $x^\mu$  に依存しない定数であるため、時空の各点で位相を同時にすべて回転させることを意味する。ところが、現実的にはこのような大域の変換よりも、各時空点において位相を独立に回転させることができる方が自然であると考えられる。ゆえに、実パラメータ  $\theta$  が任意の  $x^\mu$  依存性を持つ局所変換の下で理論が不変になることが要求される（ゲージ原理）：

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta(x)} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i\theta(x)}\end{aligned}\tag{2.3}$$

ラグランジアン (2.1) は、変換 (2.3) の下で  $\partial_\mu \psi'(x) = e^{i\theta(x)} \partial_\mu (i\theta(x)) \psi(x) + e^{i\theta(x)} \partial_\mu \psi(x)$  を用いると、

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}'(x) \{ \gamma_\mu (\partial_\mu + i\partial_\mu \theta(x)) + m \} \psi'(x)$$

となり、変換 (2.3) の下で不変でない。よって、ゲージ原理の要求を満たすためには微分の定義を変更する必要がある。具体的にはゲージ場  $A_\mu(x)$  を導入した共変微分が定義される：

$$D_\mu \psi(x) = (\partial_\mu + iqA_\mu(x)) \psi(x)\tag{2.4}$$

ここで、 $q$  は結合定数である。ラグランジアン (2.1) が局所変換 (2.3) の下で不変になるためには、ゲージ場  $A_\mu(x)$  の変換を次のように決めればよい：

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x)\tag{2.5}$$

(2.4) に対して、変換 (2.3) と (2.5) を同時に実行すると、

$$\begin{aligned}D_\mu \psi(x) &= (\partial_\mu + iqA_\mu(x)) \psi(x) \\ \rightarrow D_\mu \psi'(x) &= \left\{ \partial_\mu + iq \left( A_\mu(x) - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x) \right) \right\} e^{i\theta(x)} \psi(x) \\ &= e^{i\theta(x)} (\partial_\mu + iqA_\mu(x)) \psi(x)\end{aligned}$$

となり、ラグランジアンは局所変換の下で不変になる。変換 (2.3) と (2.5) を同時に実行することは局所的 U(1) ゲージ変換と呼ばれる。したがって、局所的 U(1) ゲージ変換の下で不変なラグランジアンは次のように書くことができる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(x) (\gamma_\mu D_\mu + m) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) \{ \gamma_\mu (\partial_\mu + iqA_\mu(x)) + m \} \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi(x) + iq \bar{\psi}(x) \gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x)\end{aligned}\tag{2.6}$$

(2.6) の最下行において，自由 Dirac 場に対するラグランジアン (2.1) に Dirac 場とゲージ場の相互作用項が加えられている．これは微分を共変微分に置き換えるというゲージ原理の要求によって，場の相互作用の形が決まることを意味する．この事実はゲージ原理が支持される大きな理由の一つになっている．量子電磁力学 (QED) において，この相互作用項は電子と無質量の U(1) ゲージ場である光子の相互作用を記述している．

### 2.1.2 非可換ゲージ変換

前節で述べたように，自由 Dirac 場に対するラグランジアン (2.1) は大域的 U(1) 変換 (2.2) の下で不変である．本節では Dirac 場  $\psi(x)$  を  $N$  成分の状態 ( $N$  重項) に拡張することを考える：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_i(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

このとき，変換 (2.2) の U(1) 位相は， $N \times N$  ユニタリ行列に置き換わり，パラメータは  $\theta \rightarrow \theta^a T^a$  のように拡張される：

$$\psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x) = U_{ij}\psi_j(x) = [e^{i\theta^a T^a}]_{ij}\psi_j(x), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

QCD において，添え字  $i, j$  はカラー添え字と呼ばれる (以後カラー添え字は混乱のない限り省略する)． $T^a$  はリー群 SU( $N$ ) の生成子であり， $T^a$  はリー代数をなす：

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad a, b, c = 1, 2, \dots, N^2 - 1 \quad (2.9)$$

ここで， $f^{abc}$  は構造定数である． $T^a$  の規格化は次のようにとる：

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \quad (2.10)$$

$U = e^{i\theta^a T^a} \in \text{SU}(N)$  はユニタリ行列であるから， $T^a$  は  $N \times N$  エルミート行列である；無限小変換  $U = e^{i\theta^a T^a} = \mathbf{1} + i\theta^a T^a + \dots$  を考えると，

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= UU^\dagger \\ &= (\mathbf{1} + i\theta^a T^a + \dots)(\mathbf{1} - i\theta^a T^{a\dagger} + \dots) \\ &\simeq \mathbf{1} + i\theta^a (T^a - T^{a\dagger}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる． $\theta^a \in \mathbb{R}$  は任意の定数なので， $T^a = T^{a\dagger}$  が成り立つ．また， $U \in \text{SU}(N)$  に対する  $\det U = 1$  の条件から，任意の  $\theta^a \in \mathbb{R}$  に対して

$$\begin{aligned} 1 &= \det U = e^{\text{tr} \log U} = e^{i\theta^a \text{tr} T^a} \\ \therefore \text{tr} T^a &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

となるので，リー代数の元  $T^a$  はトレースレスエルミート行列で表現できる．



2.1.1 節と同様に私たちはゲージ原理を要求する．すなわち，変換 (2.8) の実パラメータが  $\theta \rightarrow \theta(x)$  のように  $x^\mu$  依存性を持つ場合を考える．このとき  $U \rightarrow U(x)$  と変更を受けるため，Dirac 場  $\psi_i(x)$  の局所変換は

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U^\dagger(x)\end{aligned}\tag{2.13}$$

となる．局所的 U(1) ゲージ変換の場合と同様に，変換された場の微分を考えると，

$$\begin{aligned}\partial_\mu \psi'(x) &= \partial_\mu(U(x)\psi(x)) \\ &= U(x)\partial_\mu \psi(x) + (\partial_\mu U(x))\psi(x) \\ &= U(x)\{\partial_\mu \psi(x) + U^\dagger(x)(\partial_\mu U(x))\psi(x)\}\end{aligned}\tag{2.14}$$

となり，ラグランジアン (2.7) は局所変換 (2.13) の下で不変でなくなる．(2.14) の右辺第 2 項  $U^\dagger(x)(\partial_\mu U(x))\psi(x)$  の部分を消去するためにはゲージ場  $A_\mu$  を導入し，微分を共変微分に置き換える必要がある：

$$(D_\mu)_{ij}\psi_j(x) = (\partial_\mu + igA_\mu(x))_{ij}\psi_j(x)\tag{2.15}$$

ここで， $g$  は結合定数である．このときゲージ場  $A_\mu(x)$  は次のように変換しなければならない：

$$\begin{aligned}A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) &= U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x) \\ &= U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)\end{aligned}\tag{2.16}$$

ここで， $I = UU^\dagger$  の両辺を微分した式  $(\partial_\mu U)U^\dagger = -U(\partial_\mu U^\dagger)$  を用いている．(2.15) に対して，変換 (2.13) と (2.16) を同時に実行すると，

$$\begin{aligned}D_\mu \psi(x) &\rightarrow D_\mu \psi'(x) \\ &= \left\{ \partial_\mu + ig \left( U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x) \right) \right\} U(x)\psi(x) \\ &= \partial_\mu(U(x)\psi(x)) + igU(x)A_\mu(x)\psi(x) - (\partial_\mu U(x))\psi(x) \\ &= U(x)(\partial_\mu + igA_\mu(x))\psi(x) \\ &= U(x)D_\mu \psi(x)\end{aligned}\tag{2.17}$$

となる．ここで，3 行目に対して (2.14) の 2 行目の結果を用いている．(2.17) から，ラグランジアン (2.7) は局所変換の下で不変になる．変換 (2.13) と (2.16) を同時に実行することは（局所的）非可換ゲージ変換または  $SU(N)$  ゲージ変換と呼ばれる．

次に，ゲージ場の変換則 (2.16) から得られる  $A_\mu(x)$  の性質について考える．まず， $N \times N$  行列  $A_\mu(x)$  がエルミート行列であることを確認する． $A_\mu(x)$  がエルミート行列であるとき， $SU(N)$  ゲージ変換後のゲージ場  $A'_\mu(x)$  がエルミートであれば，常に  $A_\mu(x)$  がエルミート行列であること

を保証する。エルミート共役  $A_\mu^\dagger(x)$  の変換則を調べるために、(2.16) のエルミート共役をとると、

$$\begin{aligned}
A_\mu^\dagger(x) \rightarrow A_\mu^{\prime\dagger}(x) &= \{U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x)\}^\dagger + \frac{-i}{g}\{(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x)\}^\dagger \\
&= U(x)A_\mu^\dagger(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{g}U(x)(\partial_\mu U^\dagger(x)) \\
&= U(x)A_\mu^\dagger(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
0 = A_\mu - A_\mu^\dagger(x) \longrightarrow A'_\mu(x) - A_\mu^{\prime\dagger}(x) &= U(x)(A_\mu(x) - A_\mu^\dagger(x))U^\dagger(x) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

となり、ゲージ場  $A_\mu(x)$  は常にエルミート行列であることが確認される。

次に、ゲージ場の変換則の無限小変換を考える。無限小変換  $U = e^{i\theta^a(x)T^a} = \mathbf{1} + i\theta^a(x)T^a + \dots$  の下で (2.16) は次のようになる（便利のため、 $\theta^a \rightarrow g\theta^a$  とスケールする）：

$$\begin{aligned}
A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) &= U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x) \\
&= (\mathbf{1} + ig\theta^a(x)T^a + \dots)A_\mu(x)(\mathbf{1} - ig\theta^a(x)T^a + \dots) \\
&\quad + \frac{i}{g}\{\partial_\mu(\mathbf{1} + ig\theta^a(x)T^a + \dots)\}(\mathbf{1} - ig\theta^a(x)T^a + \dots) \\
&\simeq A_\mu(x) + ig\theta^a(x)T^a A_\mu - igA_\mu\theta^a(x)T^a - \partial_\mu\theta^a(x)T^a \\
\therefore A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + ig\theta^a(x)[T^a, A_\mu] - \partial_\mu\theta^a(x)T^a
\end{aligned} \tag{2.20}$$

ゲージ場の無限小変換 (2.20) のトレースをとると、

$$\begin{aligned}
\text{tr } A_\mu(x) \rightarrow \text{tr } A'_\mu(x) &= \text{tr } (A_\mu(x) + ig\theta^a(x)[T^a, A_\mu] - \partial_\mu\theta^a(x)T^a) \\
&= \text{tr } A_\mu(x) + ig\theta^a(x) \text{tr } [T^a, A_\mu] - \partial_\mu\theta^a(x) \text{tr } T^a \\
&= \text{tr } A_\mu(x)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

が得られる。ここで、第3項は (2.12) から、第2項はトレースの巡回不変性からゼロである。すなわち、ゲージ場のトレースは無限小ゲージ変換 (2.20) の下で不変である。この事実は  $A_\mu(x)$  をエルミートだけでなくトレースレスにできることを意味する。したがって、ゲージ場  $A_\mu$  は  $SU(N)$  の生成子の線形結合  $\theta^a(x)T^a$  と同じ構造を持ち、 $T^a$  の線形結合で書くことができる：

$$(A_\mu(x))_{ij} = A_\mu^a(x)(T^a)_{ij} \tag{2.22}$$

すなわち、ゲージ場は常にリー代数に値を持つ量として記述できる。ゲージ場の成分  $A_\mu^a(x)$  はリー群  $SU(N)$  の次元、すなわち、生成子の数と同数存在する。リー代数 (2.9) と (2.22) を用いると、 $A_\mu^a(x)$  の無限小ゲージ変換 (2.20) は次のように書き直せる：

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^{\prime a}(x) = A_\mu^a(x) - gf^{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \partial_\mu\theta^a(x) \tag{2.23}$$

SU(N) ゲージ変換の下で不変なラグランジアンは次のように書くことができる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}_i(x)(\gamma_\mu(D_\mu)_{ij} + m\delta_{ij})\psi_j(x) \\ &= \bar{\psi}_i(x)\{\gamma_\mu(\partial_\mu + igA_\mu^a(x)T^a)_{ij} + m\delta_{ij}\}\psi_j(x)\end{aligned}\tag{2.24}$$

U(1) の場合と同様に，自由  $N$  重項 Dirac 場に対するラグランジアン (2.7) に  $N$  重項 Dirac 場と SU(N) ゲージ場の相互作用項が加えられている．QCD において，この相互作用はカラーの自由度を持つクォークと無質量の SU(3) ゲージ場であるグルーオンの相互作用を記述している．

### 2.1.3 場の強度

SU(N) ゲージ変換の下で不変なフェルミオンのラグランジアンは (2.7) で与えられる．このとき理論が局所的ゲージ不変性を持つようにゲージ場を導入したが，(2.7) のみではゲージ場は背景場としての役割しか持っていない．例えば U(1) の場合は外部電磁場中における荷電粒子の運動を扱うことに相当する．実際にはゲージ場自身が運動項を持つはずであり，U(1) の場合は Maxwell の運動項  $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  がそれに相当する．電磁気学において，Maxwell の運動項は Maxwell 方程式が場の方程式として導出できるように作用の Lorentz 不変性が明確であるものとして構成される．このとき  $A_\mu(x)$  の 1 階微分を含む反対称な電磁場の強度テンソル  $F_{\mu\nu}(x) := \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$  が定義される．局所的ゲージ不変性の観点から見ると，電磁場の強度テンソル  $F_{\mu\nu}(x)$  は局所的 U(1) ゲージ変換 (2.5) の下で不変である：

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x) \\ &= \partial_\mu(A_\nu(x) - \frac{1}{q}\partial_\nu\theta(x)) - \partial_\nu(A_\mu(x) - \frac{1}{q}\partial_\mu\theta(x)) \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \\ &= F_{\mu\nu}(x)\end{aligned}\tag{2.25}$$

したがって，Maxwell の運動項も局所的 U(1) ゲージ変換の下で不変である．ところが，SU(N) ゲージ変換の下での不変性を要求する場合は，U(1) の場合と比べて，非可換ゲージ場の強度テンソルを見つけ出すことは容易でない．

結果から述べると，非可換ゲージ場の強度テンソルの構成は微分形式によって比較的容易にできることが知られている．直感的に言うと，SU(N) ゲージ理論は 4 次元時空だけでなく， $(N^2 - 1)$  次元の SU(N) のリー代数のなす空間のような一般に曲がった内部空間を含んでいる．その上で局所的ゲージ不変性を要求するためには時空の各点において内部座標が設定できなければならない．このような都合の良い空間が数学ではよく知られ，多様体と呼ばれる．よって，SU(N) ゲージ理論を考えると多様体上に場が存在していることに注意する必要がある．この観点から，共変微分の導入は多様体上での場の平行移動を考えていることに相当する．この意味で，ゲージ場  $A_\mu$  は接続係数，電磁場の強度テンソル  $F_{\mu\nu}$  は曲率テンソルに対応する．微分形式を用いる利点は多様体上で物理を取り扱うときに，座標系によらない記述ができることにある．具体的には，場の成分を意味する添え字を落とすことができ，計算の簡略化が可能となる．微分形式の言葉ではゲージ場

は接続 1-形式, 場の強度は曲率 2-形式に対応する\*1.

微分形式の導入を簡単化するために, 私たちはゲージ場を  $\mathcal{A}_\mu := igA_\mu(x)$  によって再定義する. このとき共変微分は次のように置き換わる:

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x) \longrightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \mathcal{A}_\mu = \partial_\mu + \mathcal{A}_\mu^a T^a \quad (2.26)$$

まず, ゲージ場はリー代数に値を持つ 1-形式として導入される:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu = \mathcal{A}_\mu^a T^a dx^\mu \quad (2.27)$$

次に場の強度を構成する. ここでは電磁場の強度テンソルがゲージ場  $\mathcal{A}_\mu$  のみを用いて構成できる最も簡単な反対称 2 階テンソルであるという事実を  $SU(N)$  ゲージ場に適用する直接的方法を試みる. 1-形式  $\mathcal{A}$  から構成できる 2-形式は  $\mathcal{A}$  の外微分  $d\mathcal{A}$  と  $\mathcal{A}$  自身の外積  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$  の 2 つである. 後者の  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$  は (2.27) から  $\mathcal{A}$  がリー代数の表現行列  $T^a$  の線形結合であるためにゼロでない値を持つ:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} &= \mathcal{A}_\mu^a T^a \mathcal{A}_\nu^b T^b dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{A}_\mu^a T^a, \mathcal{A}_\nu^b T^b] dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \quad (2.28)$$

すなわち, 2-形式である場の強度  $\mathcal{F}$  はこれらの線形結合で構成できる:

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \quad (2.29)$$

次に  $\mathcal{A}$  に対する  $SU(N)$  ゲージ変換を微分形式で書き直す. (2.16) の  $U(x)$  は 0-形式であり, その外微分が  $dU = \partial_\mu U(x) dx^\mu$  であるから,

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}' = U\mathcal{A}U^\dagger + U dU^\dagger \quad (2.30)$$

となる. さらに, (2.30) の外微分は

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} \rightarrow d\mathcal{A}' &= d(U\mathcal{A}U^\dagger) + d(U dU^\dagger) \\ &= dU \wedge \mathcal{A}U^\dagger + U(d\mathcal{A})U^\dagger - U\mathcal{A} \wedge dU^\dagger + dU \wedge dU^\dagger \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる. 同様に,  $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$  に対する  $SU(N)$  ゲージ変換は次のようになる:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})' &= (U\mathcal{A}U^\dagger + U dU^\dagger) \wedge (U\mathcal{A}U^\dagger + U dU^\dagger) \\ &= U\mathcal{A}U^\dagger U \wedge \mathcal{A}U^\dagger + U\mathcal{A}U^\dagger U \wedge dU^\dagger + U dU^\dagger U \wedge \mathcal{A}U^\dagger + U dU^\dagger U \wedge dU^\dagger \\ &= U(\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})U^\dagger + U\mathcal{A} \wedge dU^\dagger - dU \wedge \mathcal{A}U^\dagger - dU \wedge dU^\dagger \end{aligned} \quad (2.32)$$

---

\*1 ゲージ理論は多様体の中でも特にファイバー束上の接続を考えることに対応する. 場の強度は曲率 2-形式の局所表示の定義から接続 1-形式の主束における共変微分によって自然に構成される. 多様体や微分形式の詳細は [110, 111] などに委ねる.

ここで、 $\mathbf{1} = UU^\dagger$  の両辺を微分した式  $(\partial_\mu U)U^\dagger = -U(\partial_\mu U^\dagger)$  の微分形式による表現  $(dU)U^\dagger = -UdU^\dagger$  を用いている。したがって、(2.31) と (2.32) から場の強度  $\mathcal{F}$  に対する  $SU(N)$  ゲージ変換は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}' = d\mathcal{A}' + (\mathcal{A}' \wedge \mathcal{A}') \\ &= U(d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A})U^\dagger \\ &= U\mathcal{F}U^\dagger\end{aligned}\tag{2.33}$$

以上のように微分形式を用いることによって、テンソル形式における添え字の計算がなくなり、場の強度とそれに対する  $SU(N)$  ゲージ変換の導出が簡単化されている。

微分形式によって、場の強度 (2.29) とそれに対する  $SU(N)$  ゲージ変換 (2.33) を導出するという目的は達成できたので、再びテンソル形式に書き換える。(2.29) は次のように書くことができる：

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \\ &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a T^a dx^\mu \wedge dx^\nu + \mathcal{A}_\mu^a T^a \mathcal{A}_\nu^b T^b dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a T^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a T^a + [\mathcal{A}_\mu^a T^a, \mathcal{A}_\nu^b T^b]) dx^\mu \wedge dx^\nu\end{aligned}\tag{2.34}$$

2-形式の定義  $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$  を用いると、場の強度テンソルは次のようになる：

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a T^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a T^a + [\mathcal{A}_\mu^a T^a, \mathcal{A}_\nu^b T^b]\tag{2.35}$$

ここで、私たちは微分形式の導入時に用いた表記  $\mathcal{A}_\mu$  を最初の表記に戻す。 $A_\mu(x) = (-i/g)\mathcal{A}_\mu$  とともに、 $F_{\mu\nu}(x) := (-i/g)\mathcal{F}_{\mu\nu}$  を定義すると、次式が得られる：

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) T^a - \partial_\nu A_\mu^a(x) T^a + ig[A_\mu^a(x) T^a, A_\nu^b(x) T^b]\tag{2.36}$$

ここまで私たちは 1-形式で表現できる  $SU(N)$  ゲージ場から直接的な方法で (2.36) を導出した。ここでは場の強度のもう一つの重要な特徴でもある共変微分との関係に着目する。微分形式における共変微分は外微分からの類推で、 $\mathcal{D} := d + \mathcal{A}$  という形の演算子であると定義する。任意の  $p$ -形式  $\mathcal{H}$  に対して、この共変微分は次のような演算規則に従う：

$$\mathcal{D}\mathcal{H} = d\mathcal{H} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{H}\tag{2.37}$$

この共変微分  $\mathcal{D}$  を  $\mathcal{H}$  に 2 回作用させると、

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^2\mathcal{H} &= d\mathcal{D}\mathcal{H} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{D}\mathcal{H} \\ &= (d\mathcal{A}) \wedge \mathcal{H} - \mathcal{A} \wedge d\mathcal{H} + \mathcal{A} \wedge d\mathcal{H} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{H} \\ &= (d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) \wedge \mathcal{H}\end{aligned}\tag{2.38}$$

が得られる。ここで、 $dd = 0$  を用いている。(2.38) から、 $\mathcal{D}^2$  は演算子でなくなっている。よって、任意の  $p$ -形式  $\mathcal{H}$  に対して、 $\mathcal{D}^2 = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$  が成立し、(2.29) から明らかに  $\mathcal{F} = \mathcal{D}^2$  である。 $\mathcal{D}$  を 1-形式とみなし、先述と同様に再びテンソル形式に書き換えると、

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu^a(x) T^a - \partial_\nu A_\mu^a(x) T^a + ig[A_\mu^a(x) T^a, A_\nu^b(x) T^b]\end{aligned}\tag{2.39}$$

が得られる。したがって、場の強度テンソル  $F_{\mu\nu}(x)$  は共変微分の交換関係と等価であり、(2.36) と一致する。

場の強度テンソル (2.36) はさらにリー代数の定義 (2.9) を用いると、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)) T^a + ig A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) [T^a, T^b] \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - gf^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)) T^a \\ &= F_{\mu\nu}^a(x) T^a \end{aligned} \quad (2.40)$$

と表現できる。ここで、場の強度の成分  $F_{\mu\nu}^a(x)$  は次式で定義される：

$$F_{\mu\nu}^a(x) := \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - gf^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \quad (2.41)$$

したがって、(2.40) のように、場の強度テンソルはゲージ場と同様にリー代数  $T^a$  の線形結合で書くことができる。また、 $F_{\mu\nu}(x)$  に対する  $SU(N)$  ゲージ変換は (2.33) から次のように書くことができる：

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = U(x) F_{\mu\nu}(x) U^\dagger(x) \quad (2.42)$$

次に、場の強度  $F_{\mu\nu}(x)$  を用いて  $SU(N)$  ゲージ変換 (2.42) の下で不変なラグランジアンを構成する。 $F_{\mu\nu}(x)$  を用いて構成できる最も単純な形は、Maxwell の運動項からの類推によって、

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (2.43)$$

と書くことができる。(2.43) は Yang–Mills ラグランジアンと呼ばれる。(2.43) はトレースの巡回不変性から、明らかに  $SU(N)$  ゲージ変換の下で不変である。ゲージ場と同様に、(2.43) は (2.40) を用いると、

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu}^a(x) T^a F_{\mu\nu}^b(x) T^b = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^b(x) \text{tr} T^a T^b = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) \quad (2.44)$$

という形の成分表示で書くことができる。ここで、リー代数の元  $T^a$  の規格化条件 (2.10) を用いている。

最後に、Yang–Mills ラグランジアン (2.44) の持つ物理的背景について簡単に考察する。(2.41) を (2.44) に代入すると、 $A_\mu^a(x)$  に対して次のような項が含まれている：

$$2 \text{ 次 の 項 : } (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x))^2 \quad (2.45)$$

$$3 \text{ 次 の 項 : } f^{abc} A_\mu^b(x) A_\mu^c(x) (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)) \quad (2.46)$$

$$4 \text{ 次 の 項 : } (f^{abc} A_\mu^b(x) A_\mu^c(x))^2 \quad (2.47)$$

(2.45) は添え字  $a$  を運んでいる無質量のゲージ場の伝播を示す。U(1) の場合は光子の伝播に対応し、 $SU(N)$  の場合は非可換ゲージボゾン\*2の伝播に対応する。(2.46) と (2.47) は、U(1) の場合に

---

\*2 非可換ゲージボゾンは QCD においてグルーオンに対応する。

は存在せず、非可換ゲージボゾンの自己相互作用を記述する。光子は (2.6) のように電荷を持つ電子と相互作用するが、光子自体は電荷を持っていないので、光子同士の相互作用は起こらない。ところが、非可換ゲージボソンは添え字  $a$  を運んでいるため、電荷の類似物を持っていることになる。群の構造定数  $f^{abc}$  の存在によって添え字は和をとっているから、電荷の類似物の存在に起因して非可換ゲージボソンは自己相互作用することになる。

## 2.2 QCD の大域的対称性

量子色力学 (QCD) は 2.1 節において導出した局所的ゲージ不変性を持つラグランジアンをもとに構成され、特に素粒子標準模型における QCD は SU(3) ゲージ変換の下で不変な理論<sup>\*3</sup>である。Dirac 場は 2.1.2 節で導入した添え字  $i, i = 1, 2, 3$  を運んでいる 3 重項である。このような内部自由度は通常の電荷にちなんで色荷 (カラー) と呼ばれ、カラーを持つフェルミオンはクォーク<sup>\*4</sup>と呼ばれる。クォークは陽子や  $\pi$  中間子をはじめとするハドロン<sup>\*5</sup>の構成粒子である。クォークは現在 6 種類存在することが知られ、この種類はフレーバーと呼ばれる。一方、SU(3) ゲージ場はグルーオンと呼ばれる非可換ゲージボソンであり、8 成分 (8 重項) 存在する。本章における議論は以後 SU(3) に限らず、一般の SU( $N$ ) ゲージ群を考えることにする。本節ではまず QCD の作用とその経路積分の定義を与える。本節の議論は主に Ref. [55] に従っている。

まず、QCD の作用の定義を与えるために、私たちは (2.24) および (2.44) におけるゲージ場を  $A_\mu^a(x) \rightarrow (1/g)A_\mu^a(x)$  のように置き換える。フェルミオンであるクォークに関する作用  $S_F$  とゲージ場であるグルーオンの運動項である Yang–Mills 作用  $S_{YM}$  によって、QCD 作用は次式で定義される：

$$\begin{aligned} S_{\text{QCD}} &= S_{\text{YM}} + S_F \\ &= \frac{1}{4g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \int d^4x \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_i^f(x) (\not{D} + m_f)_{ij} \psi_j^f(x) \end{aligned} \quad (2.48)$$

ここで、 $N_f$  はフレーバー数である (標準模型の QCD では  $N_f = 6$  である)。フレーバーの存在によって、クォークはカラー添え字  $i = 1, 2, \dots, N_c$  に加えて、フレーバー添え字  $f = 1, 2, \dots, N_f$  を持つ。フレーバー添え字はカラー添え字とは独立に存在し、局所的ゲージ不変性が由来であるカラー添え字とは異なり、大域的であることに注意が必要である。 $\not{D}$  は Dirac 演算子であり、次式で与えられる：

$$(\not{D})_{ij} = \gamma_\mu (\partial_\mu + iA_\mu^a(x)(T^a)_{ij}) \quad (2.49)$$

<sup>\*3</sup> 局所的ゲージ変換に関するリー群はゲージ群と呼ばれる。2.1 節では標準模型の QCD よりも一般的なゲージ群である SU( $N$ ) ゲージ群を考えていた。

<sup>\*4</sup> カラーを持たないフェルミオンはレプトンと呼ばれる。電荷を持つレプトンは電子を含む  $e, \mu, \tau$  の 3 種類があり、電荷を持たないフェルミオンはニュートリノ ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) と呼ばれる。

<sup>\*5</sup> ハドロンは大きく 2 種類に分類される。陽子や中性子のようにクォーク 3 つで構成されるハドロン (フェルミオン) はバリオンと呼ばれ、 $\pi$  中間子のようにクォークと反クォークの対で構成されるハドロン (ボソン) はメソンと呼ばれる。

Dirac 演算子は添え字  $i, j$  を持ち、その性質はリー代数  $(T^a)_{ij}$  の表現によって決まる。  $\gamma_\mu, T^a$  がエルミート、  $\partial_\mu$  が反エルミートであるから、  $\mathcal{D}$  のエルミート共役は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\dagger &= (\gamma_\mu(\partial_\mu + iA_\mu^a(x)T^a))^\dagger = \gamma_\mu(-\partial_\mu - iA_\mu^a(x)T^a) \\ &= -\mathcal{D}\end{aligned}\tag{2.50}$$

となる。したがって、Dirac 演算子  $\mathcal{D}$  は反エルミート演算子である。作用 (2.48) を重みとする Euclid 空間  $\mathbb{R}^4$  における QCD の経路積分は次式で定義される：

$$\begin{aligned}Z^{\text{QCD}} &= \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_{\text{QCD}}} \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \prod_{f=1}^{N_f} \det(\mathcal{D} + m_f) e^{-S_{\text{YM}}}\end{aligned}\tag{2.51}$$

ここで、  $\mathcal{D}A_\mu$  はゲージ場についての経路積分測度であり、  $\det(\mathcal{D} + m_f)$  の部分はフェルミオン行列式と呼ばれる。経路積分において、フェルミオンである  $\psi(x), \bar{\psi}(x)$  は Grassmann 数であるから、フェルミオン行列式は作用  $S_F$  に関する  $\psi, \bar{\psi}$  についての Grassmann 積分である：

$$\prod_{f=1}^{N_f} \det(\mathcal{D} + m_f) = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp\left(-\int d^4x \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_i^f(x) (\mathcal{D} + m_f)_{ij} \psi_j^f(x)\right)\tag{2.52}$$

(2.51) は Yang-Mills 作用を持つ Boltzmann 因子で表現されるため、QCD 分配関数とも呼ばれる。

量子場の理論において相互作用を含む場合の計算手法は摂動論を基本としている。そのため、ラグランジアン of the 構造は局所的ゲージ不変性や繰り込み可能性によって決定される。摂動論によると、QCD は漸近的自由であることが知られ、繰り込まれた結合定数は低エネルギースケールにおいて強結合になることが予想される。したがって、クォークの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れのような現象が起こる低エネルギースケール  $\mathcal{O}(10^2 \text{MeV})$  において、摂動論を適用することは不適切である。ゆえに、強結合領域での QCD を理解するためには摂動論以外の手法が不可欠である。QCD の低エネルギースケールではゲージ不変性のような局所的な対称性よりもむしろ大域的な対称性の方が重要になる。本節では QCD の低エネルギーにおける現象を解析するための重要な手法である低エネルギー有効理論 (第 3 章) やカイラルランダム行列 (第 5 章) を考える上で本質的な役割を果たす 3 つの重要な大域的対称性を議論する。

## 2.2.1 カイラル対称性

### カイラル対称性と軸性対称性

(1.8) から  $\gamma_5$  と Dirac 演算子  $\mathcal{D}$  の間に次の反交換関係が成り立つ：

$$\{\gamma_5, \mathcal{D}\} = 0\tag{2.53}$$



(2.53) はフェルミオン作用  $S_F$  に軸性対称性ならびにカイラル対称性が存在しうることを示す。存在しうるという表現は、後で述べるように、 $S_F$  に質量項が存在するとカイラル対称性が成り立たなくなるためである。また、カイラル対称性は通常  $S_F$  が変換 (2.58) の下で不変であることを意味するが、実際には関係式 (2.53) 自体をカイラル対称性と呼ぶことも多い。

まず、クォーク場に対して、次の軸性 ( $U(1)_A$ ) 変換を考える (カラーとフレーバーの添え字を含まない変換のため添え字を省略する) :

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta_A \gamma_5} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{i\theta_A \gamma_5}\end{aligned}\tag{2.54}$$

ここで、 $\theta_A \in \mathbb{R}$  である。作用  $S_F$  が変換 (2.54) の下で不変であれば、 $U(1)_A$  対称性がある。作用  $S_F$  に対して変換 (2.54) を実行すると、もしクォークが無質量であれば、作用  $S_F$  は  $U(1)_A$  変換に対して不変である。一方、(2.2) と同じ位相変換 :

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = e^{i\theta_V} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) e^{-i\theta_V}\end{aligned}\tag{2.55}$$

は  $U(1)_V$  変換と呼ばれ、 $\theta_V \in \mathbb{R}$  である。作用  $S_F$  が変換 (2.55) の下で不変であれば、 $U(1)_V$  対称性がある。当然、フェルミオン作用  $S_F$  は変換 (2.55) の下で不変である。したがって、クォークが無質量であれば、 $U(1)_A$  変換 (2.54) と  $U(1)_V$  変換 (2.55) の同時変換の下で作用  $S_F$  は不変であり、 $U(1)_V \times U(1)_A$  対称性を持っている。

次に、カイラル対称性の物理的な意味を明確にするために、Dirac 場  $\psi(x)$  を右巻き場と左巻き場に分解する。簡単のため、クォーク質量が縮退している ( $m_q = m_1 = \dots = m_{N_f}$ ) ものとして、フェルミオン作用を書き直す :

$$S_F = N_F \int d^4x \bar{\psi}(x) (\not{D} + m_q) \psi(x)\tag{2.56}$$

作用 (2.56) の被積分関数 ( $\mathcal{L}_F$ ) は右巻きおよび左巻き場 (1.12) を用いると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F &= \bar{\psi}(x) (\not{D} + m_q) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}_R(x) \not{D} \psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x) \not{D} \psi_L(x) + m_q (\bar{\psi}_R(x) \psi_L(x) + \bar{\psi}_L(x) \psi_R(x))\end{aligned}\tag{2.57}$$

と書くことができる。ここで、質量項のうち、 $\bar{\psi}_R \psi_R$  (または  $\bar{\psi}_L \psi_L$ ) は (1.10) を用いると、

$$\bar{\psi}_R \psi_R = \psi_R^\dagger \gamma_4 \psi_R = \psi^\dagger P_R^+ \gamma_4 P_R^+ \psi = \psi^\dagger \gamma_4 P_L^- P_R^+ \psi = 0$$

となるため質量項には現れない。同様に  $\bar{\psi}_R \not{D} \psi_L$  および  $\bar{\psi}_L \not{D} \psi_R$  もゼロである。クォークが無質量であれば、 $\psi_R(x)$  と  $\psi_L(x)$  は独立な運動項を持ち、クォークに質量があると、 $\psi_R(x)$  と  $\psi_L(x)$  の混在した質量項が存在する。さて、右巻き場  $\psi_R(x)$  と左巻き場  $\psi_L$  に対して、次のような変換を考える :

$$\begin{aligned}\psi_R(x) &\rightarrow \psi'_R(x) = e^{i\theta_R} \psi_R(x), & \bar{\psi}_R(x) &\rightarrow \bar{\psi}'_R(x) = \bar{\psi}_R(x) e^{-i\theta_R} \\ \psi_L(x) &\rightarrow \psi'_L(x) = e^{i\theta_L} \psi_L(x), & \bar{\psi}_L(x) &\rightarrow \bar{\psi}'_L(x) = \bar{\psi}_L(x) e^{-i\theta_L}\end{aligned}\tag{2.58}$$

この変換はカイラル変換と呼ばれ、右巻き場  $\psi_R(x)$  と左巻き場  $\psi_L(x)$  を独立に位相変換することを意味する。カイラル変換 (2.58) を (2.57) に対して実行すると、もしクォークが無質量であれば、フェルミオン作用 (2.56) はカイラル変換の下で不変であり、カイラル  $U(1)_R \times U(1)_L$  対称性を持っている。

対称性の観点から、 $U(1)_V \times U(1)_A$  と  $U(1)_R \times U(1)_L$  は等価なものである。無限小変換を考えると、 $U(1)_V$  変換と  $U(1)_A$  変換がそれぞれカイラル変換 (2.58) の一部であることが理解される。Dirac 場が右巻き場および左巻き場の和  $\psi(x) = \psi_R(x) + \psi_L(x)$  で書けることを用いると、 $U(1)_V$  の無限小変換は  $\theta_V = \theta_R = \theta_L$  と置くと、

$$\begin{aligned}\psi(x) \rightarrow \psi'(x) &= (\mathbf{1} + i\theta_V)\psi(x) \\ &= (\mathbf{1} + i\theta_V)\psi_R(x) + (\mathbf{1} + i\theta_V)\psi_L(x) \\ &= (\mathbf{1} + i\theta_R)\psi_R(x) + (\mathbf{1} + i\theta_L)\psi_L(x)\end{aligned}\tag{2.59}$$

となるので、 $U(1)_V$  変換は変換パラメータに  $\theta_V = \theta_R = \theta_L$  の関係が成り立つ場合のカイラル変換である。一方、 $U(1)_A$  の無限小変換は  $\theta_A = \theta_R = -\theta_L$  と置き、(1.13) を用いると、

$$\begin{aligned}\psi(x) \rightarrow \psi'(x) &= (\mathbf{1} + i\theta_A\gamma_5)\psi(x) \\ &= (\mathbf{1} + i\theta_A\gamma_5)\psi_R(x) + (\mathbf{1} + i\theta_A\gamma_5)\psi_L(x) \\ &= (\mathbf{1} + i\theta_A)\psi_R(x) + (\mathbf{1} - i\theta_A)\psi_L(x) \\ &= (\mathbf{1} + i\theta_R)\psi_R(x) + (\mathbf{1} + i\theta_L)\psi_L(x)\end{aligned}\tag{2.60}$$

となるので、 $U(1)_A$  変換は変換パラメータに  $\theta_V = \theta_R = -\theta_L$  の関係が成り立つ場合のカイラル変換である。

### カイラルアノマリーとトポロジカルチャージ

上の議論において、作用  $S_F$  は、クォークが無質量であれば、カイラル対称性  $U(1)_R \times U(1)_L$  または  $U(1)_V \times U(1)_A$  対称性を持っていることを確認した。この対称性は作用が古典的な量であるから古典的な対称性である。よって、この対称性は量子論すなわち経路積分において必ずしも保存されるとは限らない。実際には  $U(1)_V \times U(1)_A$  対称性のうち、 $U(1)_A$  対称性は量子論において破られることが知られている。この現象はカイラルアノマリーと呼ばれる。その破れの原因はクォーク場の  $U(1)_A$  変換に伴う経路積分変数のヤコビアンにあることが知られている。ここではまずヤコビアン の導出法である Fujikawa の方法をレビューし、カイラルアノマリーがヤコビアンとして生じることを確認する。このヤコビアンは Atiyah–Singer の指数定理を通じて Dirac 演算子のゼロ固有値と関係し、トポロジカルチャージと等価であることを示す。ここでの議論は主に Ref. [3, 57, 110] に従っている。

まず、カイラル対称性が成り立つように無質量のクォーク場を考える。  $SU(N)$  ゲージ場が背景場として存在する Dirac 演算子を含むフェルミオン有効作用を持つ次の分配関数を考える：

$$Z^{\text{eff}} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left(-\int d^4x \bar{\psi}(x)\mathcal{D}\psi(x)\right)\tag{2.61}$$

対称性に伴って生じるカレントを導出するため、この作用に対して、 $U(1)_A$  変換 (2.54) のパラメータを  $\theta_A \rightarrow \alpha(x)$  と置き換えた局所的無限小変換を考える：

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = (\mathbf{1} + i\alpha(x)\gamma_5)\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)(\mathbf{1} + i\alpha(x)\gamma_5)\end{aligned}\tag{2.62}$$

この変換の下で (2.61) は、(2.53) を用いると、

$$\begin{aligned}\int d^4x \bar{\psi}'(x)\mathcal{D}\psi'(x) &= \int d^4x \bar{\psi}(x)\mathcal{D}\psi(x) + \int d^4x \partial_\mu(i\alpha(x))\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x) \\ &= \int d^4x \bar{\psi}(x)\mathcal{D}\psi(x) - \int d^4x i\alpha(x)\partial_\mu(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x))\end{aligned}\tag{2.63}$$

となる。ここで、(2.63) の右辺第 2 項の被微分項は

$$j_{5\mu}(x) := \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x)\tag{2.64}$$

で定義されるカイラルカレント（軸性ベクトルカレント）である。このとき (2.61) は積分変数の名前に依存しない、すなわち、 $\int f(x) dx = \int f(y) dy$  であるから、 $\alpha(x) \ll 1$  を用いると、

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left(-\int d^4x \bar{\psi}(x)\mathcal{D}\psi(x)\right) \\ = \int \mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi' \left[1 - \int d^4x i\alpha(x)\partial_\mu j_{5\mu}(x)\right] \exp\left(-\int d^4x \bar{\psi}(x)\mathcal{D}\psi(x)\right)\end{aligned}\tag{2.65}$$

と書くことができる。もし、変換 (2.62) の下で (2.61) 全体が不変であれば、経路積分測度も不変である： $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \mathcal{D}\bar{\psi}'\mathcal{D}\psi'$ 。したがって、Ward–Takahashi 恒等式  $\partial_\mu \langle j_{5\mu}(x) \rangle = 0$  が成り立つ\*6。すなわち、大域的な  $U(1)_A$  変換 (2.54) の下で生じる古典的なネーターカレントの保存則  $\partial_\mu j_{5\mu}(x) = 0$  が量子論でも成立することを意味する。しかし、積分測度は一般的に変数変換によってヤコビアンだけ変化するため、本来は経路積分においてもヤコビアンを正確に計算する必要がある。実際、本節のように場の無限小変換に  $\gamma_5$  が含まれる場合は 1 でないヤコビアンが現れることが知られている。

次に、ヤコビアンの計算を実行するために必要となる Dirac 演算子の固有値の性質について簡単にまとめる。 $\mathcal{D}$  は反エルミート演算子なので、純虚数の固有値  $i\lambda_n$  ( $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ) またはゼロ固有値（ゼロモード）を持っている。相異なる固有値に対する固有関数は互いに正規直交する：

$$\mathcal{D}\phi_n(x) = i\lambda_n\phi_n(x)\tag{2.66}$$

$$\langle \phi, m | \phi, n \rangle := \int d^4x \phi_m^\dagger(x)\phi_n(x) = \delta_{mn}\tag{2.67}$$

(2.53)（または (1.8)）から、Dirac 演算子の固有状態はさらに分解できる。(2.66) に左から  $\gamma_5$  を掛けると、

$$\mathcal{D}(\gamma_5\phi_n(x)) = -i\lambda_n(\gamma_5\phi_n(x))\tag{2.68}$$

\*6 記号  $\langle \mathcal{O} \rangle$  は経路積分において  $\mathcal{O}$  の期待値をとっていることを意味し、 $\alpha(x)$  をある時空点  $x$  でピークを持つデルタ関数と選ぶことで Ward–Takahashi 恒等式を導出する。

となるので、ゼロでない固有値  $\{+i\lambda_n, -i\lambda_n\}$  はそれぞれ2つの固有関数  $\{\phi_n(x), \gamma_5\phi_n(x)\}$  に対するペアの固有値として現れる。すなわち、固有状態は固有値が  $+i\lambda_n$  と  $-i\lambda_n$  の状態に分解される。これはちょうど (1.9) の射影演算子で Dirac 場をカイラリティ  $+1$  と  $-1$  の状態に分解したことに等価である。実際、 $\phi_n(x)$  と  $\gamma_5\phi_n(x)$  は線形独立なので、これらの固有状態は互いに直交する：

$$\langle \phi, n | \gamma_5 | \phi, n \rangle = \int d^4x \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) = 0 \quad (2.69)$$

同様に、ゼロモードに対して状態を分解することを考える。ゼロモードに対応する固有状態をカイラリティの違いを含めて  $|0, n_\pm\rangle$  と書くと、

$$\gamma_5 |0, n_\pm\rangle = \pm |0, n_\pm\rangle, \quad n_\pm = 0, 1, \dots, N_\pm \quad (2.70)$$

のように書くことができる。ここで、 $N_\pm$  はそれぞれカイラリティ  $\pm 1$  のゼロモードの数である。(2.70) は (1.13) のゼロモードに対応する式である。しかし、ゼロモードは右巻きと左巻きの固有状態が線形独立ではなく、右巻きと左巻きを本質的に区別できないため、 $|0, n_\pm\rangle$  は  $\gamma_5$  の同時固有状態として決める。

次に、経路積分測度  $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$  を定義するために、 $\mathcal{D}$  に対する固有関数を用いて、 $\psi(x), \bar{\psi}(x)$  は次のように展開される：

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_n a_n \phi_n(x), & a_n &= (\phi_n(x), \psi(x)) \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_n \phi_n^\dagger(x) \bar{b}_n, & \bar{b}_n &= (\bar{\psi}(x), \phi_n(x)) \end{aligned} \quad (2.71)$$

ここで、 $a_n, \bar{b}_n$  は次式を満たす反可換な Grassmann 数である：

$$\{a_n, a_m\} = 0, \quad \{\bar{b}_n, \bar{b}_m\} = 0, \quad \{a_n, \bar{b}_m\} = 0 \quad (2.72)$$

これらの Grassmann 係数を用いて、 $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$  は次式で定義される：

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi := \prod_n da_n d\bar{b}_n \quad (2.73)$$

局所的無限小  $U(1)_A$  変換 (2.62) の下で、 $a_n$  は次のように変換する：

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow a'_n &= (\phi_n(x), \psi'(x)) = \int d^4x \phi_n^\dagger(x) (1 + i\alpha(x)\gamma_5) \sum_m a_m \phi_m(x) \\ &= \sum_m \left( \int d^4x \phi_n^\dagger(x) \phi_m(x) + \int d^4x i\alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_m(x) \right) a_m \\ &= \sum_m \left( \delta_{nm} + \int d^4x i\alpha(x) \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_m(x) \right) a_m := \sum_m M_{nm} a_m \end{aligned} \quad (2.74)$$

同様に,  $\bar{b}_n$  は次のように変換する :

$$\begin{aligned} b_n \rightarrow b'_n &= (\bar{\psi}'(x), \phi_n(x)) = \int d^4x \sum_m \phi_m^\dagger(x) \bar{b}_m (1 + i\alpha(x)\gamma_5)\phi_n(x) \\ &= \sum_m \bar{b}_m \left( \delta_{mn} + \int d^4x i\alpha(x)\phi_m^\dagger(x)\gamma_5\phi_n(x) \right) = \sum_m \bar{b}_m M_{mn} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Grassmann 積分のヤコビアンは  $c$  数の場合の逆数になる<sup>\*7</sup>ので,  $a'_n, \bar{b}'_n$  に対するヤコビアンは

$$\begin{aligned} \prod_n da'_n d\bar{b}'_n &= (\det M)^{-1} (\det {}^T M)^{-1} \prod_n da_n d\bar{b}_n \\ &= (\det M)^{-2} \prod_n da_n d\bar{b}_n := \mathcal{J} \prod_n da_n d\bar{b}_n \end{aligned} \quad (2.76)$$

となる.  $(\det M)^{-2}$  の計算は行列  $M$  が無限小の  $\alpha$  に対して,  $M \rightarrow \mathbf{1} + \alpha M$  の形をしているので, 行列公式  $\det M = e^{\text{tr} \log M} \rightarrow \det(1 + \alpha M) \simeq e^{\text{tr} \alpha M}$  を用いると,

$$\begin{aligned} (\det M)^{-2} &= \left[ \det \left( \delta_{mn} + \int d^4x i\alpha(x)\phi_m^\dagger(x)\gamma_5\phi_n(x) \right) \right]^{-2} \\ &\simeq \exp \left( -2 \text{tr} \int d^4x i\alpha(x)\phi_m^\dagger(x)\gamma_5\phi_n(x) \right) \\ &= \exp \left( -2i \int d^4x \alpha(x) \sum_n \phi_n^\dagger(x)\gamma_5\phi_n(x) \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

が得られる. ここで, 指数関数の中のある  $n$  についてのトレース和  $\sum_n$  を

$$\mathcal{A}(x) := \sum_n \phi_n^\dagger(x)\gamma_5\phi_n(x) \quad (2.78)$$

と置く. このとき, 分配関数 (2.61) は局所的無限小変換 (2.62) の下で次のようになる :

$$\begin{aligned} &\int \prod_n da_n \bar{b}_n \exp \left( \int d^4x \bar{\psi}(x) \mathcal{D}\psi(x) \right) \\ &= \int \prod_n da'_n \bar{b}'_n \left[ 1 - i \int d^4x \alpha(x) (\partial_\mu j_{5\mu}(x) + 2\mathcal{A}(x)) \right] \exp \left( \int d^4x \bar{\psi}(x) \mathcal{D}\psi(x) \right) \end{aligned} \quad (2.79)$$

したがって, Ward-Takahashi 恒等式は次式で与えられる :

$$\partial_\mu \langle j_{5\mu}(x) \rangle = \langle 2\mathcal{A}(x) \rangle \quad (2.80)$$

したがって, 量子論において古典的なカイラルカレントの保存則は破れている. このようなカイラルカレントの保存則の破れはカイラルアノマリーと呼ばれる. カイラルアノマリーは  $\mathcal{A}(x)$  を通じて, トポロジーと関係する. 以下でこれを明らかにするために,  $\mathcal{A}(x)$  は2つの方法によって評価される.

<sup>\*7</sup> Grassmann 変数  $\eta$  に対する積分は  $\int d\eta\eta = 1$  であるから, 任意の  $c \in \mathbb{R}$  に対する変数変換  $\eta' = c\eta$  をしても当然  $\int d\eta'\eta' = \int d(c\eta)c\eta = 1$  が成り立つ. したがって, 積分測度は  $d\eta' = d(c\eta) = c^{-1}d\eta$  でなければならない.

1つ目の方法として、私たちは  $\mathcal{D}$  の固有状態を評価する。元々  $\alpha(x)$  はカレントを導出するために  $x^\mu$  依存性を持たせたので、以後  $\alpha(x)$  が  $x$  によらない定数であると考えて、

$$\int d^4x \mathcal{A}(x) = \int d^4x \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) \quad (2.81)$$

を評価する。(2.69) から、ノンゼロモードはすべて直交し、ゼロモードのみが寄与するので、

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{A}(x) &= \int d^4x \sum_n \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x) \\ &= \int d^4x \left( \sum_{n_+=0}^{N_+} \langle 0, n_+ | \gamma_5 | 0, n_+ \rangle + \sum_{n_-=0}^{N_-} \langle 0, n_- | \gamma_5 | 0, n_- \rangle \right) \\ &= \int d^4x \left( \sum_{n_+=0}^{N_+} \langle 0, n_+ | 0, n_+ \rangle - \sum_{n_-=0}^{N_-} \langle 0, n_- | 0, n_- \rangle \right) = N_+ - N_- \end{aligned} \quad (2.82)$$

が得られる。したがって、 $\int d^4x \mathcal{A}(x)$  はカイラリティ  $+1$  と  $-1$  のゼロモード数の差で表現され、Dirac 演算子の指数 ( $\text{ind}(\mathcal{D})$ ) と呼ばれる。

2つ目の方法として、私たちは (2.78) を熱核の方法で評価する。(2.78) の和はそのままでは発散するので、Gauss 型のカットオフ  $\Lambda$  による正則化を行う。固有関数に対する Dirac の記法  $\phi_n(x) = \langle x | n \rangle$  を導入すると、次のようになる：

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n \langle n | x \rangle \gamma_5 \exp(-\lambda_n^2 / \Lambda^2) \langle x | n \rangle \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \sum_n \langle n | x \rangle \langle x | \gamma_5 \exp(\mathcal{D}^2 / \Lambda^2) | n \rangle \end{aligned}$$

次に平面波基底  $|k\rangle$  を導入し、 $\mathbf{1} = \int (d^4k / (2\pi)^4) |k\rangle \langle k|$  を挟むと、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \sum_n \langle n | k \rangle \langle k | x \rangle \gamma_5 \exp(\mathcal{D}^2 / \Lambda^2) \langle x | k' \rangle \langle k' | n \rangle \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \sum_n \langle n | k \rangle e^{-iky} \gamma_5 \exp(\mathcal{D}^2 / \Lambda^2) e^{ik'x} \langle k' | n \rangle \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma_5 e^{-ikx} \exp(\mathcal{D}^2 / \Lambda^2) e^{ikx} \right] \end{aligned}$$

が得られる。ここで、完全性関係：

$$\sum_n \langle n | k \rangle \langle k' | n \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k' - k) \quad (2.83)$$

を用いている。 $\mathcal{D}^2$  は次のように書き換えられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2 &= \gamma_\mu \gamma_\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) + \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu (D_\mu D_\nu + D_\nu D_\mu) \\ &= \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] [D_\mu, D_\nu] + \frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} D_\mu D_\nu \\ &= \frac{ig}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} + D_\mu D_\mu \end{aligned} \quad (2.84)$$

ここで, (1.3) と (2.39) を用いている.  $e^{ikx}$  によって, 微分が  $\partial_\mu \rightarrow ik_\mu$  と置き換わるので,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma_5 e^{-ikx} \exp \left( \frac{1}{\Lambda^2} \left\{ \frac{ig}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} + D_\mu D_\mu \right\} \right) e^{ikx} \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[ \gamma_5 \exp \left( \frac{1}{\Lambda^2} \left\{ \frac{ig}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} + (ik_\mu + iA_\mu)^2 \right\} \right) \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \Lambda^4 \text{tr} \left[ \gamma_5 \exp \left( \frac{1}{\Lambda^2} \frac{ig}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} - \tilde{k}_\mu \tilde{k}_\mu - \frac{2\tilde{k}_\mu A_\mu}{\Lambda} - \frac{A_\mu A_\mu}{\Lambda^2} \right) \right]\end{aligned}$$

が得られる. 第3行目において,  $\tilde{k}_\mu = k_\mu/\Lambda$  のようなスケール変換を実行している. 指数関数を  $-\tilde{k}_\mu \tilde{k}_\mu$  のまわりで展開すると,

$$\begin{aligned}& \exp \left( \frac{1}{\Lambda^2} \frac{ig}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} - \tilde{k}_\mu \tilde{k}_\mu - \frac{2\tilde{k}_\mu A_\mu}{\Lambda} - \frac{A_\mu A_\mu}{\Lambda^2} \right) \\ &= e^{-\tilde{k}_\mu \tilde{k}_\mu} \left[ 1 + \left( \frac{ig}{4\Lambda^2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} - \frac{2\tilde{k}_\mu A_\mu}{\Lambda} - \frac{A_\mu A_\mu}{\Lambda^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2!} \left( \frac{ig}{4\Lambda^2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} - \frac{2\tilde{k}_\mu A_\mu}{\Lambda} - \frac{A_\mu A_\mu}{\Lambda^2} \right)^2 + \dots \right]\end{aligned}$$

が得られる. このうち,  $\gamma_5$  を掛けて  $\gamma$  行列に対するトレースをとって残る項は  $\gamma^\mu$  が4つ以上存在する項である. さらに,  $\Lambda \rightarrow \infty$  の極限で生き残る項は  $([\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu})^2$  を含む項のみである:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \text{tr} \left[ \gamma_5 \frac{1}{2!} \left( \frac{ig}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F_{\mu\nu} \right)^2 \right] \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} e^{-\tilde{k}_\mu \tilde{k}_\mu} \\ &= \frac{-g^2}{32} \text{tr} (\gamma_5 [\gamma_\mu, \gamma_\nu] [\gamma_\rho, \gamma_\sigma] F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) \int_0^\infty \frac{d|\tilde{k}|}{(2\pi)^4} 2\pi^2 |\tilde{k}|^3 e^{-|\tilde{k}|^2} \\ &= \frac{g^2}{32\pi^2} \text{tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\end{aligned}\tag{2.85}$$

ここで,  $\gamma$  行列のトレース公式:  $\text{tr} (\gamma_5 [\gamma_\mu, \gamma_\nu] [\gamma_\rho, \gamma_\sigma]) = -16 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  を用いている.

以上の  $\mathcal{A}(x)$  の計算を通じて, 2つの重要な関係式が得られる. まず, (2.64) におけるカレントの形が修正される. (2.85) は全微分の形:

$$\begin{aligned}2\mathcal{A}(x) &= \frac{g^2}{16\pi^2} \text{tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\ &= \partial_\mu \left( \frac{g^2}{8\pi^2} \text{tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (A_\nu \partial_\rho A_\sigma + \frac{2}{3} ig A_\nu A_\rho A_\sigma) \right) := \partial_\mu K_\mu(x)\end{aligned}$$

で書くことができるので, カレント  $j_{5\mu}(x)$  は次のようになる:

$$j_{5\mu}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) - \frac{g^2}{8\pi^2} \text{tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (A_\nu(x) \partial_\rho A_\sigma(x) + \frac{2}{3} ig A_\nu(x) A_\rho(x) A_\sigma(x))\tag{2.86}$$

$K_\mu(x)$  の形は Chern–Simons 形式として知られている．次に，数学においてよく知られる指数定理が導かれる．準備としてヤコビアン  $\mathcal{J}$  に対し，結合定数  $g$  を  $F_{\mu\nu}$  に吸収させたものを考える： $gF_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}$ ．ヤコビアン  $\mathcal{J}$  は (2.82) と (2.85) から次式のようになる：

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \exp\left(-2i\alpha \int d^4x \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\right) = \exp(-2i\alpha (N_+ - N_-)) \\ &\iff \int d^4x \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = N_+ - N_- \end{aligned} \quad (2.87)$$

この関係式は Atiyah–Singer の指数定理として知られている．(2.87) の右辺は Dirac 演算子のカイラリティ  $+1$  と  $-1$  のゼロモード数の差という飛び飛びな整数量であることに対して，左辺はゲージ場によって構成される連続的な量である．この事実を，ゲージ場の連続的な変化の下で値が変化しないトポロジカル不変量の存在を主張している．左辺のトポロジカル不変量はトポロジカルチャージ  $\nu := \int d^4x \frac{1}{32\pi^2} \text{tr} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$  と呼ばれる．トポロジカルチャージは  $N_+$  と  $N_-$  の差で決まるため，個別のゼロモード数はトポロジーによって保護されないが，ゲージ場の微小な変形に伴う偶然のゼロモードは取り除かれるはずである．したがって，一般に  $N_+ = 0$  または  $N_- = 0$  のどちらかをとれば便利である．もし， $N_+ = N_-$  が成り立てば， $\nu = 0$  となるので，ヤコビアンは 1 であり，アノマリーは生じない．ゆえに，カイラル対称性  $U(1)_V \times U(1)_A$  が量子論でも成り立つことになる．

### Dirac 演算子の行列構造

前節において Dirac 演算子の固有状態を用いて指数定理を導出した．本節では Dirac 演算子を固有空間における行列とみなしたときの行列構造を与える．まず簡単のため，Dirac 演算子の固有状態は非ゼロモードのみを考える．有限体積  $V$  において，固有値は  $2n$  個存在し，対応する固有関数は  $2n$  成分の固有ベクトルとなる．カイラル表現において， $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  のブロック構造を持っているから， $\mathcal{D}$  も同様のブロック構造を持っている．ただし，ここでの単位行列は  $n \times n$  行列である．実際に，(2.53) の反交換関係から， $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  と置き， $A, B, C, D$  が一般の  $n \times n$  複素行列とすると，

$$\{\gamma_5, \mathcal{D}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & -2D \end{pmatrix} = 0$$

が得られ， $A = D = 0$  が成り立つ．このとき，固有ベクトルは (1.12) と同様に，カイラリティ  $+1$  と  $-1$  の符号によって，上半分と下半分に分解される．固有関数  $\phi_k$  と  $\gamma_5 \phi_k$  に対応する固有ベクトルはそれぞれ次のように表現できる：

$$|\phi, k\rangle = \begin{pmatrix} |\phi^+, k_+\rangle \\ |\phi^-, k_-\rangle \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 |\phi, k\rangle = \begin{pmatrix} |\phi^+, k_+\rangle \\ -|\phi^-, k_-\rangle \end{pmatrix}$$



ここで,  $k_+ = 1, 2, \dots, n$ ,  $k_- = n+1, n+2, \dots, 2n$  である. これらの固有ベクトルを用いたときの  $\mathcal{D}$  の固有値はそれぞれ

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} |\phi^+, k_+\rangle \\ |\phi^-, k_-\rangle \end{pmatrix} = i\lambda_k \begin{pmatrix} |\phi^+, k_+\rangle \\ |\phi^-, k_-\rangle \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} \begin{pmatrix} |\phi^+, k_+\rangle \\ -|\phi^-, k_-\rangle \end{pmatrix} = -i\lambda_k \begin{pmatrix} |\phi^+, k_+\rangle \\ -|\phi^-, k_-\rangle \end{pmatrix}$$

となる. さらに, Dirac 演算子の反エルミート性を用いると,

$$\mathcal{D}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & C^\dagger \\ B^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ -C & 0 \end{pmatrix} = -\mathcal{D}$$

が成り立つので,  $B^\dagger = -C$ ,  $C^\dagger = -B$  が得られる. よって,  $B = iW$  と置くと,  $C = iW^\dagger$  と表現できる. したがって, 非ゼロモードに対する Dirac 演算子の行列構造は

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & iW \\ iW^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

と表現できる. ただし,  $W$  は  $n \times n$  複素行列である. このような非対角ブロック構造はカイラル対称性 (2.53) を有する系の特徴である.

ここまで Dirac 演算子にゼロモードが存在しない場合を仮定した. 一般的に, Dirac 演算子は Atiyah–Singer の指数定理に従ってゼロモードを含んでいる. ゼロモードを含むためには, 例えば,  $n \times n$  の正方行列  $W$  を  $(n+\nu) \times n$  長方形行列に置き換えればよい. このとき, Dirac 演算子はカイラリティ  $+1$  のモードが  $(n+\nu)$  個, カイラリティ  $-1$  のモードが  $n$  個存在し,  $\nu$  個のゼロモードを含んでいる. このような行列の詳細は第 5 章において扱うが, ゼロモードは  $W$  の特異値分解から生じる. この事実はカイラルランダム行列の固有値を求めるときに用いられる.

## 2.2.2 フレーバー対称性

2 つ目の大域的対称性としてフレーバー対称性を考える. フレーバー対称性は 2.2.1 節において扱ったカイラル変換をフレーバーの添え字を持つように拡張したフレーバー変換の下での不変性のことを表す. フェルミオン作用 (カラーの添え字を省略したもの) は右巻きおよび左巻き場で書き下すと次のようになる:

$$\begin{aligned} S_F &= \int d^4x \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f(x) (\mathcal{D} + m_f) \psi^f(x) \\ &= \int d^4x \sum_{f=1}^{N_f} \left( \bar{\psi}_R^f \mathcal{D} \psi_R^f + \bar{\psi}_L^f \mathcal{D} \psi_L^f + \bar{\psi}_R^f m_f \psi_L^f + \bar{\psi}_L^f m_f \psi_R^f \right) \end{aligned} \quad (2.89)$$

このときフレーバー変換は次式で定義される:

$$\begin{aligned} \psi_R^f &\rightarrow \psi_R^{\prime f} = U_R^{fg} \psi_R^g = [e^{i\theta_R^a t^a}]^{fg} \psi_R^g, & \bar{\psi}_R^f &\rightarrow \bar{\psi}_R^{\prime f} = \bar{\psi}_R^g (U_R^{fg})^\dagger \\ \psi_L^f &\rightarrow \psi_L^{\prime f} = U_L^{fg} \psi_L^g = [e^{i\theta_L^a t^a}]^{fg} \psi_L^g, & \bar{\psi}_L^f &\rightarrow \bar{\psi}_L^{\prime f} = \bar{\psi}_L^g (U_L^{fg})^\dagger \end{aligned} \quad (2.90)$$

ここで、 $U_R \in \text{SU}(N_f)_R$ ,  $U_L \in \text{SU}(N_f)_L$  であり\*8,  $t^a$  は  $\text{SU}(N_f)$  の生成子,  $\theta_R^a, \theta_L^a \in \mathbb{R}$  はそれぞれのフレーバー群の変換パラメータである. もしクォークが無質量ならば, フェルミオン作用 (2.89) はフレーバー変換 (2.90) の下で不変であり,  $S_F$  はフレーバー対称性  $\text{SU}(N_f)_R \times \text{SU}(N_f)_L$  を持っている. フレーバー対称性は右巻きおよび左巻き場をそれぞれ独立にフレーバー群の下で回転させても不変であることを意味する. カイラル変換は (2.90) から  $\text{SU}(N_f)$  の生成子を単位行列に置き換えた場合に対応する. したがって, 生成子の線形結合に単位行列を加えれば, 同時にカイラル変換も考えられる. このような対称性は  $\text{SU}(N_f)_R \times \text{SU}(N_f)_L \times \text{U}(1)_R \times \text{U}(1)_L$  と表現され, カイラル・フレーバー対称性または単にカイラル対称性と呼ばれる. 2.2.1 節におけるカイラル対称性は  $N_f = 1$  のフレーバー対称性である.

フレーバー変換は 2.2.1 節と同様に, 軸性フレーバー変換 ( $\text{SU}(N_f)_A$ ) とベクトルフレーバー変換 ( $\text{SU}(N_f)_V$ ) に書き換え可能である.  $\text{SU}(N_f)_A$  変換は  $\theta_V^a := \theta_R^a = -\theta_L^a$  のとき,

$$\psi^f \rightarrow \psi'^f = (e^{i\theta_A^a t^a \gamma_5})^f g \psi^g, \quad \bar{\psi}^f \rightarrow \bar{\psi}'^f = \bar{\psi}^g (e^{i\theta_A^a t^a \gamma_5})^g f \quad (2.91)$$

で表され,  $\text{SU}(N_f)_V$  変換は  $\theta_A^a := \theta_R^a = \theta_L^a$  のとき,

$$\psi^f \rightarrow \psi'^f = (e^{i\theta_V^a t^a})^f g \psi^g, \quad \bar{\psi}^f \rightarrow \bar{\psi}'^f = \bar{\psi}^g (e^{-i\theta_V^a t^a})^g f \quad (2.92)$$

で表される. よって, クォークが無質量ならば, フレーバー対称性は  $\text{SU}(N_f)_V \times \text{SU}(N_f)_A$  という表現もできる. クォーク質量が  $m_f \neq 0$  であるならば, 当然  $\text{SU}(N_f)_V \times \text{SU}(N_f)_A$  は明確に破れる. ここではその破れ方を調べるために, クォーク質量が縮退 ( $m_q = m_1 = \dots = m_{N_f}$ ) している場合を考える. このときフェルミオン作用 (2.89) は次のように書ける:

$$S_F = \int d^4x \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f(x) (\not{D} + m_q) \psi^f(x) \quad (2.93)$$

まず,  $\text{SU}(N_f)_V$  変換の下で (2.93) は変換行列が  $(\not{D} + m_q)$  をすり抜けるから不変である. 一方,  $\text{SU}(N_f)_A$  変換の下では質量項のために不変でなくなる. したがって, 質量項の存在によってフレーバー対称性は  $\text{SU}(N_f)_V \times \text{SU}(N_f)_A \rightarrow \text{SU}(N_f)_V$  のように破られる. クォーク質量が縮退していない場合はさらに  $\text{SU}(N_f)_V$  も破られる.

ここまではフェルミオン作用に対するフレーバー対称性を考えた. しかし重要なことはフレーバー対称性が量子効果の下で保たれるのかということである. 多くの格子 QCD シミュレーションや現象論的研究から, QCD の真空ではフレーバー対称性のうち  $\text{SU}(N_f)_A$  対称性が自発的に破られることが知られている. このような現象は一般にカイラル対称性の自発的破れと呼ばれる. 実際,  $\text{SU}(N_f)_A$  対称性は期待値  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R \rangle$  (カイラル凝縮と呼ぶ) がゼロでない値を持つことで破られる.  $\bar{\psi}\psi$  は作用における質量項に相当するので,  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  であれば  $\text{SU}(N_f)_A$  対称性は破られる. 通常の摂動論では, フェルミオン作用 (2.89) が  $m_f = 0$  のときはフレーバー対

\*8 注意: フレーバー群の変換行列としてゲージ群の変換行列と同じ  $U$  という文字を使用しているが, 全く異なる群の変換行列である. ゲージ群は  $\text{SU}(N_c)$  で表し, フレーバー群は  $\text{SU}(N_f)$  で表す.

称性を持っているため、QCD の真空は  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$  であり、ゼロでない値が生じることはない。しかし、 $\Lambda_{\text{QCD}}$  以下のエネルギースケールでは非摂動的効果が強まるために  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  となり、質量項に相当する量が得られる。物理的な描像として、QCD の低エネルギーにおいてクォークは単体では存在せず、陽子や  $\pi$  中間子などのハドロンとして存在する。すなわち、QCD の低エネルギーにおける最小単位は、ハドロンで最も軽い  $\pi$  中間子ということになる。その次に重いハドロン ( $\rho$  中間子や陽子など) の質量 ( $\mathcal{O}(1\text{GeV})$ ) が  $\pi$  中間子の質量 ( $\mathcal{O}(140\text{MeV})$ ) よりもずっと重い理由として、これらの質量が非摂動的効果によって生じたカイラル凝縮  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  から得られたと考えられている。しかし、実際のクォークには質量が存在する。  $u, d$  クォークの質量  $\mathcal{O}(1\text{MeV})$  はハドロン質量  $\mathcal{O}(1\text{GeV})$  と比べるとずっと小さいため、近似的なカイラル対称性が自発的に破られると考えられている。2.3 節ではカイラル凝縮の定量的な評価方法を議論する。

$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  のとき、 $\text{SU}(N_f)_A$  対称性は最大に破られる一方で  $\text{SU}(N_f)_V$  対称性は唯一生き残る。実際に、 $\text{SU}(N_f)_V$  対称性が自発的に破られないことは、Vafa–Witten の定理 [59] によって保証されている。一方で、 $\text{SU}(N_f)_A$  対称性が最大に破られる [60–62] 詳細なメカニズムはあまりよく理解されていない。

フレーバー対称性はフレーバー群  $G = \text{SU}(N_f)_V \times \text{SU}(N_f)_A$  によって表現される。 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  のとき、フレーバー対称性が自発的に破れ、 $H = \text{SU}(N_f)_V$  が残る。このとき、破られたフレーバー群  $G/H = (\text{SU}(N_f)_V \times \text{SU}(N_f)_A)/\text{SU}(N_f)_A$  は Nambu–Goldstone 多様体と呼ばれる。このとき生じる Nambu–Goldstone ボゾンの数は  $N_f^2 - 1$  個である。物理的には  $G/H$  から生じる Nambu–Goldstone ボゾンは  $\pi$  中間子と同定される。破れたフレーバー群  $G/H$  を記述するための理論の詳細は第 3 章で議論する。

### 2.2.3 反ユニタリー対称性

3 つ目の大域的対称性として、Dirac 演算子の反ユニタリー対称性を考える。前節まではユニタリー変換の下での対称性を議論した。しかし量子力学における対称性として反ユニタリー変換も議論できる。具体的には時間反転対称性がそれに対応する。もし、Dirac 演算子  $\mathcal{D}$  が時間反転対称性を持っているならば、時間反転演算子 (反ユニタリー演算子) を  $\mathcal{T}$  とすると、

$$[\mathcal{T}, \mathcal{D}] = 0 \tag{2.94}$$

が成り立つ。反ユニタリー演算子  $\mathcal{T}$  はユニタリー演算子  $U$  と複素共役演算子  $K$  を用いて、 $\mathcal{T} = UK$  と定義される。反ユニタリー演算子  $\mathcal{T}$  の性質を調べるため、以下ではユニタリー対称性の規約部分空間の固有スペクトルを考える。まず、 $\mathcal{T}^2$  を考えると、

$$\mathcal{T}^2 = UKUK = UU^*K^2 = UU^* \tag{2.95}$$

となるので、 $\mathcal{T}^2$  はユニタリー演算子である。すなわち反ユニタリー演算子の 2 乗はユニタリー演算子になる。 $\mathcal{T}^2$  は規約部分空間において必ず単位行列の定数倍になる：

$$\mathcal{T}^2 = UU^* = \lambda \mathbf{1} \tag{2.96}$$

$UU^* = \lambda \mathbf{1}$  の両辺に左から  $U^\dagger$ , 右から  $U$  を掛けると,

$$U^\dagger UU^* U = U^\dagger \lambda \mathbf{1} U \iff U^* U = \lambda \mathbf{1} \quad (2.97)$$

となるから,  $U$  と  $U^*$  は交換する. よって, (2.95) の両辺に複素共役をとると,

$$U^* U = \lambda^* \mathbf{1} \iff (\lambda - \lambda^*) \mathbf{1} = 0 \iff \lambda = \lambda^* \quad (2.98)$$

となるので,  $\mathcal{T}^2$  の固有値は実数である ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).  $\mathcal{T}^2$  はユニタリー演算子であるから,

$$\mathcal{T}^2 (\mathcal{T}^2)^\dagger = \mathbf{1} \iff \lambda \mathbf{1} \lambda^* \mathbf{1} = \mathbf{1} \iff |\lambda|^2 = 1 \iff \lambda = \pm 1 \quad (2.99)$$

となり,  $\mathcal{T}^2$  の固有値は  $\pm 1$  である. したがって, 固有値の符号によって固有空間が  $\mathcal{T}^2 = \pm \mathbf{1}$  のように分解でき, 反ユニタリー対称性が  $\mathcal{T}^2$  の符号で分類できることを意味する. Dirac 演算子  $\mathcal{D}$  に対して, 次の 3 つの分類が考えられる:

- (a)  $[\mathcal{T}, \mathcal{D}] \neq 0$   $(\beta = 2)$
- (b)  $[\mathcal{T}, \mathcal{D}] = 0, \mathcal{T}^2 = \mathbf{1}$   $(\beta = 1)$
- (c)  $[\mathcal{T}, \mathcal{D}] = 0, \mathcal{T}^2 = -\mathbf{1}$   $(\beta = 4)$

ここで,  $\beta$  は Dyson 指数と呼ばれ, エルミート (または反エルミート) 演算子の分類の指標に使用される. 詳細は第 5 章で述べるが, これら 3 つの Dyson 指数はランダム行列の分類に由来し, (2.88) における  $W$  の行列要素が実数 ( $\beta = 1$ ), 複素数 ( $\beta = 2$ ), および実四元数 ( $\beta = 4$ ) であることを意味する. Dirac 演算子  $\mathcal{D}_{ij} = \gamma_\mu (\partial_\mu + iA_\mu^a(x)(T^a)_{ij})$  は (2.49) において述べたように, リー代数  $(T^a)_{ij}$  の表現に依存する. QCD の Dirac 演算子はゲージ群  $SU(N_c)$  のカラー数とそのゲージ群の表現 (基本または随伴) によって分類される. 以下では 3 つの場合における反ユニタリー演算子の具体的な形を調べる [24, 25]:

- (a)  $\beta = 2$ :

Dirac 演算子は反ユニタリー対称性を持っていない. 対応するクォークは  $SU(N_c \geq 3)$  ゲージ群の基本表現におけるフェルミオンである. すなわち, 標準模型における  $N_c = 3$  の QCD はこのタイプに属する. (2.88) における  $W$  がそれ以上対称性を持っていない一般の複素行列であることを意味する.

- (b)  $\beta = 1$ :

Dirac 演算子は反ユニタリー対称性を持っている:  $[\mathcal{T}, \mathcal{D}] = 0$ . 対応するクォークは  $N_c = 2$  の基本表現におけるフェルミオンである.  $N_c = 2$  の QCD は 2-color QCD と呼ばれる. リー代数の基本表現は  $(T^a)_{ij} = (\tau^a)_{ij}/2$  であり,  $\tau^a$  はカラー空間における Pauli 行列である ( $\gamma$  行列のカイラル表現 (1.5) における  $\sigma_k$  との違いに注意).  $SU(2)_{\text{CF}}$  の Dirac 演算子は次のように書くことができる ( $c$  はカラー,  $F$  は基本表現を意味する):

$$(\mathcal{D}_1)_{ij} = \gamma_\mu (\partial_\mu \delta_{ij} + iA_\mu^a \frac{(\tau^a)_{ij}}{2}), \quad a = 1, 2, 3, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.100)$$

まず,  $\mathcal{T}^2 = +\mathbf{1}$  を満たす反ユニタリ演算子を  $\mathcal{T}_1 := C\gamma_5\tau^2K$  と定める. ここで,  $C = \gamma_2\gamma_4$  は荷電共役演算子である.  $(\mathcal{T}_1)^2$  を計算すると,

$$\begin{aligned} (C\gamma_5\tau^2K)^2 &= C\gamma_5\tau^2KC\gamma_5\tau^2K = C\gamma_5\tau^2C^*\gamma_5(\tau^2)^*K^2 = -C\gamma_5C^*\gamma_5 \\ &= -\gamma_2\gamma_4\gamma_5(\gamma_2)^*(\gamma_4)^*\gamma_5 = (\gamma_2)^2(\gamma_4)^2(\gamma_5)^2 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

となり,  $(\mathcal{T}_1)^2 = +\mathbf{1}$  を満たす. ここで,  $(\tau^2)^* = -\tau^2$ , (1.5) から  $(\gamma_2)^* = \gamma_2$ ,  $(\gamma_4)^* = \gamma_4$ ,  $(\gamma^\mu)^2 = \mathbf{1}$ , (1.3) および (1.8) を用いている. したがって, 反ユニタリ対称性は

$$[\mathcal{T}_1, \mathcal{D}_1] = [C\gamma_5\tau^2K, \mathcal{D}_1] = 0 \quad (2.101)$$

と表される. この交換関係が成り立つことは以下で確認される.

$$[C\gamma_5\tau^2K, \mathcal{D}_1] = 0 \quad \iff \quad C\gamma_5\tau^2K\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1C\gamma_5\tau^2K$$

両辺に右から  $K^{-1}\tau^2\gamma_5C^{-1}$  を掛けると,

$$C\gamma_5\tau^2K\mathcal{D}_1K^{-1}\tau^2\gamma_5C^{-1} = \mathcal{D}_1 \quad \iff \quad C\gamma_5\tau^2(\mathcal{D}_1)^*\tau^2\gamma_5C^{-1} = \mathcal{D}_1$$

となる. ここで,  $K\mathcal{D}_1K^{-1} = (\mathcal{D}_1)^*$  となることを用いている. さらに左辺は

$$\begin{aligned} C\gamma_5\tau^2(\mathcal{D}_1)^*\tau^2\gamma_5C^{-1} &= C\gamma_5\tau^2(\gamma_\mu)^* \left( \partial_\mu - iA_\mu^a \frac{(\tau^a)^*}{2} \right) \tau^2\gamma_5C^{-1} \\ &= C\gamma_5(\gamma_\mu)^*\gamma_5C^{-1} \left( \partial_\mu - \frac{i}{2}\tau^2A_\mu^a(\tau^a)^*\tau^2 \right) \\ &= \gamma_\mu \left( \partial_\mu + iA_\mu^a \frac{\tau^2}{2} \right) = \mathcal{D}_1 \end{aligned} \quad (2.102)$$

と変形できる. ここで,  $\tau^2A_\mu^a(\tau^a)^*\tau^2$  の計算は Pauli 行列の反交換関係を用いると,

$$\begin{aligned} \tau^2A_\mu^a(\tau^a)^*\tau^2 &= \tau^2(A_\mu^1(\tau^1)^* + A_\mu^2(\tau^2)^* + A_\mu^3(\tau^3)^*)\tau^2 \\ &= \tau^2(A_\mu^1\tau^1 - A_\mu^2\tau^2 + A_\mu^3\tau^3)\tau^2 = -A_\mu^1\tau^1 - A_\mu^2\tau^2 - A_\mu^3\tau^3 \\ &= -A_\mu^a\tau_a \end{aligned}$$

となり,  $SU(2)_{\text{cF}}$  の擬実性

$$-\left(\frac{\tau^a}{2}\right)^* = \tau^2\frac{\tau^a}{2}\tau^2 \quad (2.103)$$

を反映している.  $C\gamma_5(\gamma_\mu)^*\gamma_5C^{-1}$  の計算は  $\gamma$  行列の複素共役が

$$(\gamma_\mu)^* = \begin{cases} \gamma_\mu, & \mu = 2, 4 \\ -\gamma_\mu, & \mu = 1, 3 \end{cases}$$

であることと,  $(\gamma_\mu)^2 = \mathbf{1}$  から従う  $(\gamma_\mu)^{-1} = \gamma_\mu$ , (1.3) および (1.8) を用いると,

$$C\gamma_5(\gamma_\mu)^*\gamma_5C^{-1} = \gamma_2\gamma_4\gamma_5 \begin{Bmatrix} \gamma_{2,4} \\ -\gamma_{1,3} \end{Bmatrix} \gamma_5\gamma_4\gamma_2 = \gamma_\mu$$

となることを用いている。したがって、(2.101) が成り立つことを確認できた。

$\beta = 1$  の場合、すべてのゲージ場に対して、(2.88) における行列  $W$  が実行列であるような基底をとることができる。ユニタリ行列  $U$  に対して、 $UU^* = \mathbf{1}$  が成り立っているから、 ${}^T U = U$ 、すなわち  $U$  はユニタリーかつ対称な行列である。そのような  $U$  は新たな基底  $V$  を用いて、 $U = V {}^T V$  と表現できる。この  $U$  を  $[UK, \mathcal{D}_1] = 0$  から得られる  $(\mathcal{D}_1)^* = U^\dagger \mathcal{D}_1 U$  に代入すると、 $(V^\dagger \mathcal{D}_1 V)^* = V^\dagger \mathcal{D}_1 V$  となる。よって、 $W$  は実行列にとることができる。

(c)  $\beta = 4$  :

Dirac 演算子は反ユニタリー対称性を持っている： $[\mathcal{T}, \mathcal{D}] = 0$ 。対応するクォークは任意の  $N_c$  における随伴表現のフェルミオンである。リー代数の随伴表現は  $(T^a)_{bc} = -if_{bc}^a = -if^{abc}$  であり、 $f^{abc}$  はリー代数の構造定数である。 $SU(N_c)_{\text{Ad}}$  の Dirac 演算子は次のように書くことができる（Ad は随伴表現を意味する）：

$$(\mathcal{D}_4)_{ab} = \gamma_\mu (\partial_\mu \delta_{ab} + f^{abc} A_\mu^c) \quad (2.104)$$

まず、 $\mathcal{T}^2 = -\mathbf{1}$  を満たす反ユニタリー演算子を  $\mathcal{T}_4 := C\gamma_5 K$  と定める。ここで、 $C = \gamma_2 \gamma_4$  である。 $(\mathcal{T}_4)^2$  を計算すると、

$$\begin{aligned} (C\gamma_5 K)^2 &= C\gamma_5 K C\gamma_5 K = C\gamma_5 C^* (\gamma_5)^* K^2 = C\gamma_5 C^* \gamma_5 \\ &= \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_2 \gamma_4 \gamma_5 = -(\gamma_2)^2 (\gamma_4)^2 (\gamma_5)^2 = -\mathbf{1} \end{aligned}$$

となり、 $(\mathcal{T}_4)^2 = -\mathbf{1}$  を満たす。したがって、反ユニタリー対称性は

$$[\mathcal{T}_4, \mathcal{D}_4] = [C\gamma_5 K, \mathcal{D}_4] = 0 \quad (2.105)$$

と表される。 $\beta = 1$  の場合と同様に、この交換関係が成り立つことは以下で確認される。

$$[C\gamma_5 K, \mathcal{D}_4] = 0 \quad \iff \quad C\gamma_5 K \mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_4 C\gamma_5 K$$

両辺に右から  $K^{-1} \gamma_5 C^{-1}$  を掛けると、

$$C\gamma_5 K \mathcal{D}_4 K^{-1} \gamma_5 C^{-1} = \mathcal{D}_4 \quad \iff \quad C\gamma_5 (\mathcal{D}_4)^* \gamma_5 C^{-1} = \mathcal{D}_4$$

となる。ここで、 $K \mathcal{D}_4 K^{-1} = (\mathcal{D}_4)^*$  となることを用いた。さらに左辺は

$$\begin{aligned} C\gamma_5 (\mathcal{D}_4)^* \gamma_5 C^{-1} &= C\gamma_5 (\gamma_\mu)^* (\partial_\mu \delta_{ab} + (f^{abc})^* A_\mu^c) \gamma_5 C^{-1} \\ &= C\gamma_5 (\gamma_\mu)^* \gamma_5 C^{-1} (\partial_\mu \delta_{ab} + f^{abc} A_\mu^c) \\ &= \gamma_\mu (\partial_\mu \delta_{ab} + f^{abc} A_\mu^c) \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、(2.105) が成り立つことを確認できた。

$\beta = 4$  の場合の特徴として、 $\mathcal{T}_4 = -\mathbf{1}$  のために、Dirac 演算子の固有値は線形独立な固有関数を持つ 2 重縮退になる（Kramers 縮退）；Dirac 演算子の固有値を  $\lambda$ 、対応する固有状態を  $|\phi\rangle$  とする。(2.105) の交換関係から、

$$\mathcal{D}_4 |\phi\rangle = \lambda |\phi\rangle, \quad \mathcal{D}_4 (\mathcal{T}_4 |\phi\rangle) = \lambda (\mathcal{T}_4 |\phi\rangle)$$

の2式が成り立つので、 $|\phi\rangle$  と  $\mathcal{T}_4|\phi\rangle$  は同時固有状態である。ここで、 $|\phi\rangle$  と  $\mathcal{T}_4|\phi\rangle$  が線形独立でないという仮定すると、 $\mathcal{T}_4$  は反ユニタリー演算子であるから、 $\mathcal{T}_4|\phi\rangle = e^{i\alpha}|\phi\rangle$  と書くことができる ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )。この式に左から  $\mathcal{T}_4$  を掛けると、

$$(\mathcal{T}_4)^2|\phi\rangle = \mathcal{T}_4 e^{i\alpha}|\phi\rangle = e^{-i\alpha}\mathcal{T}_4|\phi\rangle = e^{-i\alpha}e^{i\alpha}|\phi\rangle = +|\phi\rangle$$

が得られる。しかし、実際には  $(\mathcal{T}_4)^2 = -1$  であるから、 $(\mathcal{T}_4)^2|\phi\rangle = -|\phi\rangle$  とならなければならない。よって、線形独立でないという仮定と矛盾し、Dirac 演算子の固有値は線形独立な固有関数を持つ2重縮退になることが示される。この場合、すべてのゲージ場に対して、(2.88)における行列  $W$  の要素が実四元数であるような基底をとることができる。

以上、Dirac 演算子の反ユニタリー対称性を考えることで、QCD が  $SU(N_c)$  ゲージ群のカラー数とそのリー代数の表現によって3種類に分類されることが分かった。この分類は後の章の議論において重要な役割を果たす。第3章ではこの分類によって2.2.2節で述べたカイラル対称性の自発的破れのパターンを推定し、低エネルギー有効理論におけるラグランジアンを決定できることを議論する。第5章ではカイラルランダム行列がこの分類をもとに構成される。

## 2.3 QCD の Dirac スペクトル

本節では2.2.2節で述べたカイラル凝縮の定量的な評価方法として知られる Banks–Casher 関係式を導出する。この関係式は Dirac 演算子の小さい固有値とカイラル対称性の自発的破れの秩序変数であるカイラル凝縮を直接結びつける。ここでは有限体積  $V$  において有限の数の固有値  $\{\lambda_k\}$  を持っている場合を考える（後で熱力学極限をとる）。

カイラル凝縮  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$  はカイラル対称性の自発的破れの秩序変数であり、カイラル対称性が自発的に破れる臨界より低いスケールでのみ  $\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$  である。Banks–Casher 関係式 [15] は次式で与えられる：

$$\Sigma := |\langle\bar{\psi}\psi\rangle| = \frac{\pi\rho(0)}{V} \quad (2.106)$$

ここで、 $\rho$  は固有値密度（スペクトル密度）で、次式で定義される：

$$\rho(\lambda) = \left\langle \sum_k \delta(\lambda - \lambda_k) \right\rangle \quad (2.107)$$

このとき、期待値  $\langle \rangle$  は  $e^{-S_{\text{QCD}}}$  を重みとしてゲージ場について取られる。後で示すように  $\Sigma$  の導出における極限操作は  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \pi\rho(\varepsilon)/V$  の順に取られる。順番を変えると発散が起こりうる。

カイラル凝縮はクォーク質量が縮退している ( $m := m_1 = \dots = m_{N_f}$ ) として、(2.51) から、

$$\begin{aligned} \langle\bar{\psi}\psi\rangle &= - \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{VN_f} \frac{\partial}{\partial m} \log Z^{\text{QCD}}(m) \\ &= - \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{VN_f} \frac{\partial}{\partial m} \log \left( \int \mathcal{D}A_\mu \det^{N_f}(\mathcal{D} + m) e^{-S_{\text{YM}}} \right) \end{aligned} \quad (2.108)$$

で与えられる。クォーク質量  $m$  はフェルミオン行列式にのみ存在する。それを  $m$  で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_f} \frac{\partial}{\partial m} \log (\det^{N_f}(\mathcal{D} + m)) &= \frac{1}{N_f} \frac{\partial}{\partial m} \exp (N_f \operatorname{tr} \log (\mathcal{D} + m)) \\ &= \frac{1}{N_f} N_f \left( \frac{\partial}{\partial m} \operatorname{tr} \log (\mathcal{D} + m) \right) \exp (N_f \operatorname{tr} \log (\mathcal{D} + m)) \\ &= \left( \operatorname{tr} \frac{1}{\mathcal{D} + m} \right) \det^{N_f}(\mathcal{D} + m) \end{aligned}$$

となるので、(2.108) は次のように書くことができる：

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = - \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{V} \operatorname{tr} \frac{1}{\mathcal{D} + m} \right\rangle \quad (2.109)$$

$\mathcal{D}$  の固有値が  $\{i\lambda_k\}$  であることを用いると、(2.109) は固有値を用いて次のように表現できる：

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = - \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{i\lambda_k + m} \right\rangle \quad (2.110)$$

Dirac 演算子の固有値はゼロモードと非ゼロモードを持っているので、それぞれの場合について考える。まず、非ゼロモードの場合は固有値が  $\pm i\lambda$  のペアで現れるから、

$$\frac{1}{V} \sum_k \frac{1}{i\lambda_k + m} = \frac{1}{V} \sum_{\lambda_k > 0} \left( \frac{1}{i\lambda_k + m} + \frac{1}{-i\lambda_k + m} \right) = \frac{1}{V} \sum_{\lambda_k > 0} \frac{2m}{\lambda_k^2 + m^2} \quad (2.111)$$

と表現できる。ゼロモードが存在する場合はトポロジカルチャージ  $\nu \neq 0$  であるから、

$$\frac{1}{V} \sum_{\lambda_k = 0} \frac{1}{i\lambda_k + m} = \frac{1}{V} \sum_{\nu} \frac{1}{m} = \frac{|\nu|}{Vm} \quad (2.112)$$

が得られる。ここで、 $\langle \nu^2 \rangle \propto V$  を仮定すると、次元解析から  $V \rightarrow \infty$  の極限で (2.112) の寄与を落とすことができる。よって、(2.110) は  $V \rightarrow \infty$  の極限において、

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle &= - \lim_{m \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{V} \sum_{\lambda_k > 0} \frac{2m}{\lambda_k^2 + m^2} \right\rangle \\ &= - \lim_{m \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{V} \int_0^\infty d\lambda \sum_k \delta(\lambda - \lambda_k) \frac{2m}{\lambda^2 + m^2} \right\rangle \\ &= - \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_0^\infty d\lambda \rho(\lambda) \frac{2m}{\lambda^2 + m^2} \end{aligned} \quad (2.113)$$

となる。ここで、固有値密度 (2.107) を用いている。被積分関数の  $2m/(\lambda^2 + m^2)$  は  $m \rightarrow 0$  の極限において  $\pi\delta(\lambda)$  に置き換わるので、(2.113) は

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = - \frac{1}{V} \int_0^\infty d\lambda \rho(\lambda) \pi\delta(\lambda) = - \frac{\pi}{V} \rho(0) \quad (2.114)$$



となる。したがって、Banks–Casher 関係式が導出される。カイラル凝縮は Dirac 演算子の固有値のうちゼロ近傍の小さい固有値の密度に比例するため、カイラル対称性の自発的破れは小さい Dirac 固有値の累積に焼き直される。カイラル凝縮が  $\Sigma \neq 0$  のとき、 $\rho(0)/V > 0$  の必要がある。

Banks–Casher 関係式の直接の結果は、ゼロ近傍の小さい固有値の平均間隔  $\Delta$  が

$$\Delta = \frac{1}{\rho(0)} = \frac{\pi}{V\Sigma} \quad (2.115)$$

であることを意味する ( $\Delta$  は平均準位間隔と呼ばれる)。この事実は個別の固有値分布に対する共通のスケール

$$z := \lambda V \Sigma \quad (2.116)$$

を定義できることを意味する。この  $z$  は微視的スケールと呼ばれ、微視的固有値密度

$$\rho_s(z) := \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V\Sigma} \rho\left(\frac{z}{V\Sigma}\right) \quad (2.117)$$

を定義するために便利である。この  $\rho_s(z)$  は Dirac スペクトルの赤外極限を記述し、Dirac 演算子の大域的対称性によって決定されることが期待される。 $\rho_s(z)$  は低エネルギー有効理論とカイラルランダム行列の両方から計算できる量であり、双方の結果が一致することが知られている [23]。

## 第 3 章

# 2-color QCD の低エネルギー有効理論

前章で述べたように, QCD の低エネルギースケールでは量子効果によってカイラル対称性の自発的破れが起こることが知られている. この現象はカイラル・フレーバー群  $U(1)_V \times U(1)_A \times SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$  のうち,  $U(1)_A$  部分群がカイラルアノマリー,  $SU(N_f)_A$  部分群が  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  によって破られ,  $U(1)_V \times SU(N_f)_V$  部分群が破られずに保持されることを意味した. さらに, 2.2.3 節において, Dirac 演算子が反ユニタリー対称性を持っているかどうか, すなわち, 取り得る Dyson 指数の値によって Dirac 演算子の行列構造が異なることを述べた. Dyson 指数の違いはカイラル対称性の自発的破れのパターンの違いにも反映され, 特にフレーバー群  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$  の破れ方に影響する. 最もよく知られた例は  $\beta = 2$  の場合で, 先に述べたような  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \rightarrow SU(N_f)_V$  である.  $\beta = 1, 4$  の場合はこれとは異なり, まずラグランジアン of フレーバー対称性が拡大される. この対称性の拡大現象は 2-color QCD において Pauli–Gürsey 対称性 [63, 64] として知られている. ラグランジアンのフレーバー対称性が拡大されると,  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \rightarrow SU(2N_f)$  となる.  $\beta = 1, 4$  の場合のカイラル対称性の自発的破れは, 拡大されたフレーバー対称性が  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  によって破られる. 各  $\beta$  におけるカイラル対称性の破れのパターンは次のようになることが知られている [65, 66] :

$$\beta = 2: \quad SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \rightarrow SU(N_f)_V \quad (3.1)$$

$$\beta = 1: \quad SU(2N_f) \rightarrow Sp(2N_f) \quad (3.2)$$

$$\beta = 4: \quad SU(2N_f) \rightarrow SO(2N_f) \quad (3.3)$$

本章では本論文において取り扱う  $\beta = 1$  の場合, すなわち基本表現のクォークを持つ 2-color QCD について議論する. 本章の議論は主に Ref. [68] に従っている. 2-color QCD に対する Pauli–Gürsey 対称性とその自発的破れについては 3.1 節で議論する.

カイラル凝縮  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  のとき, カイラル対称性が自発的に破れて, Nambu–Goldstone ボゾン (NG ボゾン) が生じる. 例えば  $\beta = 1$  の場合, 拡大されたフレーバー群  $G = SU(2N_f)$  が自発的に破れて, 部分群  $H = Sp(2N_f)$  が生き残る. このとき破れた対称性  $G/H$  は NG ボゾンに対する厳密な低エネルギーの QCD を記述することができる. この理論は低エネルギー有効理論と呼ばれる [16–21]. そのラグランジアンは非線形  $\sigma$  模型で表現され, カイラル対称性の自発的破れを反映

しているためにカイラルラグランジアンと呼ばれる。カイラルラグランジアンの構成は 3.2 節で議論する。

3.3 節では、3.2 節で導出するカイラルラグランジアンに化学ポテンシャル  $\mu \neq 0$  を含む項を導入する。本論文の主題である第 6 章において議論する  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論における  $U(1)$  の寄与は連続理論において有限密度を取り扱うことに相当する。本論文で直接必要になるのはカイラルラグランジアンであるため、化学ポテンシャルを含む場合については本章で議論する。

### 3.1 Pauli–Gürsey 対称性

本節では 2-color QCD の基本表現における無質量クォークを持つフェルミオンのラグランジアン  $\mathcal{L}_F$  を考える。  $\mathcal{L}_F$  は、(1.7) と (1.12) を用いて表現すると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_F &= \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f \gamma_\nu D_\nu \psi^f = \sum_{f=1}^{N_f} \psi^{\dagger f} \gamma_4 \gamma_\nu D_\nu \psi^f \\
&= \sum_{f=1}^{N_f} (\psi_+^\dagger \quad \psi_-^\dagger)^f \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_\nu^\dagger D_\nu \\ i\sigma_\nu D_\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}^f \\
&= \sum_{f=1}^{N_f} (\psi_+^\dagger \quad \psi_-^\dagger)^f \begin{pmatrix} i\sigma_\nu D_\nu & 0 \\ 0 & -i\sigma_\nu^\dagger D_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}^f \\
&= \sum_{f=1}^{N_f} \left( \psi_+^{\dagger f} i\sigma_\nu D_\nu \psi_+^f - \psi_-^{\dagger f} i\sigma_\nu^\dagger D_\nu \psi_-^f \right) \tag{3.4}
\end{aligned}$$

となる。ここで、  $D_\nu$  は (2.100) から  $D_\nu = \partial_\nu + iA_\nu^a \tau_a / 2$  である。 (3.4) は  $SU(2)_c$  の擬実性を用いることによって、  $\mathcal{L}_F$  のフレーバー対称性  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$  が拡大される。具体的には  $\psi_-$  の共役場  $\tilde{\psi}_+ := \sigma_2 \tau_2 \psi_-^*$  を定義し、  $\tilde{\psi}_+$  が  $\psi_+$  と同じ変換性を持つようにする：

$$\mathcal{L}_F = \sum_{F=1}^{2N_f} (\psi_+^\dagger \quad \tilde{\psi}_+^\dagger)^F \begin{pmatrix} i\sigma_\nu D_\nu & 0 \\ 0 & i\sigma_\nu D_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \tilde{\psi}_+ \end{pmatrix}^F = \sum_{F=1}^{2N_f} \bar{\Psi}^F i\sigma_\nu D_\nu \Psi^F \tag{3.5}$$

ここで、  $\Psi^F$ , ( $F = 1, 2, \dots, 2N_f$ ) は次のように定義される：

$$\Psi^F = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \tilde{\psi}_+ \end{pmatrix}^F = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \sigma_2 \tau_2 \psi_-^* \end{pmatrix}^F \tag{3.6}$$

$\psi_+$  と  $\psi_-$  はもともと独立な Weyl スピノルで、フレーバーについてはそれぞれ独立に  $N_f$  成分持っている。一方で、共役場  $\tilde{\psi}_+$  は  $\psi_+$  と同じ変換性を持つようにしたので、  $\psi_+$  と  $\tilde{\psi}_+$  を直接上下に重ねたスピノル場  $\Psi$  はフレーバーについて  $2N_f$  成分の場になる。 (3.5) は変換

$$\begin{aligned}
\Psi^F &\rightarrow \Psi'^F = V^{FG} \Psi^G, \quad V \in SU(2N_f) \\
(\Psi^\dagger)^F &\rightarrow (\Psi'^\dagger)^F = (\Psi^\dagger V^\dagger)^F \tag{3.7}
\end{aligned}$$

の下で明らかに不変である。したがって、元々のフレーバー対称性が  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \rightarrow SU(2N_f)$  のように拡大されたことになる (Pauli–Gürsey 対称性)。実際に (3.5) が (3.4) と等価であることは次のように確認できる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F &= \bar{\Psi} i\sigma_\nu D_\nu \Psi = (\psi_+^\dagger \quad {}^T\psi_- \tau_2^\dagger \sigma_2^\dagger) \begin{pmatrix} i\sigma_\nu D_\nu & 0 \\ 0 & i\sigma_\nu D_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \sigma_2 \tau_2 \psi_-^* \end{pmatrix} \\ &= \psi_+^\dagger i\sigma_\nu D_\nu \psi_+ + {}^T\psi_- i\sigma_2 \sigma_\nu \sigma_2 \tau_2 D_\nu \tau_2 \psi_-^*\end{aligned}\quad (3.8)$$

第1項の  $\sigma_2 \sigma_\nu \sigma_2$  は Pauli 行列の性質から、

$$\sigma_2 \sigma_\nu \sigma_2 = \sigma_2 \begin{Bmatrix} \sigma_{1,3} \\ \sigma_2 \\ -i\mathbf{1} \end{Bmatrix} \sigma_2 = \begin{Bmatrix} -\sigma_{1,3} \\ \sigma_2 \\ -i\mathbf{1} \end{Bmatrix} = -\sigma_\nu^* \quad (3.9)$$

となり、 $\tau_2 D_\nu \tau_2$  は  $SU(2)$  の擬実性と  ${}^T\partial_\nu = -\partial_\nu$  を用いて、

$$\begin{aligned}\tau_2 D_\nu \tau_2 &= \tau_2 (\partial_\nu + iA_\nu^a \frac{\tau_a}{2}) \tau_2 = \partial_\nu + iA_\nu^a \tau_2 \frac{\tau_a}{2} \tau_2 = \partial_\nu + iA_\nu^a (-\frac{\tau_a}{2})^* \\ &= -{}^T(\partial_\nu + iA_\nu^a \frac{\tau_a}{2}) = -{}^T D_\nu\end{aligned}\quad (3.10)$$

となるから、(3.8) は次のようになる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F &= \psi_+^\dagger i\sigma_\nu D_\nu \psi_+ + {}^T\psi_- i(-\sigma_\nu^*) (-{}^T D_\nu) \psi_-^* = \psi_+^\dagger i\sigma_\nu D_\nu \psi_+ - {}^T(\psi_-^\dagger i\sigma_\nu^\dagger D_\nu \psi_-) \\ &= \psi_+^\dagger i\sigma_\nu D_\nu \psi_+ - \psi_-^\dagger i\sigma_\nu^\dagger D_\nu \psi_-\end{aligned}\quad (3.11)$$

ここで、2つ目の等号は  ${}^T\psi_-$  と  $\psi_-^*$  が Grassmann 数であることを用いている。3つ目の等号は第2項全体がスカラーであるから転置記号を取り除いている。したがって、(3.5) が (3.4) と等価であることが示される。

次に、カイラル対称性の自発的破れの秩序変数であるカイラル凝縮  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  の  $SU(2N_f)$  変換を考える。先と同様に、 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  は (3.6) の場  $\Psi$  を用いて書き直すことができる：

$$\bar{\psi}^f \psi^g = \psi^{\dagger f} \gamma_4 \psi^g = (\psi_+^\dagger \quad \psi_-^\dagger)^f \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}^g = \psi_+^{\dagger f} \psi_-^g + \psi_-^{\dagger f} \psi_+^g \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{2} {}^T\Psi^F \sigma_2 \tau_2 \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}^{FG} \Psi^G + \frac{1}{2} \Psi^{\dagger F} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}^{FG} \tau_2 \sigma_2 \Psi^{*G} \quad (3.13)$$

ここでの単位行列は  $N_f \times N_f$  行列である。(3.13) が (3.12) と等価であることは次のように確認できる：(3.12) および (3.13) の第2項はそれぞれの第1項のエルミート共役であるから、第1項のみを考える。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} {}^T\Psi \sigma_2 \tau_2 \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \Psi &= \frac{1}{2} ({}^T\psi_+ \quad \psi_-^\dagger {}^T\tau_2 {}^T\sigma_2) \sigma_2 \tau_2 \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \sigma_2 \tau_2 \psi_-^* \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (-{}^T\psi_+ \sigma_2 \tau_2 \sigma_2 \tau_2 \psi_-^* + \psi_-^\dagger {}^T\tau_2 {}^T\sigma_2 \sigma_2 \tau_2 \psi_+) \\ &= \frac{1}{2} (-{}^T\psi_+ \psi_-^* + \psi_-^\dagger \psi_+) = \psi_-^\dagger \psi_+\end{aligned}\quad (3.14)$$

ここで、4つ目の等号は  $\text{T}\psi_+$  と  $\psi_-^*$  が Grassmann 数であることを用いている。転置記号は  $\psi_-^\dagger \psi_+$  がスカラーなので消去している。したがって、(3.13) と (3.12) が等価であることが示される。(3.13) の形のカイラル凝縮がゼロでない値を持つとき、拡大されたフレーバー変換 (3.7) の下で  $\bar{\psi}\psi$  がどのようになるか確認する。(3.13) に対して変換 (3.7) を実行すると、

$$\bar{\psi}\psi = \frac{1}{2} \text{T}\Psi\sigma_2\tau_2 \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \Psi + \text{h.c.} \longrightarrow \frac{1}{2} \text{T}\Psi\sigma_2\tau_2 \text{T}V \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} V\Psi + \text{h.c.} \quad (3.15)$$

となるため、 $\bar{\psi}\psi$  は  $\text{SU}(2N_f)$  変換の下で不変でなくなる。ところが、(3.15) において、

$$\text{T}V \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

が成り立つ場合は  $\text{Sp}(2N_f) \subset \text{SU}(2N_f)$  の下での不変性が残る。したがって、カイラル対称性の自発的破れのパターンが (3.2) のようになることを示すことができる。すなわち、Nambu–Goldstone 多様体は  $G/H = \text{SU}(2N_f)/\text{Sp}(2N_f)$  によって与えられ、NG ボゾンは  $(2N_f)^2 - 1 - N_f(2N_f + 1) = N_f(2N_f - 1) - 1$  個生じる。

## 3.2 カイラルラグランジアン

本節では Nambu–Goldstone 多様体  $G/H$  に対する低エネルギー有効理論であるカイラルラグランジアンを構成する。カイラルラグランジアンは QCD のラグランジアンが持っているフレーバー対称性のうち破れた対称性の情報をもとに構成され、ラグランジアンはその対称性の要求のみから決定される。

準備として、群の生成子の記号を定義しておく。拡大されたフレーバー群  $G = \text{SU}(2N_f)$  がその部分群  $H = \text{Sp}(2N_f)$  に破れたとき、 $G$  の生成子が  $\{t^A \in \mathcal{G} \mid A = 1, 2, \dots, \dim G\}$  であるとする。この生成子  $\{t^A\}$  は破れていない部分群  $H$  の生成子  $\{S^k \in \mathcal{H} \mid k = 1, 2, \dots, \dim H\}$  と破れた商群  $G/H$  の生成子  $\{X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H} \mid a = 1, 2, \dots, \dim G - \dim H\}$  に分解される：

$$\begin{aligned} \{t^A \in \mathcal{G}\} &= \{S^k \in \mathcal{H}, X^a \in \mathcal{G} - \mathcal{H}\} \\ \text{tr}(S^k X^a) &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここで、生成子の規格化は簡単のため次のように定義する：

$$\text{tr}(S^k S^l) = \delta^{kl}, \quad \text{tr}(X^a X^b) = \delta^{ab} \quad (3.18)$$

Nambu–Goldstone 多様体  $G/H$  に対する有効理論はカイラル凝縮  $\Sigma$  とそのゆらぎによって記述できる。そのような場を  $Q(x)$  と置き、 $N_f(2N_f - 1) - 1$  個の独立な成分を持つ  $\det Q = 1$  の反対称ユニタリ行列であるとする。 $G/H = \text{SU}(2N_f)/\text{Sp}(2N_f)$  は  $\text{SU}(2N_f)$  変換 (3.7) の下での  $\Sigma$  の変換則 (3.15) と (3.16) に従って、次のようにパラメトライズされる：

$$Q(x) = U(x)\Sigma_c \text{T}U(x) \quad (3.19)$$

ここで、 $\Sigma_c$  はカイラル凝縮  $\Sigma$  のゆらぎ方向の平衡値を示す。  $U(x)$  は

$$U(x) = \exp\left(\frac{i\pi(x)}{2F}\right), \quad \pi(x) = \pi^a(x)X^a \quad (3.20)$$

によって与えられる。場  $\pi^a(x)$  は NG ボゾン、 $F$  は対称性のみから決めることができない係数であり、低エネルギー定数とよばれる（後で  $\pi$  中間子の崩壊定数と関連付けられる）。すなわち、破れたフレーバー群  $G/H$  を記述する座標として場  $\pi^a(x)$  が組み込まれている。(3.17) の生成子  $S^k$  は  $\Sigma_c$  を不変に保つものとして次のように定義される：

$$e^{i\phi^k S^k} \Sigma_c \text{T}(e^{i\phi^k S^k}) = \Sigma_c \quad (3.21)$$

無限小の  $\phi^k \in \mathbb{R}$  について (3.21) は

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} + i\phi^k S^k) \Sigma_c \text{T}(\mathbf{1} + i\phi^k S^k) &\simeq \Sigma_c \iff \Sigma_c + i\phi^k S^k \Sigma_c + \Sigma_c i\phi^k \text{T}S^k \simeq \Sigma_c \\ \therefore S^k \Sigma_c + \Sigma_c \text{T}S^k &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。よって、生成子  $S^k$  は破れていない部分群  $H = \text{Sp}(2N_f)$  の生成子であることが確認できる。破れた  $G/H$  の生成子  $X^a$  は無限小の  $\pi^a(x)$  に関して (3.19) の右辺を計算すると、

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i\pi^a(x)X^a}{2F}\right) \Sigma_c \text{T} \exp\left(\frac{i\pi^a(x)X^a}{2F}\right) &\simeq \left(\mathbf{1} + \frac{i\pi^a(x)X^a}{2F}\right) \Sigma_c \left(\mathbf{1} + \frac{i\pi^a(x)\text{T}X^a}{2F}\right) \\ &\simeq \Sigma_c + \left(\frac{i\pi^a(x)}{2F}\right) (X^a \Sigma_c + \Sigma_c \text{T}X^a) \end{aligned} \quad (3.23)$$

が得られる。(3.23) が (3.19) のようにカイラル凝縮の平衡値とそのゆらぎの形で書くためには

$$X^a \Sigma_c = \Sigma_c \text{T}X^a \quad (3.24)$$

が成り立たなければならない。(3.22) と同様に、(3.24) が生成子  $X^a$  の定義であるとみなすと、(3.23) の右辺は

$$\begin{aligned} \Sigma_c + \left(\frac{i\pi^a(x)X^a}{F}\right) \Sigma_c &\simeq \left(\mathbf{1} + \frac{i\pi^a(x)X^a}{2F}\right)^2 \Sigma_c \simeq U^2(x) \Sigma_c \\ \therefore U(x) \Sigma_c \text{T}U(x) &= U^2(x) \Sigma_c \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる。よって、場  $Q(x)$  は  $U^2(x) \Sigma_c$  の形に書くことができ、カイラルラグランジアンはこの場  $Q(x)$  を用いて構成される。運動項は拡大されたフレーバー群  $\text{SU}(2N_f)$  の下での不変性、すなわち変換  $Q \rightarrow VQ \text{T}V$ ,  $V \in \text{SU}(2N_f)$  の下での不変性および Lorentz 不変性を満たす最低次の項を採用する：

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F^2}{2} \text{tr} \partial_\nu Q(x) \partial_\nu Q^\dagger(x) \quad (3.26)$$

次に、質量項が存在する場合を考える。ここでは縮退したクォーク質量  $m_q$  がゼロでない値を持っているとする。質量項が存在すれば、カイラルラグランジアン<sup>3</sup>の運動項 (3.26) が持っている  $SU(2N_f)$  対称性は明確に破られる。質量項は (3.13) とほぼ同じ形で書けるので、

$$m_q \bar{\psi}^f \psi^g = \frac{1}{2} m_q \text{Tr} \Psi^F \sigma_2 \tau_2 \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}^{FG} \Psi^G + \text{h.c.} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \Psi^F \sigma_2 \tau_2 M^{FG} \Psi^G + \text{h.c.} \quad (3.27)$$

となる。ここで、質量行列  $M^{FG}$  は次式で与えられる：

$$M^{FG} = m_q \hat{M}^{FG} = m_q \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}^{FG} \quad (3.28)$$

この質量項は  $\text{Sp}(2N_f) \subset SU(2N_f)$  不変性のみ持っている。ところが、もし質量行列  $M$  が場  $\Psi$  と同時に次のように変換されるならば、 $SU(2N_f)$  対称性は回復される：

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = V\Psi, & V &\in SU(2N_f) \\ M &\rightarrow M' = V^* M V^\dagger \end{aligned} \quad (3.29)$$

この拡張した対称性 (3.29) はカイラルラグランジアンにおいて明確でなければならないため、その運動項と質量項は次の変換の下でも不変である必要がある：

$$\begin{aligned} Q(x) &\rightarrow Q'(x) = VQ(x)^T V, & V &\in SU(2N_f) \\ M &\rightarrow M' = V^* M V^\dagger \end{aligned} \quad (3.30)$$

よって、カイラルラグランジアン<sup>3</sup>の質量項は変換 (3.30) の下で不変な最低次の項を採用する：

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\Sigma \text{Re tr} (MQ(x)) = -\Sigma m_q \text{Re tr} (\hat{M}Q(x)) \quad (3.31)$$

この質量項における真空期待値への主要な寄与はこの項を最小化した場合であるから、 $Q(x)$  の期待値が  $\Sigma_c$  となり、 $\hat{M}\Sigma_c \simeq \mathbf{1}$  であればよい。したがって、(3.31) を最小化する  $Q(x)$  は  $\Sigma_c = \hat{M}^\dagger$  によって与えられる。係数  $\Sigma$  は対称性のみから決めることができない現象論的な係数である。この係数は、2.3 節で見たように  $m_q \rightarrow 0$  におけるカイラル凝縮に比例するため、(2.106) で定義したカイラル凝縮  $\Sigma$  と同定される。したがって、質量項を含む最低次のカイラルラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F^2}{2} \text{tr} \partial_\nu Q(x) \partial_\nu Q^\dagger(x) - \Sigma m_q \text{Re tr} (\hat{M}Q(x)) \quad (3.32)$$

と表現できる。この形のカイラルラグランジアンは Weinberg ラグランジアン [18] と呼ばれる。さらに、(3.32) が  $\pi$  中間子の場  $\pi^a(x)$  のラグランジアンと同定できることを確認するために、(3.20) を場  $\pi^a(x)$  について 2 次まで展開すると、

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \partial_\nu \pi^a(x) \partial_\nu \pi^a(x) - \frac{1}{2} \frac{\Sigma m_q}{F^2} (\pi^a(x))^2 + \dots \quad (3.33)$$

のような項が得られる。第 2 項は場  $\pi^a(x)$  の質量項であるから、場  $\pi^a(x)$  の質量を  $m_\pi$  とすると、

$$m_\pi^2 = \frac{\Sigma m_q}{F^2} \quad (3.34)$$

と書くことができる。この関係式は Gell-mann–Oakes–Renner 関係式 [69] として知られ、 $\pi$  中間子の質量と（縮退した）クォーク質量を関係付ける。したがって、(3.20) から導入した  $F$  が  $\pi$  中間子の崩壊定数と同定される。実際、(3.34) により、(3.32) は  $m_\pi$  を用いて、

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F^2}{2} \left( \text{tr} \partial_\nu Q(x) \partial_\nu Q^\dagger(x) - 2m_\pi^2 \text{Re tr} (\hat{M}Q(x)) \right) \quad (3.35)$$

のように表現できる。(3.32) が持っているフレーバー対称性とその破れは、3.1 節で議論したものと同じであり、 $SU(2N_f)$  変換  $Q(x) \rightarrow Q'(x) = VQ(x)^T V$  の下で、質量項が存在することによって  $SU(2N_f) \rightarrow \text{Sp}(2N_f)$  に破れる。

### 3.3 化学ポテンシャル $\mu \neq 0$ の導入

本節では低エネルギー有効理論に化学ポテンシャル  $\mu \neq 0$  を導入する。まずは QCD ラグランジアンに  $\mu$  を導入したときの性質を簡単にまとめる。その後、2-color QCD のラグランジアンに  $\mu$  を導入し、前節と同様に Pauli–Gürsey 対称性を持つ場に移行し、化学ポテンシャル項を含む低エネルギー有効理論を導出する。

#### 3.3.1 有限密度における符号問題

(3.4) の第 1 等号に質量項と化学ポテンシャルを含めたフェルミオンのラグランジアンは次のように表現される：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \bar{\psi}^f \gamma_\nu D_\nu \psi^g - \mu \psi^{\dagger f} \psi^g + m \bar{\psi}^f \psi^g \\ &= \bar{\psi}^f \gamma_\nu D_\nu \psi^g - \mu \bar{\psi}^f \gamma_4 \psi^g + m \bar{\psi}^f \psi^g \end{aligned} \quad (3.36)$$

第 2 項の  $\mu \gamma_4$  を第 1 項の共変微分に取り込んだ  $\mathcal{D}(\mu) := \gamma_\nu D_\nu - \mu \gamma_4$  という Dirac 演算子を定義する。ここでは  $N_c = 2$  ではなく、 $\beta = 2$  の QCD の Dirac 演算子であるとする。すると、 $\mu = 0$  のときの Dirac 演算子は反エルミートであるので、 $\mathcal{D}(\mu)$  のエルミート共役は

$$\mathcal{D}(\mu)^\dagger = -\gamma_\nu D_\nu - \mu \gamma_4 = -\mathcal{D}(-\mu) \quad (3.37)$$

となるため、化学ポテンシャルを含む Dirac 演算子  $\mathcal{D}(\mu)$  は非エルミートな演算子になる。このとき、フェルミオン行列式は一般に複素数 ( $\det(\mathcal{D}(\mu) + m_q) \in \mathbb{C}$ ) になる。したがって、QCD 分配関数の重みが正ではなくなり、統計力学的な取り扱いが困難になる。このような困難は符号問題と呼ばれる。しかし、 $N_c = 2$  の場合、すなわち、2-color QCD では符号問題が生じないことが知られている。これを確かめるため、 $\beta = 1$  の基本表現のクォークを考える。このときの  $\mathcal{D}(\mu)$  は

$$\mathcal{D}_1(\mu) = \gamma_\nu (\partial_\nu + iA_\nu^a \frac{\tau_a}{2}) - \mu \gamma_4 \quad (3.38)$$

で与えられる。2.2.3 節における  $\beta = 1$  の場合で見たように、2-color QCD の擬実性 (2.103) によって、(2.102) が成り立つので、 $\det \mathcal{D}_1(\mu)$  の複素共役は

$$(\det \mathcal{D}_1(\mu))^* = \det [(C\gamma_5\tau_2)^{-1}(\mathcal{D}_1(0) - \mu\gamma_4)(C\gamma_5\tau_2)] = \det \mathcal{D}_1(\mu) \quad (3.39)$$



となる。よって、フェルミオン行列式は実数 ( $\det(\mathcal{D}_1(\mu) + m_q) \in \mathbb{R}$ ) であるから、符号問題は生じない。したがって、符号問題のない 2-color QCD は有限密度 QCD を研究するために有用である。

### 3.3.2 カイラルラグランジアン構成

本節では化学ポテンシャル項を含むカイラルラグランジアンを構成する。まず、(3.36) 第 2 項の化学ポテンシャル項の  $\psi^\dagger \psi$  は  $\Psi$  を用いて、次のように表現される：

$$\psi^\dagger f \psi^g = (\psi_+^\dagger \quad \psi_-^\dagger)^f \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}^g = \psi_+^\dagger f \psi_+^g + \psi_-^\dagger f \psi_-^g \quad (3.40)$$

$$= \Psi^\dagger F \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}^{FG} \Psi^G = \Psi^\dagger F \hat{B}^{FG} \Psi^G, \quad \hat{B} := \begin{pmatrix} +\mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

(3.41) が (3.40) と等価であることは次のように確認できる：

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger \hat{B} \Psi &= \Psi^\dagger \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \Psi = (\psi_+^\dagger \quad \tau \psi_- \tau_2 \sigma_2) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \sigma_2 \tau_2 \psi_-^* \end{pmatrix} \\ &= \psi_+^\dagger \psi_+ - \tau \psi_- \tau_2 \sigma_2 \sigma_2 \tau_2 \psi_-^* = \psi_+^\dagger \psi_+ + \tau (\psi_-^\dagger \psi_-) = \psi_+^\dagger \psi_+ + \psi_-^\dagger \psi_- \end{aligned} \quad (3.42)$$

ここで、 $\hat{B}$  はバリオンチャージ行列を示し、 $+\mathbf{1}$  はクォーク場  $\psi_+$ 、 $-\mathbf{1}$  は共役クォーク場  $\tilde{\psi}_+$  のバリオンチャージをそれぞれ意味する。よって、(3.36) は  $\Psi$  を用いて次のように書くことができる：

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i \sigma_\nu (D_\nu - \mu \hat{B}_\nu) \Psi - \left( \frac{1}{2} \tau \Psi \sigma_2 \tau_2 M \Psi + \text{h.c.} \right) \quad (3.43)$$

ここで、 $\hat{B}_\nu$  は  $\hat{B}_\nu = (0, 0, 0, \hat{B})$  であり、 $\sigma_\nu \hat{B}_\nu = -i \hat{B}$  となっている。クォーク質量  $m_q = 0$  のとき、ラグランジアン (3.43) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\Psi} i \sigma_\nu D_\nu \Psi - \bar{\Psi} \mu \hat{B} \Psi \\ &= (\psi_+^\dagger \quad \tilde{\psi}_+^\dagger) i \sigma_\nu D_\nu \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \tilde{\psi}_+ \end{pmatrix} + (\psi_+^\dagger \quad \tilde{\psi}_+^\dagger) \mu \begin{pmatrix} +\mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \tilde{\psi}_+ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

の形のフレーバーに対する行列構造を持っているため、 $\mu \neq 0$  の場合は、拡大されたフレーバー対称性が  $SU(2N_f) \rightarrow SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$  のように破られる。さらに、 $m_q \neq 0$  の場合はこの対称性が  $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L \rightarrow SU(N_f)_V$  のように破られる。

化学ポテンシャル項は行列  $\hat{B}$  の存在によって、 $SU(2N_f)$  変換 (3.7) の下で不変でない。ところが、もしバリオンチャージ行列  $\hat{B}$  が、(3.29) と同様に、場  $\Psi$  と同時に次のように変換されるならば、 $SU(2N_f)$  対称性は保持される：

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = V \Psi, \quad V \in SU(2N_f) \\ \hat{B} &\rightarrow \hat{B}' = V \hat{B} V^\dagger \end{aligned} \quad (3.45)$$

このような拡張された対称性 (3.45) はカイラルラグランジアンにおいて明確でなければならないため、運動項と化学ポテンシャル項は次の変換の下でも不変である必要がある：

$$\begin{aligned} Q(x) &\rightarrow Q(x)' = VQ(x)^T V, & V \in \text{SU}(2N_f) \\ \hat{B} &\rightarrow \hat{B}' = V\hat{B}V^\dagger \end{aligned} \quad (3.46)$$

この制限 (3.46) から考えられる  $\mu$  を含む項の最低次の非微分項は任意の係数を除いて、

$$\mu^2 \text{tr}(\hat{B}Q^T \hat{B}Q^\dagger), \quad \mu^2 \text{tr}(\hat{B}\hat{B}) \quad (3.47)$$

という 2 つの項の線形結合で表現できる\*1。この 2 項の中で、NG ボソンは第 1 項のみに含まれている。

次に、(3.47) の 2 つの項の係数を決めるために、ここでは  $\mu = 0$  のカイラルラグランジアン (3.32) に含まれる低エネルギー定数  $F$  と関係付けることを考える。そのために、次の局所的  $\text{SU}(2N_f)$  変換が導入される：

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = V(x)\Psi, & V(x) \in \text{SU}(2N_f) \\ \hat{B}_\nu &\rightarrow \hat{B}'_\nu = V(x)\hat{B}_\nu V^\dagger(x) - \frac{1}{\mu}V(x)\partial_\nu V^\dagger(x) \end{aligned} \quad (3.48)$$

この拡大された局所的フレーバー変換によって、 $\hat{B}_\nu$  はゲージ場  $A_\nu(x)$  のような形の変換をするので、カイラルラグランジアンがこの変換の下で不変であるためにはカイラルラグランジアン中の微分をフレーバー共変微分  $\nabla_\nu$  に置き換える必要がある：

$$\begin{aligned} \nabla_\nu Q(x) &= \partial_\nu Q(x) - \mu(\hat{B}_\nu Q(x) + Q(x)^T \hat{B}_\nu) \\ \nabla_\nu Q^\dagger(x) &= \partial_\nu Q^\dagger(x) + \mu(Q^\dagger(x)\hat{B}_\nu + {}^T \hat{B}_\nu Q^\dagger(x)) \end{aligned} \quad (3.49)$$

このフレーバー共変微分を用いて、カイラルラグランジアン (3.32) は

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F^2}{2} \text{tr} \nabla_\nu Q(x) \nabla_\nu Q^\dagger(x) - \Sigma m_q \text{Re tr}(\hat{M}Q(x)) \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{F^2}{2} \text{tr} \partial_\nu Q(x) \partial_\nu Q^\dagger(x) + 2F^2 \mu \text{tr} BQ^\dagger(x) \partial_4 Q(x) \\ &\quad - F^2 \mu^2 \text{tr}(\hat{B}Q(x)^T \hat{B}Q^\dagger(x) + \hat{B}\hat{B}) - \Sigma m_q \text{Re tr}(\hat{M}Q(x)) \end{aligned} \quad (3.51)$$

と書き換えることができる。(3.51) において重要なことは、局所的フレーバー変換 (3.48) を導入することによって、カイラルラグランジアンの  $\mu$  依存性を新たなパラメータを用いることなく表現できることである。よって、 $\mu$  依存性のある項の係数は低エネルギー定数  $F$  を用いて完全に決定されることを意味する。

---

\*1 係数が  $\mu^2$  である理由：(3.43) における化学ポテンシャルが  $\mu\hat{B}$  の形で入るため、 $\hat{B}$  の数だけ  $\mu$  を導入している。

### 3.3.3 $\varepsilon$ 領域

本節では 4 次元 Euclid 空間の有限体積  $V = L^4$  における QCD を考える．前節までの議論において，QCD が持っている大域的対称性，特にカイラル対称性の自発的破れが正確に含まれている低エネルギー有効理論を考え，この有効理論における基本的な自由度が  $\pi$  中間子であるとしてカイラルラグランジアンが構成された．2.2.2 節で述べたように， $\pi$  中間子は，他のハドロンよりもずっと軽い粒子であることから，カイラル対称性の自発的破れに伴う擬 NG 粒子\*2であると同定される．この事実は  $\Lambda_{\text{QCD}}$  よりも十分低エネルギーの領域

$$\frac{1}{L} \ll \Lambda_{\text{QCD}} \quad (3.52)$$

であれば，QCD 分配関数は  $\pi$  中間子のみを含む低エネルギー有効理論の分配関数によって支配されることを主張する．この主張は分配関数への寄与が  $\pi$  中間子の質量  $m_\pi$  を持つ重み  $\exp(-m_\pi L)$  に比べて，非 NG 粒子のハドロンの質量  $\Lambda$  を持つ重み  $\exp(-\Lambda L)$  の方が速く減衰することを意味する．

$\mu = 0$  の場合，Weinberg ラグランジアン (3.32) における場  $Q(x)$  は有限体積  $V = L^4$  と周期的境界条件の下で， $p = \frac{2\pi}{L}n$ , ( $n \in \mathbb{Z}^4$ ) に対して，ゼロ運動量モード（定数場）とノンゼロ運動量モードに分離させて，

$$Q(x) = \sum_p \tilde{Q}_p e^{ipx} = \tilde{Q}_0 + \sum_{p \neq 0} \tilde{Q}_p e^{ipx} \quad (3.53)$$

のように書くことができる．(3.52) の領域において，ゼロ運動量モード  $\tilde{Q}_0$  が支配的になる領域の存在が知られている [22]．この領域は  $\varepsilon$  領域と呼ばれる：

$$\frac{1}{\Lambda_{\text{QCD}}} \ll L \ll \frac{1}{m_\pi} \quad (3.54)$$

この  $\varepsilon$  領域では  $\pi$  中間子の波長が有限体積  $V$  の箱の 1 辺の長さ  $L$  よりもずっと長い状態を示す．すなわち， $\pi$  中間子の場は有限体積の箱に対してほとんど変化しない．よって，分配関数への微分項の寄与は無視できることを意味する．実際に (3.54) の右辺側は (3.34) によって，

$$\frac{F^2}{L^2} \ll \Sigma m_q \quad (3.55)$$

となるので，各項の次元解析から，質量項の寄与が支配的になる． $\varepsilon$  領域ではゼロ運動量モードのみ寄与するから，カイラルラグランジアンは定数場 ( $Q(x) \rightarrow Q$ ) のみを考えればよい．よって，作用における時空の積分は  $\int d^4x \rightarrow V$  に置き換わる．したがって，低エネルギー有効理論における分配関数は

$$\mathcal{Z} = \int dQ \exp\left(V \Sigma m_q \text{Re tr } \hat{M}Q\right) \quad (3.56)$$

\*2 「擬」が付く理由は実際の  $u, d$  クォーク質量がわずかに質量 ( $\sim 5\text{MeV}$ ) を持ち， $\pi$  中間子も質量 ( $\sim 140\text{MeV}$ ) を持っているためである．

のように表現でき、実質的にゼロ次元の行列模型として扱われる。このような  $\varepsilon$  領域の有効分配関数が有用である理由として、(3.56) が第 5 章で議論するカイラルランダム行列の  $\sigma$  模型表現の微視的スケール (2.116) と等価であることが挙げられる [23] .

$\mu \neq 0$  の場合も同様に、 $\varepsilon$  領域では各項の次元解析により微分項が無視されるため、有効分配関数は次の形で表現される：

$$Z = \int dQ \exp \left( VF^2 \mu^2 \text{tr} (\hat{B}Q^T \hat{B}Q^\dagger + \hat{B}\hat{B}) + V\Sigma m_q \text{Re tr } \hat{M}Q \right) \quad (3.57)$$

2-color QCD の低エネルギー有効理論において、化学ポテンシャル項の効果は  $\varepsilon$  領域において 2 種類の低エネルギー定数 ( $F^2 \mu^2, \Sigma$ ) を含む形になる。上述したように、これらの低エネルギー定数は理論の対称性のみから数値を与えることはできない。通常、低エネルギー定数を決めるためには第 4 章で議論する格子ゲージ理論を用いた QCD の数値シミュレーションを利用する必要がある。特に、 $F$  は通常、格子ゲージ理論の数値シミュレーションから直接評価する場合、軸性カレント相関関数を計算するために時間方向に大きい格子を必要とする [10] . そこで、本論文ではもう少し工夫した方法として、第 5 章で取り扱うカイラルランダム行列の固有値の準位統計を利用する。第 6 章において、カイラルランダム行列の個別固有値分布を用いて 2-color QCD における 2 種類の低エネルギー定数を決定するための新たな方法を提案する。

## 第 4 章

# 格子ゲージ理論

本章では QCD を非摂動的に取り扱う方法の一つである格子ゲージ理論 (LGT) について簡単にまとめる。これまで QCD は時空として 4 次元 Euclid 空間を考えていたが, LGT はその時空を離散化した格子上において改めてクォーク場やグルーオン場を定義する。QCD の時空を格子化した場合に対しても, クォーク場とグルーオン場の相互作用を記述するためにゲージ対称性が重要となる。連続理論との最も大きな違いは局所的ではないゲージ不変量によって相互作用を記述することである。4.1 節では格子上でフェルミオンを構成する場合の問題点とその解決法の例について簡単にまとめる。4.2 節では格子上におけるフェルミオンとゲージボゾンの相互作用を導入し, ゲージ場の運動項であるプラケット作用を構成する。4.3 節では QCD の非摂動的な手法として LGT を考える利点の一つである物理量の数値シミュレーションについて簡単に述べる。特に, 本節では本論文で用いるクエンチ近似における SU(2) 格子ゲージ理論のゲージ場を生成方法である熱浴法 (モンテカルロ法) による数値シミュレーションを紹介する。本章の議論は主に Ref. [8–10] に従っている。

### 4.1 格子上のフェルミオン

本節では格子上においてフェルミオンを構成する方法について簡単にレビューする。4.1.1 節では格子上でフェルミオンを構成する場合に生じる問題点であるフェルミオンダブリングとその解決方法についてよく知られている例を短くまとめる。4.1.2 節では 4.1.1 節で述べる解決方法のうち, 本論文で使用するスタッガードフェルミオンについて簡単にまとめる。

#### 4.1.1 フェルミオンダブリング

まず本節では単純な離散化によって自由 Dirac 場に対する経路積分がどのように書き換えられるのかを考える:

$$Z_F = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_F}, \quad S_F = \int d^4x \bar{\psi}_\alpha(x)(\gamma_\mu\partial_\mu + M)_{\alpha\beta}\psi_\beta(x) \quad (4.1)$$

場の変数  $x_\mu$  は連続変数であるから、時空を離散化した格子上的座標を導入する。これは次のような置き換えによってなされる：

$$\begin{aligned} x_\mu &\rightarrow n_\mu a, & \psi_\alpha(x) &\rightarrow \frac{1}{a^{3/2}} \hat{\psi}_\alpha(n), & M &\rightarrow \frac{1}{a} \hat{M} \\ \partial_\mu \psi_\alpha(x) &\rightarrow \frac{1}{a^{5/2}} \frac{1}{2} \left( \hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu}) \right), & \int d^4x &\rightarrow a^4 \sum_n \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで、 $a$  は格子間隔、 $\hat{\mu}$  は  $\mu$  方向に沿った単位ベクトルであり、 $\hat{\psi}_\alpha(n)$  のようなハット付きの記号は無次元量を意味する。例えば、 $\hat{\psi}_\alpha(n) := a^{3/2} \psi_\alpha(na)$  のように定義される。この置き換えによって、作用 (4.1) は次のようになる：

$$\begin{aligned} S_F &= \sum_{n,m} \hat{\psi}_\alpha(n) \hat{K}_{\alpha\beta}(n,m) \hat{\psi}_\beta(m), \\ \hat{K}_{\alpha\beta}(n,m) &= \sum_\mu \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\delta_{n+\hat{\mu},m} - \delta_{n-\hat{\mu},m}) + \hat{M} \delta_{\alpha\beta} \delta_{nm} \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで、 $\hat{K}_{\alpha\beta}(n,m)$  は格子上的 Dirac 演算子であり、カーネル行列とも呼ばれる。このとき経路積分測度は

$$\mathfrak{D}\hat{\psi}\mathfrak{D}\hat{\psi} = \prod_{\alpha,n} d\hat{\psi}_\alpha(n) \prod_{\beta,m} d\hat{\psi}_\beta(m) \quad (4.4)$$

のように定義され、格子上的相関関数は次の経路積分表現により与えられる：

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(n) \cdots \hat{\psi}_\beta(m) \cdots \rangle = \frac{\int \mathfrak{D}\hat{\psi}\mathfrak{D}\hat{\psi} \hat{\psi}_\alpha(n) \cdots \hat{\psi}_\beta(m) \cdots e^{-S_F}}{\int \mathfrak{D}\hat{\psi}\mathfrak{D}\hat{\psi} e^{-S_F}} \quad (4.5)$$

この単純な離散化による格子上的フェルミオンが元の連続理論のフェルミオンを再現するのかを確認するため、例として格子上的 2 点相関関数、すなわち、伝播関数の連続極限  $a \rightarrow 0$  を考える。格子上的伝播関数は

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(n) \hat{\psi}_\beta(m) \rangle = \hat{K}_{\alpha\beta}^{-1}(n,m) \quad (4.6)$$

のようにカーネル行列の逆行列  $\hat{K}_{\alpha\beta}^{-1}(n,m)$  で与えられ、

$$\sum_{\rho,l} \hat{K}_{\alpha\rho}^{-1}(n,l) \hat{K}_{\rho\beta}(l,m) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{nm} \quad (4.7)$$

を満たす。カーネル行列  $\hat{K}_{\alpha\beta}(n,m)$  の運動量表示を得るために、

$$\delta_{nm} = a^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ika(n-m)} \quad (4.8)$$

を用いると、次式が得られる：

$$\hat{K}_{\alpha\beta}(n,m) = a^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ika(n-m)} \left( i \sum_\mu (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \sin(k_\mu a) + \hat{M} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (4.9)$$

この運動量表示のカーネル行列の下で (4.7) を満たす格子上的伝播関数の表現は

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\psi}_\alpha(n) \hat{\psi}_\beta(m) \rangle &= \hat{K}_{\alpha\beta}^{-1}(n, m) \\
&= a^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ika(n-m)}}{i \sum_\mu (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \sin(k_\mu a) + \hat{M} \delta_{\alpha\beta}} \\
&= a^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ika(n-m)} \frac{-i \sum_\mu (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \sin(k_\mu a) + \hat{M} \delta_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \sin^2(k_\mu a) + \hat{M}^2}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

で与えられる。よって、(4.10) の連続極限は次のようになる：

$$\begin{aligned}
\langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} \left\langle \psi_\alpha \left( \frac{x}{a} \right) \bar{\psi}_\beta \left( \frac{y}{a} \right) \right\rangle \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ika(\frac{x}{a} - \frac{y}{a})} \frac{-i \sum_\mu (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \frac{1}{a} \sin(k_\mu a) + \frac{1}{a} \hat{M} \delta_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \frac{1}{a^2} \sin^2(k_\mu a) + \frac{1}{a^2} \hat{M}^2} \\
&= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \frac{-i \sum_\mu (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \frac{1}{a} \sin(k_\mu a) + M \delta_{\alpha\beta}}{\sum_\mu \frac{1}{a^2} \sin^2(k_\mu a) + M^2}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

もし、伝播関数 (4.11) における  $k_\mu$  についての関数  $\tilde{k}_\mu := \frac{1}{a} \sin(k_\mu a)$  が連続極限  $a \rightarrow 0$  において単純に  $\tilde{k}_\mu \rightarrow k_\mu$  となれば、元の連続理論をうまく再現できる。しかし、実際にはうまくいかないことが知られている。なぜなら、Brillouin ゾーン ( $-\pi/a < k_\mu \leq \pi/a$ ) において  $\tilde{k}_\mu$  がゼロになる点が原点だけでなく、Brillouin ゾーンの外端にも存在するからである。4次元の格子状ではこのような零点が  $2^4 = 16$  個存在する：

$$k_\mu = (0, 0, 0, 0), (\pi/a, 0, 0, 0), \dots, (\pi/a, \pi/a, \pi/a, \pi/a) \tag{4.12}$$

このうち、原点のみが連続理論におけるフェルミオンを表す。残りの 15 個は連続理論には存在しない格子上的人工物を表し、ダブラーと呼ばれる。このような単純な離散化による格子上的フェルミオンの困難はダブリング問題と呼ばれる。

格子上的フェルミオンに対するダブラーは Dirac 場の作用が 1 階微分を含むことに起因する（実際、2 階微分のみ含むスカラー場の場合、ダブラーはないことが知られる）。ダブリング問題が格子化によって生じることは Nielsen–Ninomiya の定理 [70] から従う。この定理は格子上的フェルミオン作用がその連続理論において一般に仮定される条件、局所性、並進不変性およびエルミート性を満たす場合、カイラル対称性を破ることなしにダブラーを取り除くことができないことを示す。この定理は格子上で明確にカイラル対称性を破っていれば、ダブリング問題が回避できることを示唆する。この方向における解決方法は Wilson フェルミオン [71] と呼ばれ、ダブリング問題を回避するための最も有名な方法の一つである。Wilson フェルミオンはカイラル対称性を明確に破るために、単純な格子上的フェルミオン作用 (4.3) に 2 階微分（差分）の項を加えることによって実現される。このためダブリング問題は回避できるが、質量がゼロの極限においてもカイラル対称性は犠牲になる。この事実は QCD におけるカイラル対称性の自発的破れを研究する上での直接的な方法として採用しづらいように感じられる。そこで、Wilson フェルミオンのようにカイラル

対称性を明確に破らないような方法の一つとして、本論文において採用されているスタaggerドフェルミオンまたは Kogut-Susskind フェルミオンが知られている [72, 73]。スタaggerドフェルミオンの構成は 4.1.2 節において説明される。ダブリング問題を回避するもう一つがよく知られた方法は Ginsparg-Wilson 関係式 [74] による格子上でのカイラル対称性の再定義である。この方法は Nielsen-Ninomiya の定理から格子上においてダブラーの存在なしにカイラル対称性を保持することができないことを認め、格子上において連続理論におけるカイラル対称性  $\{\gamma_5, \mathcal{D}\} = 0$  が次式の形に修正される：

$$\{\gamma_5, D^{(\text{lat})}\} = aD^{(\text{lat})}R\gamma_5D^{(\text{lat})} \quad (4.13)$$

ここで、 $R$  は  $\gamma$  行列と可換な局所演算子である。(4.13) は連続極限  $a \rightarrow 0$  において連続理論のカイラル対称性を再現する。Ginsparg-Wilson 関係式は (4.13) を満たす格子上の Dirac 演算子が構成できれば、厳密にカイラル対称性が議論できることを主張する。Ginsparg-Wilson 関係式を満たす格子上の Dirac 演算子として、ドメインウォールフェルミオン [75-77] やオーバーラップフェルミオン [78-80] がよく知られている。本論文ではこれらを用いないため、これ以上の詳細は言及しない。

#### 4.1.2 スタaggerドフェルミオン

本節では本論文で実際に使用するスタaggerドフェルミオンについて簡単に議論する。前節で議論したように、ダブリング問題は格子上の伝播関数における正弦関数  $\frac{1}{a} \sin(k_\mu a)$  が連続極限  $a \rightarrow 0$  において、原点だけでなく、15 個の Brillouin ゾーンの端（例えば、 $k_\mu = (\pi/a, 0, 0, 0)$  など）でもゼロになることから生じる。この問題の回避のために単純に考えられることは、Brillouin ゾーンを半分に縮小する、すなわち、有効な格子間隔を 2 倍にすることである。この考えは、ダブラーを含むフェルミオンの自由度を有効な格子間隔が  $2a$  になるように格子上に配置できて、単純な連続極限において元の連続理論の形を再現できれば原理的に達成できる。ゆえに、まず有効な格子間隔を 2 倍にするために必要な自由度を数える。 $d$  次元時空の格子を考え、それを長さ  $a$  の単位超立方体に再分割する（図 4.1 参照）。この単位超立方体の  $2^d$  個の頂点に異なるフェルミオン自由度（ダブラーを含む  $2^d$  個）をそれぞれ配置し、この単位構造を  $d$  次元格子全体にわたって周期的に繰り返す。このとき、ある単位超立方体の頂点  $n_\mu$  から隣の単位超立方体の対応する頂点までの長さは  $2a$  であるから、有効な格子間隔は元の 2 倍になっている。このようにスタaggerドフェルミオンの特徴は Wilson フェルミオンとは異なり、ダブリングを回避するというよりもダブラーの自由度を Dirac 場のフレーバーと解釈することである。4 次元時空の格子上において、単位超立方体の各頂点に配置された  $2^4$  個の自由度は対応する Dirac 場  $\psi_\alpha^f$  が 4 成分のスピンル ( $\alpha = 1, 2, \dots, 2^{4/2}$ ) で、フレーバーが 4 種類 ( $f = 1, 2, \dots, 2^{4/2}$ ) のフェルミオンであると解釈される。



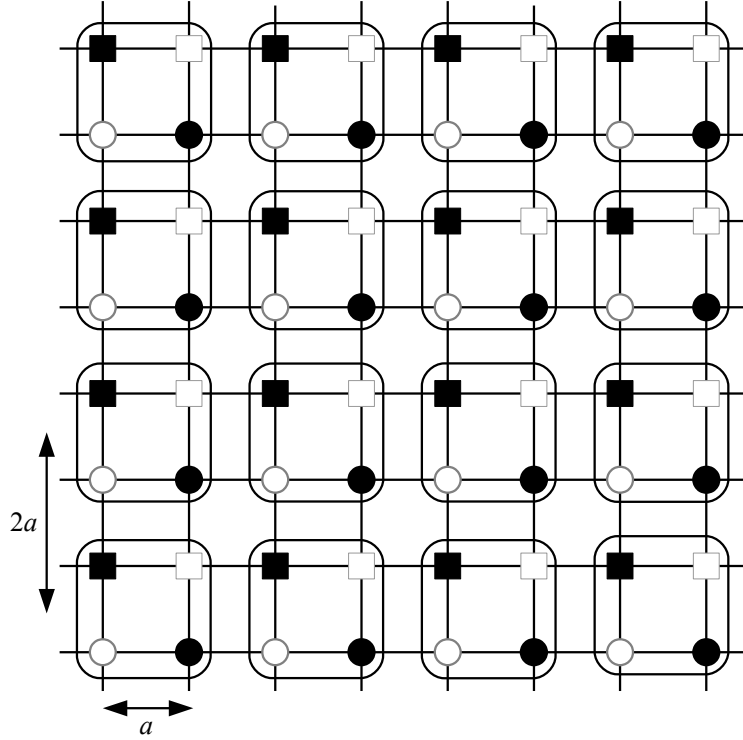


図 4.1 スタッガードフェルミオンの 2 次元格子によるイメージ．四角で囲んだ部分内にダブルラーを含むフェルミオンの自由度が配置され，この部分を一つの格子点とみなした格子間隔  $2a$  の新たな格子が再構成される．

スタッガードフェルミオンの作用を得るために，まずは単純に離散化した格子上的自由 Dirac 場の作用 (4.3) を考える：

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \left( \hat{\psi}_\alpha(n) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \hat{\psi}_\beta(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n) (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \hat{\psi}_\beta(n - \hat{\mu}) \right) + \sum_n \hat{M} \hat{\psi}_\alpha(n) \delta_{\alpha\beta} \hat{\psi}_\beta(n) \quad (4.14)$$

この  $\hat{\psi}$  に対して，局所的な変数変換

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_\alpha(n) &= T_{\alpha\beta}(n) \chi_\beta(n) \\ \hat{\psi}_\alpha(n) &= \bar{\chi}_\beta(n) T_{\beta\alpha}^\dagger(n) \end{aligned} \quad (4.15)$$

を考える．ここで， $T_{\alpha\beta}(n)$  は次式で定義される  $2^{4/2} \times 2^{4/2}$  ユニタリー行列である：

$$T(n) := \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3} \gamma_4^{n_4} \quad (4.16)$$

この変数変換によって，(4.14) は次のようになる：

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \left( \bar{\chi}_\rho(n) T_{\rho\alpha}^\dagger (\gamma_\mu)_{\alpha\sigma} T_{\sigma\beta}(n + \hat{\mu}) \chi_\beta(n + \hat{\mu}) - \bar{\chi}_\rho(n) T_{\rho\alpha}^\dagger (\gamma_\mu)_{\alpha\sigma} T_{\sigma\beta}(n - \hat{\mu}) \chi_\beta(n - \hat{\mu}) \right) + \sum_n \hat{M} \bar{\chi}_\alpha(n) \delta_{\alpha\beta} \chi_\beta(n) \quad (4.17)$$

このとき、(4.16) の  $T(n)$  の表現によって  $\gamma_\mu$  に対する「スピン対角化」ができる：

$$T_{\rho\alpha}^\dagger(n)(\gamma_\mu)_{\alpha\sigma}T_{\sigma\beta}(n+\hat{\mu}) = \eta_\mu(n)\delta_{\rho\beta} \quad (4.18)$$

ここで、 $\eta_\mu(n)$  は符号因子であり、次式で与えられる：

$$\eta_1(n) = 1, \quad \eta_2(n) = (-1)^{n_1}, \quad \eta_3(n) = (-1)^{n_1+n_2}, \quad \eta_4(n) = (-1)^{n_1+n_2+n_3} \quad (4.19)$$

例えば、 $\mu = 2$  の場合、 $\{\gamma_1, \gamma_2\} = 0$  および  $\gamma_\mu^2 = \mathbf{1}$  より、

$$\begin{aligned} T^\dagger(n)\gamma_2T(n+\hat{2}) &= \gamma_4^{n_4}\gamma_3^{n_3}\gamma_2^{n_2}\gamma_1^{n_1}\gamma_2\gamma_1^{n_1}\gamma_2^{|n_2+\hat{2}|}\gamma_3^{n_3}\gamma_4^{n_4} \\ &= \gamma_4^{n_4}\gamma_3^{n_3}\gamma_2^{n_2}\gamma_1^{n_1}\gamma_2\gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2+1}\gamma_3^{n_3}\gamma_4^{n_4} \\ &= \gamma_4^{n_4}\gamma_3^{n_3}\gamma_2^{n_2}\gamma_1^{n_1}(\gamma_2)^2(-1)^{n_1}\gamma_1^{n_1}\gamma_2^{n_2}\gamma_3^{n_3}\gamma_4^{n_4} \\ &= (-1)^{n_1}\mathbf{1} \end{aligned} \quad (4.20)$$

のように確認できる。したがって、(4.14) は  $\chi(n)$  を用いて次のように書くことができる：

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu,\alpha} \eta_\mu(n) (\bar{\chi}_\alpha(n)\chi_\alpha(n+\hat{\mu}) - \bar{\chi}_\alpha(n)\chi_\alpha(n-\hat{\mu})) + \sum_{n,\alpha} \hat{M}\bar{\chi}_\alpha(n)\chi_\alpha(n) \quad (4.21)$$

元の格子上の作用 (4.14) から  $\gamma$  行列を取り除いたためスピノルの添え字  $\alpha = 1, 2, \dots$  は任意の値をとることができるようになった。次のステップとして、 $\alpha$  が 1 成分のみの場合を考えると、 $\alpha$  についての和を落とすことができる：

$$S_F^{(\text{stag})} = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \eta_\mu(n) (\bar{\chi}(n)\chi(n+\hat{\mu}) - \bar{\chi}(n)\chi(n-\hat{\mu})) + \sum_n \hat{M}\bar{\chi}(n)\chi(n) \quad (4.22)$$

この作用は格子点あたり 1 自由度のみを含み、元の Dirac 構造は符号因子  $\eta_\mu(n)$  のみである。このような 1 成分のみの格子フェルミオン場  $\chi(n)$  に対する作用 (4.22) のことをスタaggered 作用と呼び、 $\chi(n)$  はスタaggered フェルミオンと呼ばれる。

スタaggered 作用は元々の連続理論におけるカイラル対称性は損なわれているが、その名残が存在する。スタaggered フェルミオンに対するカイラル変換を

$$\begin{aligned} \chi(n) &\rightarrow \chi'(n) = e^{i\alpha\eta_5(n)}\chi(n), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ \bar{\chi}(n) &\rightarrow \bar{\chi}'(n) = \bar{\chi}(n)e^{i\alpha\eta_5(n)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

のように定義する。ここで、

$$\eta_5(n) := (-1)^{n_1+n_2+n_3+n_4} \quad (4.24)$$

はスタaggered フェルミオンにおける  $\gamma_5$  の役割を果たしている。 $\hat{M} = 0$  のとき、スタaggered 作用はカイラル変換 (4.23) の下で不変である。したがって、スタaggered 作用は  $U(1)_V \times U(1)_A$  の大域的対称性を残している。このため、QCD のカイラル対称性の自発的破れに関連した研究にスタaggered フェルミオンを用いることができる。

最後にスタaggerドフェルミオンが元の Dirac 場の形式にどのように再構築されるのかを簡単に結果だけまとめる．ある単位超立方体の原点を  $\hat{x}_\mu = 2N_\mu$  ( $N_\mu \in \mathbb{Z}^4$ ) とする．このとき，この単位超立方体における  $2^4$  個の頂点の格子座標は

$$\hat{r}_\mu = 2N_\mu + \rho_\mu \quad (4.25)$$

のように表現できる．ここで， $\rho_\mu$  は 0 または 1 のみを成分として持つ．この座標を用いて， $\chi(n)$  は次のように再ラベリングされる：

$$\begin{aligned} \chi_\rho(N) &:= \chi(2N + \rho) \\ \bar{\chi}_\rho(N) &:= \bar{\chi}(2N + \rho) \end{aligned} \quad (4.26)$$

座標  $N_\mu = (N_1, N_2, N_3, N_4)$  は格子間隔  $2a$  の格子上の時空点をラベルし，添え字  $\rho$  は  $\chi$  場の  $2^4$  個の成分をラベルする．これらの成分から，線形結合

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_\alpha^f(N) &= \mathcal{N}_0 \sum_\rho (T_\rho)_{\alpha f} \chi_\rho(N) \\ \hat{\bar{\psi}}_\alpha^f(N) &= \mathcal{N}_0 \sum_\rho \bar{\chi}_\rho(N) (T_\rho^\dagger)_{\alpha f} \end{aligned} \quad (4.27)$$

をとることにより，成分  $\alpha (= 1, \dots, 2^{4/2})$  とともに  $2^{4/2}$  種類のフレーバーを持つ Dirac 場  $\psi_\alpha^f$  ( $f = 1, 2, \dots, 2^{4/2}$ ) が構成される．ここで，

$$T_\rho = \gamma_1^{\rho_1} \gamma_2^{\rho_2} \gamma_3^{\rho_3} \gamma_4^{\rho_4} \quad (4.28)$$

である．規格化定数  $\mathcal{N}_0$  を適切に選べば，作用 (4.22) は場  $\hat{\psi}$  と  $\hat{\bar{\psi}}$  によって次のような形をとる：

$$S_F^{(\text{stag})} = \sum_f \sum_N \hat{\bar{\psi}}^f(N) (\gamma_\mu \hat{\partial}_\mu + \hat{M}) \hat{\psi}^f(N) + \dots \quad (4.29)$$

ここで， $\hat{\partial}_\mu$  は新しくブロック化された格子上での微分（差分）であり， $+\dots$  は単純な連続極限でゼロになる項である．よって，スタaggerドフェルミオンは単純な連続極限のもとで元の連続理論を再現しうるが， $2^{4/2} = 4$  重に縮退したクォークフレーバーを持つ理論に制限される．ここでのフレーバーは本来の連続な QCD のフレーバーと区別してスタaggerドフェルミオンのテイストと呼ばれる．

## 4.2 格子上のゲージボゾン

本節では格子上でのゲージボゾン（ゲージ場）の導入方法について簡単に扱う．連続理論において，ゲージ場は作用が局所的ゲージ不変性を持つように導入された．特に，フェルミオン場の作用が局所的ゲージ不変性を持つようにするために微分を共変微分に置き換えることによってフェルミオンとゲージ場の相互作用項が導入された．4.2.1 節では格子上におけるゲージ不変性を導入してゲージ不変なスタaggerド作用を構成する．また，私たちはこのスタaggerド Dirac 演算子の反ユニタリー対称性についても議論する．4.2.2 では格子上におけるゲージ場の運動項としてプラケット作用を導入する．

### 4.2.1 格子上のゲージ相互作用

ここでは格子上のフェルミオンとして、スタaggerドフェルミオンを考える。まず、自由場のスタaggerド作用の運動項は

$$S_F^{(\text{stag})} = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \eta_\mu(n) (\bar{\chi}(n)\chi(n+\hat{\mu}) - \bar{\chi}(n)\chi(n-\hat{\mu})) \quad (4.30)$$

で与えられる。以後私たちは無質量フェルミオンを考えることにする。フェルミオン場に関して連続理論と最も異なる点は、連続理論のフェルミオン場が  $\bar{\psi}(x)\psi(x)$  のように局所的な双線形であるのに対して、スタaggerドフェルミオンの場合は（他の格子フェルミオンも同様）、 $\bar{\chi}(n)\chi(n+\hat{\mu})$  のように非局所的な双線形になることである。連続理論のように単純にフェルミオン場に対する局所的  $SU(N_c)$  ゲージ変換

$$\begin{aligned} \chi(n) &\rightarrow \chi'(n) = V(n)\chi(n), & V \in SU(N_c), \\ \bar{\chi}(n) &\rightarrow \bar{\chi}'(n) = \bar{\chi}(n)V^\dagger(n) \end{aligned} \quad (4.31)$$

を定義すると、(4.30) の第1項の  $\bar{\chi}(n)\chi(n+\hat{\mu})$  は

$$\bar{\chi}(n)\chi(n+\hat{\mu}) \rightarrow \bar{\chi}'(n)\chi'(n+\hat{\mu}) = \bar{\chi}(n)V^\dagger(n)V(n+\hat{\mu})\chi(n+\hat{\mu}) \quad (4.32)$$

となるため、(4.30) は局所的ゲージ不変ではない。(4.30) を局所的ゲージ変換 (4.32) の下で不変にするために、次のような形でゲージ場を導入する：

$$U(x,y) = \text{P exp} \left( ig \int_x^y A_\mu^b(z(\tau)) T^b \frac{dz_\mu(\tau)}{d\tau} d\tau \right) \quad (4.33)$$

この線積分はゲージ場の平行移動子として知られている。(4.33) はクォークを点  $x$  から点  $y$  まで経路  $z(\tau)$  に沿って平行移動させるときに生じる因子で、P は経路順序積を表す。格子上において、(4.33) は  $\mu$  方向において隣り合う格子点  $n$  から格子点  $n+\hat{\mu}$  を結ぶリンク  $U(n, n+\hat{\mu})$  とみなすことができる。格子間隔  $a$  が十分小さいとき、 $U(n, n+\hat{\mu})$  は次のように近似される：

$$U(n, n+\hat{\mu}) := U_{n,\mu} \simeq e^{igaA_\mu^b(n)T^b} \quad (4.34)$$

この  $U_{n,\mu}$  を格子上のリンク変数と呼ぶ。したがって、格子上のゲージ場はリンク変数 (4.34) の形のユニタリー表現として導入される。リンク変数 (4.34) は格子点  $n$  から格子点  $n+\hat{\mu}$  を結ぶ方向に向き付けられた量を意味するので、逆方向、すなわち、格子点  $n+\hat{\mu}$  から格子点  $n$  を結ぶ方向へのリンク変数は次のように表現される（図 4.2 参照）：

$$U_{n+\hat{\mu},-\mu} = U_{n,\mu}^\dagger \quad (4.35)$$

したがって、ゲージ場を導入したスタaggerド作用は次のように表現できる：

$$S_F^{(\text{stag})} = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \eta_\mu(n) \left( \bar{\chi}(n)U_{n,\mu}\chi(n+\hat{\mu}) - \bar{\chi}(n)U_{n-\hat{\mu},\mu}^\dagger\chi(n-\hat{\mu}) \right) \quad (4.36)$$

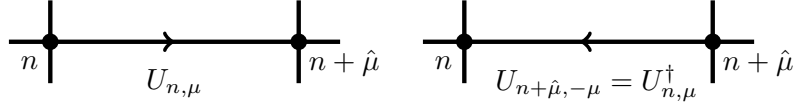


図 4.2 リンク変数  $U_{n,\mu}$  および  $U_{n,\mu}^\dagger$

リンク変数によって格子上にゲージ場が導入されたので、再び局所的ゲージ変換に戻る。(4.36) を局所的ゲージ変換 (4.32) の下で不変にするために、リンク変数の局所的ゲージ変換は

$$\begin{aligned} U_{n,\mu} &\rightarrow U'_{n,\mu} = V(n)U_{n,\mu}V^\dagger(n+\hat{\mu}) \\ U_{n-\hat{\mu},\mu}^\dagger &\rightarrow U'^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu} = V(n)U_{n-\hat{\mu},\mu}^\dagger V^\dagger(n-\hat{\mu}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

のように定義される。局所的ゲージ変換 (4.31) と (4.37) を同時に実行することによって、(4.30) は局所的ゲージ変換の下で不変にすることができる。

次に、格子上におけるゲージ場の局所的ゲージ変換 (4.37) が連続極限  $a \rightarrow 0$  において、元の連続理論の局所的ゲージ変換を再現できるかを確認する。(4.34) を格子間隔  $a$  の 1 次まで展開すると、

$$U_{n,\mu} = \mathbf{1} + igaA_\mu^b(n)T^b + \dots \quad (4.38)$$

であるから、これを (4.37) の第 1 式に代入すると、

$$\begin{aligned} U'_{n,\mu} &= V(n)(\mathbf{1} + igaA_\mu^b(n)T^b + \dots)(V^\dagger(n) + a\partial_\mu V^\dagger(n) + \dots) \\ \mathbf{1} + igaA_\mu^b(n)T^b + \dots &= \mathbf{1} + igaV(n)A_\mu^b(n)T^bV^\dagger(n) + aV(n)\partial_\mu V^\dagger(n) + \dots \end{aligned} \quad (4.39)$$

が得られる。この両辺から  $a$  の 1 次の項のみを取り出し、その両辺を  $iga$  で割ると、

$$A_\mu^b(n)T^b = V(n)A_\mu^b(n)T^bV^\dagger(n) - \frac{i}{g}V(n)\partial_\mu V^\dagger(n) \quad (4.40)$$

が得られる。したがって、連続極限  $a \rightarrow 0$  において、置き換え (4.2) により、元の連続理論におけるゲージ場の局所的ゲージ変換 (2.16) が再現される。

スタaggerド作用を重みとして持つ経路積分は次式で与えられる：

$$Z_F = \int \mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi e^{-S_F^{(\text{stag})}}, \quad (4.41)$$

$$S_F^{(\text{stag})} = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \eta_\mu(n) \left( \bar{\chi}(n)U_{n,\mu}\chi(n+\hat{\mu}) - \bar{\chi}(n)U_{n-\hat{\mu},\mu}^\dagger\chi(n-\hat{\mu}) \right) \quad (4.42)$$

ここで、 $\mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi$  はスタaggerドフェルミオンについての経路積分測度である。フェルミオン場は経路積分において Grassmann 変数であるから、(2.52) のように (4.41) はスタaggerド Dirac 演算子の行列式で表現できる。このとき、(4.42) は

$$S_F^{(\text{stag})} = \sum_{n,m} \bar{\chi}(n)D_{n,m}^{(\text{stag})}\chi(m), \quad (4.43)$$

$$D_{n,m}^{(\text{stag})} = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \eta_\mu(n) \left( U_{n,\mu}\delta_{n+\hat{\mu},m} - U_{n-\hat{\mu},\mu}^\dagger\delta_{n-\hat{\mu},m} \right) \quad (4.44)$$

のように書き直すことができる. (4.43) の形を持った (4.41) は

$$Z_F = \int \mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi e^{-S_F^{(\text{stag})}} = \det D^{(\text{stag})} \quad (4.45)$$

のように行列式で表現できる.

#### スタaggerド Dirac 演算子の反ユニタリー対称性

ここでは, 2.2.3 節において QCD の Dirac 演算子 (連続理論) における反ユニタリー対称性を議論したように, スタaggerド Dirac 演算子 (4.44) に対する反ユニタリー対称性を考える. 連続理論において,  $SU(2)_c$  ゲージ群の基本表現における Dirac 演算子は  $\beta = 1$  に属している. 一方で,  $SU(2)_c$  ゲージ群の基本表現におけるスタaggerド Dirac 演算子は  $\gamma$  行列が消去され, その名残として符号因子 (4.19) を持っている. よって, (2.101) に対応する反ユニタリー対称性は単純に

$$[\mathcal{T}^{(\text{stag})}, D^{(\text{stag})}] = [\tau^2 K, D^{(\text{stag})}] = 0 \quad (4.46)$$

の形であると考えられる. 実際にこの交換関係が成り立つことを確認する.

$$[\tau^2 K, D^{(\text{stag})}] = 0 \iff \tau^2 K D^{(\text{stag})} = D^{(\text{stag})} \tau^2 K \quad (4.47)$$

この両辺に右から  $K^{-1}\tau^2$  を掛けると,

$$\tau^2 K D^{(\text{stag})} K^{-1} \tau^2 = D^{(\text{stag})} \tau^2 K K^{-1} \tau^2 \iff \tau^2 (D^{(\text{stag})})^* \tau^2 = D^{(\text{stag})} \quad (4.48)$$

が得られる. (4.48) の左辺は  $SU(2)$  の擬実性 (2.103) によって右辺と一致するから, (4.46) が成り立つことが確認される. 次に, 反ユニタリー演算子の 2 乗  $(\mathcal{T}^{(\text{stag})})^2$  を考えると,

$$(\mathcal{T}^{(\text{stag})})^2 = \tau^2 K \tau^2 K = \tau^2 (\tau^2)^* = -1 \quad (4.49)$$

が得られる. したがって,  $SU(2)_c$  ゲージ群の基本表現におけるスタaggerド Dirac 演算子は  $\beta = 4$  に属し, スタaggerドフェルミオンによる格子化によって Dirac 演算子が  $\beta: 1 \rightarrow 4$  と変更を受ける. すなわち, このスタaggerド Dirac 演算子の固有値は Kramers 縮退していることを意味する.

## 4.2.2 プラケット作用

本節では格子上におけるゲージ場の作用を導入する. ここではプラケット作用と呼ばれる最も単純な作用を取り扱う. 4.2.1 節で見たように, 格子上のゲージ場はリンク変数  $U_{n,\mu}$  で与えられ, 局所的ゲージ変換 (4.37) を持っている. よって, ゲージ場の作用は要請として (4.37) の下で不変になるように構成される. まずは, リンク変数を用いて, 次式で与えられるプラケット変数を定義する:

$$U_{n,\mu\nu} := U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger \quad (4.50)$$

プラケット変数は格子点  $n$  から最隣接の格子点を経路順に結び付けるようにリンク変数を掛けて

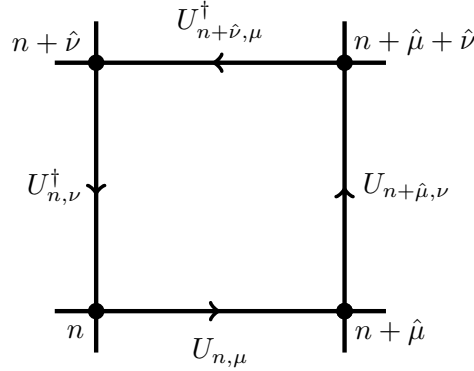


図 4.3 プラケット変数  $U_{n,\mu\nu} = U_{n,\mu}U_{n+\hat{\mu},\nu}U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger$

構成される閉じたループである (図 4.3 参照). プラケット変数 (4.50) のトレースをとると, 局所的ゲージ変換 (4.37) の下で明確に不変であるため,  $\text{tr } U_{n,\mu\nu}$  はゲージ不変量である. プラケット作用はこのゲージ不変量を用いて次式で定義される:

$$S_{\text{plaq}} = \beta \sum_{n,\mu,\nu} \text{Re tr } U_{n,\mu\nu} = \beta \sum_{n,\mu,\nu} \text{Re tr } U_{n,\mu}U_{n+\hat{\mu},\nu}U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger \quad (4.51)$$

ここで,  $\beta = 1/g^2$  である. プラケット作用 (4.51) がゲージ場の作用として適切かどうかは連続極限において Yang-Mills 作用を再現できれば確かめられる. そのためにプラケット変数 (4.50) を (4.34) によって書き直し,  $a$  について 2 次まで展開すると,

$$\begin{aligned} U_{n,\mu\nu} &= U_{n,\mu}U_{n+\hat{\mu},\nu}U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger \\ &= e^{igaA_\mu^a(n)T^a} e^{igaA_\nu^a(n+\hat{\mu})T^a} e^{-igaA_\mu^a(n+\hat{\nu})T^a} e^{-igaA_\nu^a(n)T^a} \\ &= \mathbf{1} + iga^2 F_{\mu\nu}^b(n)T^b + \dots = e^{iga^2 F_{\mu\nu}^b(n)T^b} \end{aligned} \quad (4.52)$$

が得られる. ここで,  $F_{\mu\nu}^b$  は場の強度 (2.41) であり,  $A_\nu^b(n+\hat{\mu}) = A_\nu^b(n) + a\partial_\mu A_\nu^b(n) + \dots$  を用いた. (4.52) を (4.51) に代入すると,

$$\begin{aligned} S_{\text{plaq}} &= \frac{1}{g^2} \sum_{n,\mu,\nu} \text{Re tr } U_{n,\mu\nu} = \frac{1}{g^2} \sum_{n,\mu,\nu} \text{Re tr } e^{iga^2 F_{\mu\nu}^b(n)T^b} \\ &= \frac{1}{g^2} \sum_{n,\mu,\nu} \text{Re} \left( \text{tr } \mathbf{1} + iga^2 F_{\mu\nu}^b(n) \text{tr } T^b - \frac{1}{2}g^2 a^4 F_{\mu\nu}^b(n)F_{\mu\nu}^c(n) \text{tr } T^b T^c \dots \right) \\ &= \frac{1}{g^2} \sum_{n,\mu,\nu} \left( \text{tr } \mathbf{1} - \frac{1}{4}g^2 a^4 F_{\mu\nu}^b(n)F_{\mu\nu}^b(n) + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

が得られる. ここで,  $\text{tr } T^a = 0$  と (2.10) を用いた. 物理的に意味のない定数項を無視して, 連続極限  $a \rightarrow 0$  を考えると,

$$S_{\text{plaq}} \rightarrow -S_{\text{YM}} = - \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^b(x)F_{\mu\nu}^b(x) \quad (4.54)$$

が得られる。よって、ブラケット作用は連続極限において Yang-Mills 作用を再現する。

ブラケット作用を重みとして持つリンク変数に対する経路積分は次式で与えられる：

$$Z_G = \int \mathcal{D}U \exp \left( \sum_{\text{plaq}} S_{\text{plaq}} \right) = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} \exp \left( \beta \sum_{n,\mu,\nu} \text{Re tr } U_{n,\mu\nu} \right) \quad (4.55)$$

ここで、 $dU_{n,\mu}$  は Haar 測度であり、任意の  $V \in \text{SU}(N_c)$  に対して、

$$d(VU_{n,\mu}) = d(U_{n,\mu}V) = dU_{n,\mu} \quad (4.56)$$

を満たす。ここでは例として、 $\text{SU}(2)_c$  ゲージ群における  $2 \times 2$  行列表現に対する Haar 測度を与える。 $\text{SU}(2)$  の  $2 \times 2$  行列は  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  に対して次のように書くことができる：

$$U_{\text{SU}(2)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (4.57)$$

このとき、(4.57) は  $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  に対して  $\alpha = x_0 + ix_3$ ,  $\beta = x_2 + ix_1$  と置くと、

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \quad (4.58)$$

を満たしている。これは 4 次元空間における単位長さの 3 次元球面上が  $\text{SU}(2)$  行列によって覆われていることを示す。 $\text{SU}(2)$  行列に対する Haar 測度は 4 次元座標  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  を用いて、

$$\int dU_{\text{SU}(2)} = \int d^4x \delta(|x|^2 - 1) \quad (4.59)$$

と書くことができる。積分変数に対して、円筒座標  $x_0 = x_0$ ,  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $x_3 = r \sin \theta \sin \phi$  による変数変換をすると、(4.59) の右辺は

$$\int d^4x \delta(|x|^2 - 1) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-1}^1 dx_0 \int_0^\infty r^2 dr \delta(x_0^2 + r^2 - 1) \quad (4.60)$$

と表現することができる。

### 4.3 格子シミュレーションの方法

本節では格子ゲージ理論において物理量の期待値を計算するための手法として知られるモンテカルロ法による数値シミュレーションを簡単に紹介する。本論文では  $\text{SU}(2)_c$  ゲージ群におけるゲージ場のリンク変数を生成するための方法としてよく知られる熱浴法によるアルゴリズムを簡潔に取り扱う。

まずは例として作用  $S_G(U)$  を重みとして持つリンク変数  $U$  についての経路積分における物理量  $O(U)$  の期待値を考える。期待値  $\langle O \rangle$  は

$$\langle O \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U O(U) e^{-S_G(U)}}{\int \mathcal{D}U e^{-S_G(U)}} \quad (4.61)$$



のように書くことができる。期待値 (4.61) を計算することは非常に多くの多重積分を実行しなければならないことを意味する。例えば、4次元時空におけるサイズが  $10^4$  の格子を用いる場合、リンク変数の数は  $4 \times 10^4$  個存在する。SU(2)<sub>c</sub> ゲージ群の場合、各リンク変数は3個の実パラメータを持つ関数であるから、積分すべきリンク変数の数は  $3 \times 4 \times 10^4 = 120000$  個存在する。1個のリンク変数についての積分を10点のメッシュで近似すると、多重積分は  $10^{120000}$  回実行する必要がある。この例は直接積分が実質的に不可能であることを意味する。そのため、期待値の計算は統計力学的な手法の1つであるモンテカルロ法を用いる。リンク変数の配位は Boltzmann 因子  $e^{-S_G(U)}$  によって与えられる確率分布を持つように生成できれば効率よく計算することができる。実際はほとんどの配位が経路積分に寄与せず、経路積分に大きく寄与する配位のみを適切に抽出できればよいことが知られている。これは重点サンプリングと呼ばれる手法である。もし  $N$  個の配位  $U_i, i = 1, 2, \dots, N$  を生成することができれば、物理量の期待値はアンサンブル平均として

$$\langle O \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O(U_i) \quad (4.62)$$

と近似することができる。当然  $N$  が大きければ大きいほどより正確な値に近づく。本論文ではゲージ場の作用としてプラケット作用、フェルミオンの作用としてスタaggered作用を採用している。これらの作用を重みとして持つ物理量  $O$  の期待値は (4.45) と (4.55) から、

$$\langle O \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U O(U) \det D^{(\text{stag})} e^{\sum_{\text{plaq}} S_{\text{plaq}}}}{\int \mathcal{D}U \det D^{(\text{stag})} e^{\sum_{\text{plaq}} S_{\text{plaq}}}} \quad (4.63)$$

で与えられる。ここでの (4.63) は  $\det D^{(\text{stag})} e^{\sum_{\text{plaq}} S_{\text{plaq}}}$  を重みとしてリンク変数の配位を生成し、アンサンブル平均 (4.62) として物理量の期待値が得られることを示す。実際の計算において  $\det D^{(\text{stag})}$  の計算は非常に時間がかかることが知られている。そのため従来から、 $\det D^{(\text{stag})} \rightarrow 1$  とする近似法がよく用いられてきた。この近似はクエンチ近似と呼ばれ、物理的には真空におけるフェルミオンと反フェルミオンの対生成を無視することに対応する。モンテカルロ法によるシミュレーションアルゴリズムの一般論は Ref. [8–11] などに委ね、本論文ではクエンチ近似での SU(2)<sub>c</sub> ゲージ場のリンク変数を生成するためのアルゴリズムとして SU(2) 格子ゲージ理論の熱浴法を取り扱う。

### 4.3.1 熱浴法

まずは導入として1次元積分が熱浴法によって計算される場合について考える。この1次元積分は次式で与えられる物理量  $O$  の期待値であるとする：

$$\langle O \rangle = \int_a^b dx O(x) P(x) \quad (4.64)$$

ここで、 $P(x)$  は規格化された確率分布

$$1 = \int_a^b dx P(x) \quad (4.65)$$

を表す。次に、変数変換：

$$y = \int_a^x dz P(z) =: Y(x) \quad (4.66)$$

を考える。このとき、積分区間が  $x: a \rightarrow b$  から  $y: 0 \rightarrow 1$  に置き換えられるとすると、(4.64) は

$$\langle O \rangle = \int_0^1 dy \hat{O}(y) \quad (4.67)$$

と表現できる。この変数変換によって確率分布  $P(x)$  に従う確率変数  $x$  は区間  $[0, 1]$  に一様分布する確率変数  $y$  に置き換えられたことになる。ここで、 $\hat{O}(y)$  は次式で与えられる：

$$\hat{O}(y) := O(x(y)) \quad (4.68)$$

物理量  $O$  が (4.68) の形で書かれるためには (4.66) の積分を実行して、 $x$  を  $y$  の関数として得られなければならない：

$$x = Y^{-1}(y) \quad (4.69)$$

熱浴法による積分は、(4.66) の変数  $y$  が区間  $[0, 1]$  中に一様分布している乱数であるとして、それを変数とする関数  $Y^{-1}(y)$  が解析的に得られれば実行できることになる。よって、熱浴法による積分計算の手順は次のようにまとめられる：

- (1) 区間  $[0, 1]$  に一様分布する乱数  $y$  を生成する。
- (2) (4.69) の関数  $Y^{-1}$  を解析的に導出し、 $x$  を計算する。
- (3) (1)–(2) の操作を  $N$  回繰り返して、期待値  $O$  をアンサンブル平均として計算する：

$$\langle O \rangle = \int_0^1 dy \hat{O}(y) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O(x(y_i)) \quad (4.70)$$

## SU(2) 格子ゲージ理論の熱浴法

ここではクエンチ近似での  $SU(2)_c$  ゲージ群におけるゲージ場のリンク変数を熱浴法によって生成する方法を記述する。まず、プラケット作用 (4.51) は

$$\begin{aligned} S_{\text{plaq}} &= \beta \sum_{n,\mu,\nu} \text{Re tr } U_{n,\mu\nu} = \frac{\beta}{2} \sum_{n,\mu,\nu} \text{tr} (U_{n,\mu\nu} + U_{n,\mu\nu}^\dagger) \\ &= \frac{\beta}{2} \sum_{n,\mu,\nu} \text{tr} \left( U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger + U_{n,\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu}^\dagger U_{n,\mu}^\dagger \right) \end{aligned} \quad (4.71)$$

のように書くことができる。ここで、リンク変数  $U_{n,\mu}$  に着目し、その周りのリンク変数が固定された熱浴であると考えて、 $U_{n,\mu}$  が与えられた重みに従って変化するように構成する。4次元格子の場合、 $U_{n,\mu}$  を含んでいるプラケットは6個存在するので、 $U_{n,\mu}$  の周りのプラケット変数の和は次のように書くことができる：

$$\sum_{\nu(\neq\mu)} \text{tr} \left( U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger + U_{n,\mu} U_{n+\hat{\mu}-\hat{\nu},\nu}^\dagger U_{n-\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n-\hat{\nu},\nu} \right) = \text{tr } U_{n,\mu} V_{n,\mu} \quad (4.72)$$

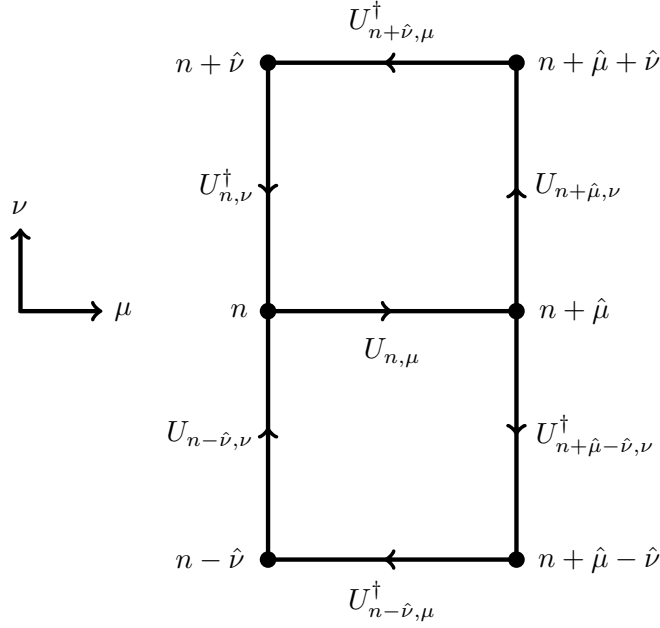


図 4.4 リンク変数  $U_{n, \mu}$  に対するステイブル  $V_{n, \mu}$  のイメージ

ここで,  $V_{n, \mu}$  は

$$V_{n, \mu} = \sum_{\nu (\neq \mu)} \left( U_{n + \hat{\nu}, \nu} U_{n + \hat{\nu}, \mu}^\dagger U_{n, \nu}^\dagger + U_{n + \hat{\nu} - \hat{\nu}, \nu}^\dagger U_{n - \hat{\nu}, \mu}^\dagger U_{n - \hat{\nu}, \nu} \right) \quad (4.73)$$

と定義される.  $V_{n, \mu}$  は  $U_{n, \mu}$  に対する熱浴であり, その形からステイブルと呼ばれる. 同様に,  $U_{n, \mu}^\dagger$  の周りのプラケット変数の和は

$$\sum_{\nu (\neq \mu)} \text{tr} \left( U_{n, \nu} U_{n + \hat{\nu}, \mu} U_{n + \hat{\nu}, \nu}^\dagger U_{n, \mu}^\dagger + U_{n - \hat{\nu}, \nu}^\dagger U_{n - \hat{\nu}, \mu} U_{n + \hat{\nu} - \hat{\nu}, \nu} U_{n, \mu}^\dagger \right) = \text{tr} V_{n, \mu}^\dagger U_{n, \mu}^\dagger \quad (4.74)$$

と書くことができる. よって, (4.72) と (4.74) から, リンク変数  $U_{n, \mu}$  に関するプラケット作用は

$$S_{\text{plaq}}(U_{n, \mu}) = \frac{\beta}{2} \text{tr} \left( U_{n, \mu} V_{n, \mu} + V_{n, \mu}^\dagger U_{n, \mu}^\dagger \right) \quad (4.75)$$

である. (4.73) は  $SU(2)$  行列の和である.  $SU(2)$  行列の和は定数倍を除いて再び  $SU(2)$  行列になることから,  $V_{n, \mu}$  は実パラメータ  $v_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$  を用いて,

$$V_{n, \mu} = v_0 \mathbf{1} + i v_j \tau_j = R V_0, \quad R \in \mathbb{R}, \quad V_0 \in SU(2), \quad (4.76)$$

$$R^2 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

と書くことができる. ここで,  $\tau_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  は Pauli 行列である. 次に, 新しいプラケット変数  $W$  を実パラメータ  $a_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$  を用いて,

$$W := U_{n, \mu} V_0 = a_0 \mathbf{1} + i a_j \tau_j, \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad (4.77)$$

と定義する. (4.77) のトレースが  $\text{tr } W = 2a_0$  であるから, (4.75) は (4.77) を用いて,

$$\begin{aligned} S_{\text{plaq}}(U_{n,\mu}) &= \frac{\beta}{2} \text{tr} (U_{n,\mu} V_{n,\mu} + V_{n,\mu}^\dagger U_{n,\mu}^\dagger) = \text{tr} (U_{n,\mu} R V_0 + R V_0^\dagger U_{n,\mu}^\dagger) \\ &= \frac{\beta}{2} R \text{tr} (W + W^\dagger) = 2\beta R a_0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

したがって, リンク変数  $U_{n,\mu}$  に関する積分は次のように書くことができる:

$$\int dU_{n,\mu} \exp(S_{\text{plaq}}(U_{n,\mu})) = \int d(U_{n,\mu} V_0) \exp(2\beta R a_0) = \int dW \exp(2\beta R a_0) \quad (4.79)$$

SU(2) 行列  $W$  についての積分は (4.59) と (4.60) によって,

$$\begin{aligned} \int dW \exp(2\beta R a_0) &= \int d^4 a \delta(|a|^2 - 1) \exp(2\beta R a_0) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-1}^1 da_0 \exp(2\beta R a_0) \int_0^\infty dr r^2 \delta(r^2 - (1 - a_0^2)) \end{aligned} \quad (4.80)$$

と表現できる. 積分変数  $r$  についての積分を実行するために,  $t = r^2$  と置く.  $dr = dt/(2\sqrt{t})$  であるから,  $r$  についての積分は

$$\int_0^\infty dr r^2 \delta(r^2 - (1 - a_0^2)) = \int_0^\infty dt \frac{\sqrt{t}}{2} \delta(t - (1 - a_0^2)) = \frac{\sqrt{1 - a_0^2}}{2} \quad (4.81)$$

のように実行できる. 次に, (4.81) を (4.66) のように変数変換することを考える. 積分変数  $\theta$  は  $\omega = \cos \theta$  と置くと,  $d\theta = -d\omega/\sin \theta$  であり, 積分区間は  $\omega : 1 \rightarrow -1$  となる. 積分変数  $a_0$  は  $z = \exp(2\beta R a_0)$  と置くと,  $da_0 = dz/(2\beta R z)$  であり, 積分区間は  $z : e^{-2\beta R} \rightarrow e^{2\beta R}$  となる. この変数変換により, (4.80) は

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-1}^1 da_0 \exp(2\beta R a_0) \frac{\sqrt{1 - a_0^2}}{2} \\ &= \frac{1}{4\beta R} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\omega \int_{e^{-2\beta R}}^{e^{2\beta R}} dz \sqrt{1 - a_0^2(z)}, \quad a_0(z) = \frac{1}{2\beta R} \log z \end{aligned} \quad (4.82)$$

となる.  $z$  に対する積分は一様分布する変数  $0 \leq y \leq 1$  に対して,  $z = Ay + B$  と置くことで評価することができる. このとき,  $A = 2 \sinh(2\beta R)$ ,  $B = e^{-2\beta R}$  である. 以上により, リンク変数  $U_{n,\mu}$  は熱浴法によって与えられた重みに従って生成される. SU(2) 格子ゲージ理論の熱浴法によるアルゴリズムは以下のようにまとめられる:

- (1) 一様乱数  $0 \leq y \leq 1$  を生成する.
- (2) (1) の  $y$  を用いて,  $a_0(y) = \frac{1}{2\beta R} \log(Ay + B)$  を計算する.
- (3)  $a_0(y)$  が重み  $\sqrt{1 - a_0^2(y)}$  に従って生成されるように調整する. 調整は次のように実行する:
  - (a) 一様乱数  $0 \leq \xi \leq 1$  を生成する.
  - (b) もし,  $\xi \leq \sqrt{1 - a_0^2}$  ならば, それを採用して終わる.

- (c) もし、 $\xi > \sqrt{1 - a_0^2}$  ならば、それを採用せずに (1) まで戻り、採用されるまで繰り返す。実際には繰り返しの回数を最大  $N$  回としておく。
- (4) 一様乱数  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  および  $-1 \leq \omega \leq 1$  を生成する。
- (5) (4) の  $\phi, \omega$  を用いて、4次元円筒座標に変換する前の変数

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{1 - a_0^2(y)} \omega, \\
a_2 &= \sqrt{1 - a_0^2(y)} \sqrt{1 - \omega^2} \cos \phi, \\
a_3 &= \sqrt{1 - a_0^2(y)} \sqrt{1 - \omega^2} \sin \phi
\end{aligned} \tag{4.83}$$

を構成する。

- (6) (5) で得られた  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  を用いて、新しい  $SU(2)$  行列の変数  $W$  を構成する。
- (7) (4.77) から  $U_{n,\mu} = WV_0^{-1}$  を計算し、リンク変数をアップデートする。

(1) から (7) までの一連の方法は  $SU(2)$  格子ゲージ理論における  $N$  回ヒットの熱浴法と呼ばれる。

実際の格子ゲージ理論の数値シミュレーションは熱浴法に加えて、過緩和法と呼ばれるアルゴリズムを組み合わせて実行されている。過緩和法は次式で定義される変換の下でリンク変数のアップデートが実行される：

$$U_{n,\mu}^{(\text{new})} = V_0 U_{n,\mu}^{(\text{old})} V_0^\dagger \tag{4.84}$$

この変換の下で、(4.75) は

$$\begin{aligned}
S_{\text{plaq}}^{(\text{new})}(U_{n,\mu}) &= \frac{\beta}{2} \text{tr} \left( U_{n,\mu}^{(\text{new})} V_{n,\mu} + V_{n,\mu}^\dagger U_{n,\mu}^{(\text{new})} \right) \\
&= \frac{\beta}{2} \text{tr} \left( V_0 U_{n,\mu}^{(\text{old})} V_0^\dagger R V_0 + R V_0^\dagger V_0^\dagger U_{n,\mu}^{(\text{old})} V_0 \right) \\
&= \frac{\beta}{2} \text{tr} \left( R V_0 U_{n,\mu}^{(\text{old})} + U_{n,\mu}^{(\text{old})} R V_0 \right) = S_{\text{plaq}}^{(\text{old})}(U_{n,\mu})
\end{aligned} \tag{4.85}$$

となり、作用の形は不変である。よって、このアップデートは常に採用される。過緩和法における変数のアップデートは熱浴法に比べて変数を大きく変えることができるため、与えられた重みを持つ確率分布に従った偏りのないリンク変数を効率よく生成できることが知られている。本論文では、 $SU(2)$  格子ゲージ理論におけるゲージ場のリンク変数を生成するために、10回ヒットの熱浴法1回の後に過緩和法4回を行う操作を1セットとしている。このような1セットの操作はスイープと呼ばれる。リンク変数のアップデートは通常1スイープで独立な配位を得ることは難しく、相関を取り除くために複数回繰り返し実行する必要がある。一般に、その回数は格子のサイズや結合定数  $\beta$  の値によって異なる。その詳細は Ref. [9, 10] などに委ねる。

## 第 5 章

# カイラルランダム行列の準位統計

本章では低エネルギー定数を決定するために重要な役割を果たすカイラルランダム行列の準位統計について簡単にまとめる。2.3 節において述べたように、カイラル対称性の自発的破れの秩序変数であるカイラル凝縮  $\Sigma$  は Banks–Casher 関係式によって Dirac 演算子の固有値の原点近傍における固有値密度から決定できる。この固有値密度は全固有値のヒストグラムであるから大域的な観測量である。そのため、カイラル凝縮は実用上原点近傍における固有値密度をそのまま使用するのではなく、その逆数である平均準位間隔から測定される。したがって、カイラル凝縮の値の信頼性は平均準位間隔をどれだけ正確に測定できるかによって決まる。正確な測定を実現するために用いられる方法として、カイラルランダム行列の準位統計を利用する方法が知られている。第 3 章で述べたように、低エネルギー有効理論における質量項はカイラル凝縮に比例し、 $\epsilon$  領域において、質量項はカイラルランダム行列の  $\sigma$  模型表現における微視的スケールと等価である。この事実から、Dirac 固有値の統計的な振る舞いがカイラルランダム行列の固有値の統計的な振る舞いと一致することが期待される [81]。さらに、カイラルランダム行列は微視的固有値密度などの固有値準位の振る舞いを統計分布として解析的に導出することができるため、それに対応する Dirac 固有値分布と 1 パラメータフィットすることによって平均準位間隔が正確に得られる。

カイラルランダム行列は、行列要素がある確率分布に従う乱数である行列のうち、カイラル対称性を持っているエルミート行列のことを表す。第 1 章や 2.2.3 節で少し述べたように、カイラルランダム行列は反ユニタリー対称性の有無によって 3 種類に分類され、Dirac 演算子の反ユニタリー対称性による分類と完全に対応する [25]。これらは系の詳細によらない行列が持ちうる大域的対称性のみで決まることから対称性クラスと呼ばれる。カイラルランダム行列における 3 種類の対称性クラスの違いはその行列要素の実成分数に現れ、それらは Dyson 指数  $\beta = 1, 2, 4$  によって表される。ところで 3.3 節で述べたように、化学ポテンシャル  $\mu$  を含む  $SU(2)_c$  ゲージ理論は  $\mu = 0$  のときに存在した Pauli–Gürsey 対称性が  $\mu \neq 0$  で破れる。4.2.1 節で述べたスタッガード Dirac 演算子の場合は  $\mu \neq 0$  により、反ユニタリー対称性を持っている  $\beta = 4$  のクラスから反ユニタリー対称性を持たない  $\beta = 2$  のクラスに破れることを意味する。このようにある対称性クラスからそのクラスが持っている対称性を破る項を加えることによって別の対称性クラスに遷移する現象は対称性クラス間のクロスオーバーと呼ばれる。同様のクロスオーバーはカイラルランダム行列にも

存在し、遷移カイラルランダム行列と呼ばれる。したがって、化学ポテンシャル  $\mu$  を含む  $SU(2)_c$  ゲージ理論の Dirac 演算子は  $\mu$  が小さければ、遷移カイラルランダム行列と同じ対称性クラス間のクロスオーバーに属すると予想される。スタaggered Dirac 演算子は  $\beta: 4 \rightarrow 2$  の遷移カイラルランダム行列である chGSE–chGUE クロスオーバーに属することが期待される。この予想が正しければ、chGSE–chGUE クロスオーバーの準位統計を利用して、カイラル凝縮だけでなく、 $\pi$  中間子の崩壊定数も決定できると期待される。この期待は Ref. [44, 45] において最初に実現されている。Ref. [44, 45] では低エネルギー定数を求めるための統計量として最小固有値分布または最隣接準位間隔分布のみを用いている。本論文ではその手法を改善し、より精密に低エネルギー定数を求めるために、複数の個別固有値分布を利用することを考える。複数の個別固有値分布を考える利点は第 6 章において述べる。

本章では特に第 6 章で直接利用する原点近傍の個別固有値分布の取り扱いについてまとめる。5.1 節ではカイラルランダム行列を導入する。5.2 節では個別固有値分布の導出について  $\beta = 2$  の場合の結果を中心にまとめる。5.3 節では遷移カイラルランダム行列である chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布を取り扱う。本章の議論は主に Ref. [53, 54, 82, 83] に従っている。

## 5.1 カイラルランダム行列の導入

本節ではカイラルランダム行列の導入として、その要素の集合であるカイラルガウス型アンサンブルについて簡単にレビューする。カイラルガウス型アンサンブルはその要素自体よりもその固有値準位が重要である。その理由の一つとして、固有値準位の相関関数を具体的に計算できることが挙げられる。まず、5.1.1 節ではカイラルガウス型アンサンブルの行列要素に関する確率分布関数を与える。次に、5.1.2 節では 5.1.1 節で与えた確率分布関数を固有値に関する確率分布関数に記述し直す方法について簡単にまとめる。

### 5.1.1 カイラルガウス型アンサンブル

カイラルクラスに限らずランダム行列を取り扱う場合、その要素がある確率分布関数に従う乱数である行列の集合を考える。最もよく知られた例はその確率分布関数をガウス分布とする場合である。このようなランダム行列の集合はガウス型アンサンブルと呼ばれる。例えば、簡単のために  $2 \times 2$  実行列  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

を考えると、ガウス型アンサンブルの確率分布関数  $P(A)$  は行列要素  $A_{ij}$  によって

$$\begin{aligned} P(A) (dA) &\propto e^{-\frac{1}{2}\text{tr}(A^T A)} (dA) \\ &= e^{-\frac{1}{2}A_{11}^2} e^{-\frac{1}{2}A_{12}^2} e^{-\frac{1}{2}A_{21}^2} e^{-\frac{1}{2}A_{22}^2} dA_{11}dA_{12}dA_{21}dA_{22} \end{aligned} \quad (5.2)$$

のように書くことができる．(5.2)のように確率分布関数を定義することによって，各行列要素  $A_{ij}$  についての確率分布関数をガウス分布（分散  $\sigma^2 = 1$ ）にすることができる．本論文では対称ランダム行列のみを取り扱うため，ここでは実行列  $A$  を  $2 \times 2$  実対称行列  $H$  にしたガウス型アンサンブルを考える．この確率分布関数  $P(H)$  は (5.2) と同様に，

$$\begin{aligned} P(H) dH &\propto e^{-\frac{1}{2}\text{tr} H^2} dA \\ &= e^{-\frac{1}{2}H_{11}^2} e^{-H_{12}^2} e^{-\frac{1}{2}H_{22}^2} dA_{11}dA_{12}dA_{22} \end{aligned} \quad (5.3)$$

と書くことができる．ここで，行列に対称性を課したことで行列要素の数，すなわち，積分変数が減少することに注意が必要である．実際にはこの  $H$  を一般の  $N \times N$  行列にしたアンサンブルのことをガウス型アンサンブルと呼ぶことが多い．本論文では単純なガウス型アンサンブルについてはこれ以上言及しない．

次に，カイラルガウス型アンサンブルを考える．行列構造の観点からカイラルランダム行列は QCD におけるカイラル対称性  $\{H, \gamma_5\} = 0$  を満たすようなエルミート行列  $H$  に対するランダム行列であると言える．カイラルガウス型アンサンブルはエルミート行列  $H$  が次のような非対角ブロック構造を持つ行列のアンサンブルである：

$$H = \begin{pmatrix} 0 & W \\ W^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

ここで， $W$  は一般に  $(N + \nu) \times N$  行列である． $W$  の要素の取り方はその実成分数によって 3 種類（実数，複素数，実四元数）存在し，それぞれ対応する Dyson 指数  $\beta = 1, 2, 4$  を持つ [25]．2.2 節で述べたように，このような行列構造は Dirac 演算子の行列構造 (2.88) に対応する． $W$  を長方形行列にすることによって， $H$  のゼロ固有値，すなわち，トポロジカルチャージが再現される．これら 3 つのアンサンブルはそれぞれ， $\beta = 1$ ：カイラルガウス型直交アンサンブル (chGOE)， $\beta = 2$ ：カイラルガウス型ユニタリーアンサンブル (chGUE)， $\beta = 4$ ：カイラルガウス型シンプレクティックアンサンブル (chGSE) と呼ばれる．カイラルガウス型アンサンブルの確率分布関数  $P(H)$  は  $W$  で記述できるので，例えば， $\beta = 2$  の場合は

$$e^{-\frac{1}{2}\text{tr} H^2} (dH) = e^{-\text{tr}(W^\dagger W)} (dW), \quad (dW) = \prod_{i=1}^{N+\nu} \prod_{j=1}^N dW_{ij}^{(\text{Re})} dW_{ij}^{(\text{Im})} \quad (5.5)$$

と与えられる．カイラルランダム行列が重要である理由はカイラルガウス型アンサンブルから固有値分布や準位間の相関関数を具体的に導出できる点にある．その固有値分布が QCD の低エネルギーにおける Dirac 固有値の統計的な性質を記述できることが知られる．カイラルランダム行列の要素はガウス分布に従う乱数であるが，行列構造が対称であるために，その固有値の準位は相関を持つことが知られる．



## 5.1.2 固有値分布関数

本節ではカイラルガウス型アンサンブルの行列要素に関する確率分布関数を固有値に関する確率分布関数で記述することを考える．まず例として， $\beta = 1$  の場合を考える．chGOE の確率分布関数は

$$P(W) dW \propto e^{-\frac{1}{2}\text{tr}({}^T W W)} (dW), \quad (dW) = \prod_{i=1}^{N+\nu} \prod_{j=1}^N dW_{ij} \quad (5.6)$$

で与えられる．確率分布関数の重みとして， $N \times N$  行列  ${}^T W W$  の固有値はすべて正である（正定値行列）．このとき， $(N + \nu) \times N$  実行列  $W$  は  $(N + \nu) \times (N + \nu)$  直交行列  $V$  と  $N \times N$  直交行列  $U$  によって特異値分解される：

$$W = V S {}^T U, \quad S = \begin{pmatrix} \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_N) \\ 0_{\nu \times N} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

ここで， $N \times N$  対角行列の対角成分はすべて正である，i.e.,  $w_i > 0, i = 1, 2, \dots, N$ ．行列  ${}^T W W$  の固有値を  $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, N$  としたとき， ${}^T W W$  は行列  $W$  の特異値分解 (5.7) から

$${}^T W W = U {}^T S {}^T V V S {}^T U = U \text{diag}(w_1^2, w_2^2, \dots, w_N^2) {}^T U \quad (5.8)$$

となるので， ${}^T W W$  の固有値と  $W$  の特異値は  $\lambda_i = w_i^2$  の関係を持っている．よって，以下では chGOE における特異値に関する確率分布関数を考えることにする．

行列  $W$  の特異値分解 (5.7) において， $(N + \nu) \times N$  行列  $W$  の要素を  $(N + \nu) \times N$  対角行列  $S$  の要素に変数変換する場合のヤコビアンは  $V, U$  がゼロでない行列式を持つとすると，次のように表現される：

$$W = V S {}^T U \implies (dW) = |\det V|^N |\det U|^{N+\nu} (dS) \quad (5.9)$$

証明：  $(N + \nu) \times N$  行列  $W$  を  $W = (\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N)$  のように  $N + \nu$  成分の列ベクトルが並べられたものとみなす．行列  $S$  に対しても同様である．(5.7) のうち，まず， $W = V S$  の部分を考えて， $W$  は  $(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots, \mathbf{W}_N) = (V \mathbf{S}_1, V \mathbf{S}_2, \dots, V \mathbf{S}_N)$  と書くことができる． $j$  番目の列ベクトルに対するヤコビアンは， $dW_{ij} =: d(W_j)_i$  と表記し直すと， $\bigwedge_{i=1}^{N+\nu} d(W_j)_i = \det V \bigwedge_{i=1}^{N+\nu} d(S_j)_i$  であるから，

$$\bigwedge_{j=1}^N \bigwedge_{i=1}^{N+\nu} dW_{ij} = \bigwedge_{j=1}^N (\det V) \bigwedge_{i=1}^{N+\nu} dS_{ij} = (\det V)^N \bigwedge_{j=1}^N \bigwedge_{i=1}^{N+\nu} dS_{ij} \quad (5.10)$$

のように書くことができる．同様に， $W = S U$  を考えると， ${}^T W = {}^T U {}^T S$  によって，

$$\bigwedge_{i=1}^{N+\nu} \bigwedge_{j=1}^N dW_{ji} = \bigwedge_{j=1}^{N+\nu} (\det U) \bigwedge_{i=1}^N dS_{ji} = (\det U)^{N+\nu} \bigwedge_{j=1}^N \bigwedge_{i=1}^{N+\nu} dS_{ji} \quad (5.11)$$

が得られる．したがって，(5.10) と (5.11) の結果を合わせることで (5.9) が示される．  $\square$

行列  $W$  の特異値分解 (5.7) の両辺の微分をとると,

$$dW = dV S^T U + V dS^T U + V S (d^T U) \quad (5.12)$$

となるので, 左から  ${}^T V$ , 右から  $U$  を掛けると,

$${}^T V dW U = dS + {}^T V dV S + S (d^T U) U \quad (5.13)$$

が得られる.  $V, U$  は直交行列なので, (5.9) の行列式は 1 である. よって, (5.12) と (5.13) から  $(dW) = ({}^T V dW U)$  が得られる. すなわち, (5.13) の右辺が計算できればよい. まず, (5.13) の右辺第 2 項について,  ${}^T V dV$  が  $(N + \nu) \times (N + \nu)$  実反対称行列であるから対角成分はゼロである.  ${}^T V dV$  の非対角成分を  $\delta V_{ij}$  と表記すると,  ${}^T V dV S$  の行列成分は次のように書くことができる:

$${}^T V dV S = \begin{pmatrix} 0 & w_2 \delta V_{12} & w_3 \delta V_{13} & \dots & w_N \delta V_{1N} \\ -w_1 \delta V_{12} & 0 & w_3 \delta V_{23} & \dots & w_N \delta V_{2N} \\ -w_1 \delta V_{13} & -w_2 \delta V_{23} & 0 & \dots & w_N \delta V_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_1 \delta V_{1N} & -w_2 \delta V_{2N} & -w_3 \delta V_{3N} & \dots & 0 \\ \hline -w_1 \delta V_{1,N+\nu} & -w_2 \delta V_{2,N+\nu} & -w_3 \delta V_{3,N+\nu} & \dots & -w_N \delta V_{N,N+\nu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_1 \delta V_{1,N+\nu} & -w_2 \delta V_{2,N+\nu} & -w_3 \delta V_{3,N+\nu} & \dots & -w_N \delta V_{N,N+\nu} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

同様に, (5.13) の右辺第 3 項について,  $(d^T U) U$  が  $N \times N$  実反対称行列であるから対角成分はゼロである.  $(d^T U) U$  の非対角成分を  $\delta U_{ij}$  と表記すると,  $S(d^T U) U$  の行列成分は,  ${}^T V dV S$  とは異なり, 下側の  $\nu \times N$  ブロック行列が零行列になる:

$$S d^T U U = \begin{pmatrix} 0 & w_1 \delta U_{12} & w_1 \delta U_{13} & \dots & w_1 \delta U_{1N} \\ -w_2 \delta U_{12} & 0 & w_2 \delta U_{23} & \dots & w_2 \delta U_{2N} \\ -w_3 \delta U_{13} & -w_3 \delta U_{23} & 0 & \dots & w_3 \delta U_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_N \delta U_{1N} & -w_N \delta U_{2N} & -w_N \delta U_{3N} & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

したがって、(5.13) は次のように書くことができる：  ${}^T V dW U = dS + {}^T V dV S + S (d{}^T U) U =$

$$\left( \begin{array}{cccc} dw_1 & w_2 \delta V_{12} + w_1 \delta U_{12} & w_3 \delta V_{13} + w_1 \delta U_{13} & \dots & w_N \delta V_{1N} + w_1 \delta U_{1N} \\ -w_1 \delta V_{12} - w_2 \delta U_{12} & dw_2 & w_3 \delta V_{23} + w_2 \delta U_{23} & \dots & w_N \delta V_{2N} + w_2 \delta U_{2N} \\ -w_1 \delta V_{13} - w_3 \delta U_{13} & -w_2 \delta V_{23} - w_3 \delta V_{23} & dw_3 & \dots & w_N \delta V_{3N} + w_3 \delta U_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_1 \delta V_{1N} - w_N \delta U_{1N} & -w_2 \delta V_{2N} - w_N \delta U_{2N} & -w_3 \delta V_{3N} - w_N \delta V_{3N} & \dots & dw_N \\ \hline -w_1 \delta V_{1,N+1} & -w_2 \delta V_{2,N+1} & -w_3 \delta V_{3,N+1} & \dots & -w_N \delta V_{N,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -w_1 \delta V_{1,N+\nu} & -w_2 \delta V_{2,N+\nu} & -w_3 \delta V_{3,N+3} & \dots & -w_N \delta V_{N,N+\nu} \end{array} \right) \quad (5.16)$$

積分測度は  $(dW) = ({}^T V dW U)$  で与えられるので、(5.16) の上側の  $N \times N$  部分行列と下側の  $\nu \times N$  部分行列に現れる微分が計算できればよい。まず、上側のブロック行列を考えると、対角成分からは  $\bigwedge_{i=1}^N dw_i$  が得られる。非対角成分からは  $(i, j)$  成分と  $(j, i)$  成分の外積を計算すると、

$$\bigwedge_{i>j}^N (w_j \delta V_{ij} + w_i \delta U_{ij}) \wedge (-w_i \delta V_{ij} - w_j \delta U_{ij}) = \bigwedge_{i>j}^N (w_i^2 - w_j^2) \delta V_{ij} \wedge \delta U_{ij} \quad (5.17)$$

が得られる。下側のブロック行列からは

$$\bigwedge_{j=1}^N \bigwedge_{i=N+1}^{N+\nu} \delta w_j V_{ij} = \bigwedge_{j=1}^N w_j^\nu \bigwedge_{i=N+1}^{N+\nu} \delta V_{ij} \quad (5.18)$$

が得られる。したがって、積分測度  $(dW)$  は  $W$  の特異値  $w_i$  によって次のように書くことができる：

$$(dW) = \prod_{i=1}^N w_i^\nu \prod_{i>j}^N |w_i^2 - w_j^2| \prod_{i=1}^N dw_i \prod_{i>j}^N (d{}^T U U)_{ij} \prod_{j=1}^N \prod_{i=N+1}^{N+\nu} ({}^T V dV)_{ij} \quad (5.19)$$

(5.19) は (5.5) における  $(dW)$  を  $W$  の特異値に置き換えたものである。chGOE の固有値分布関数を得るためには、行列  $W$  の特異値  $w_i$  を行列  ${}^T W W$  の固有値  $\lambda_i$  に書き直す必要がある。  $U, V$  を含む部分は固有ベクトルについての分布関数を意味するため、ここでは固有値についての分布関数のみを考える。このとき、固有値分布関数は

$$P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \prod_{i=1}^N d\lambda_i \propto \prod_{i=1}^N e^{-\lambda_i} \lambda_i^{(\nu-1)/2} \prod_{i>j}^N |\lambda_i - \lambda_j| \prod_{i=1}^N d\lambda_i \quad (5.20)$$

のように与えられる。

$\beta = 2, 4$  の場合も同様に固有値分布関数を得ることができるが、詳細は Ref. [82, 86] に委ね、ここでは各  $\beta$  についての結果のみを示す。

$$P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \prod_{i=1}^N d\lambda_i \propto \prod_{i=1}^N e^{-\frac{\beta}{2} \lambda_i} \lambda_i^{\beta(\nu+1)/2-1} \prod_{i>j}^N |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \prod_{i=1}^N d\lambda_i \quad (5.21)$$

## 5.2 個別固有値分布

本節ではカイラルガウス型アンサンブルの個別固有値分布の取り扱い方法について簡単にまとめる．ここでは， $\beta = 2$  の場合を例として，前節で述べた固有値分布関数から個別固有値分布を得るために必要な統計量について記述する．ランダム行列のアンサンブルの固有値準位に関する統計量としてよく知られる例は  $k$  点相関関数  $R_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  およびギャップ確率  $E_k(I)$  の 2 つである．

$k$  点相関関数  $R_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  は  $N$  個の固有値の中から取り出した  $k$  個の固有値  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  が  $k$  個の微小区間  $d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_k$  の中にそれぞれ一つずつ含まれる確率を意味し，

$$R_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \frac{N!}{(N-k)!} \int_0^\infty d\lambda_{k+1} \cdots d\lambda_N P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \quad (5.22)$$

と定義される．ここで， $P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  は固有値分布関数 (5.21) における確率密度を表す．積分区間はカイラルガウス型アンサンブルの場合，非負の固有値を持つので，正の実数区間  $[0, \infty)$  にとる．以下では相関関数の行列式表示を導出する．固有値分布関数に含まれる  $\prod_{i>j}^N |\lambda_i - \lambda_j|$  に着目すると，この差積は Vandermonde 行列式として知られ，

$$\prod_{i>j}^N (\lambda_i - \lambda_j) = \det [\lambda_j^{i-1}]_{i,j=1}^N = \det [C_{i-1}(\lambda_j)]_{i,j=1}^N \quad (5.23)$$

の関係を満たす．ここで，2 つ目の等号は行列式の値が行列式の各行に任意の数を掛けて他の行に加えても変わらない性質を利用して，多項式  $C_{i-1}(x_j)$  によって表現している．ただし， $C_{i-1}(x_j)$  は係数が 1 である  $x^{i-1}$  を最高次とする任意の多項式  $C_{i-1}(x_j) = x_j^{i-1} + \cdots$  である（モニック多項式）．よって，任意の  $h_i \neq 0$  に対して， $\beta = 2$  のときの (5.21) に含まれる Vandermonde 行列式は

$$\begin{aligned} \prod_{i>j}^N |\lambda_i - \lambda_j|^2 &= \left( \det [C_{i-1}(\lambda_j)]_{i,j=1}^N \right)^2 = \prod_{n=0}^{N-1} h_n \left( \det \left[ \frac{1}{\sqrt{h_{i-1}}} C_{i-1}(\lambda_j) \right]_{i,j=1}^N \right)^2 \\ &= \prod_{n=0}^{N-1} h_n \det \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h_n} C_n(\lambda_i) C_n(\lambda_j) \right]_{i,j=1}^N \end{aligned} \quad (5.24)$$

のように表現できる．ここで，行列式の 2 乗の計算は  $(\det M)^2 = \det M^T M = \det [\sum_n M_{in} M_{jn}]$  を用いた．(5.21) の重み関数  $w(\lambda) := e^{-\lambda} \lambda^\nu = e^{-\lambda + \nu \log \lambda}$  を行列式に含めると，固有値分布関数は

$$P_{\beta=2}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \prod_{n=0}^{N-1} h_n \det [K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^N \quad (5.25)$$

$$K(\lambda_i, \lambda_j) := \sqrt{w(\lambda_i) w(\lambda_j)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h_n} C_n(\lambda_i) C_n(\lambda_j) \quad (5.26)$$

のように与えられる。ここで、 $K(\lambda_i, \lambda_j)$  はカーネル（積分核）と呼ばれる。カーネルにおける多項式  $C_n(\lambda)$  は重み関数  $w(\lambda)$  に対する直交多項式であるとする。すなわち、

$$\int_0^\infty w(\lambda) C_m(\lambda) C_n(\lambda) d\lambda = h_n \delta_{mn} \quad (5.27)$$

の関係が満たされるとする。このとき、カーネルは直交関係 (5.27) から次式を満たす：

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K(\lambda_1, \lambda_2) K(\lambda_2, \lambda_3) d\lambda_2 &= K(\lambda_1, \lambda_3) \\ \int_0^\infty K(\lambda, \lambda) d\lambda &= N \end{aligned} \quad (5.28)$$

相関関数の行列式表示を得るために、私たちは次の行列式  $D_N$  を定義する：

$$D_N := \det [K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^N \quad (5.29)$$

$D_N(a, b)$  が行列  $[K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^N$  から第  $a$  行と第  $b$  行を除いて作られた  $(N-1) \times (N-1)$  行列であるとして、 $D_N$  の第  $N$  列について余因子展開すると、

$$D_N = \sum_{i=1}^N (-1)^{i+N} D_N(i, N) K(\lambda_i, \lambda_N) \quad (5.30)$$

が得られる。さらに、 $D_N(a, b; c, d)$  が  $D_N(a, b)$  から第  $c$  行と第  $d$  列を除いて作られた  $(N-2) \times (N-2)$  行列であるとして、 $D_N(i, N)$  の第  $N-1$  行について余因子展開すると、

$$\begin{aligned} D_N &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{i+j-1} D_N(i, N; N-1, j) K(\lambda_i, \lambda_N) K(\lambda_N, \lambda_j) \\ &\quad + D_N(N, N) K(\lambda_N, \lambda_N) \end{aligned} \quad (5.31)$$

が得られる。(5.31) を  $\lambda_N$  について積分すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty D_N d\lambda_N &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^{i+j-1} D_N(i, N; N-1, j) K(\lambda_i, \lambda_j) + D_N(N, N) N \\ &= -(N-1) D_{N-1} + D_{N-1} N = D_{N-1} \end{aligned} \quad (5.32)$$

が得られる。ここで、1つ目の等号は (5.28) を用いた。2つ目の等号は第1項の  $j$  についての和が  $D_N(N, N)$  の第  $i$  行についての展開と同じであることから、 $D_{N-1} = D_N(a, b)$  と改めて置いている。この関係を繰り返し用いて、順次  $\lambda_{N-1}, \lambda_{N-2}, \dots$  について積分すると、

$$\int_0^\infty D_N d\lambda_N \lambda_{N-1} \cdots \lambda_{k+1} = (N-k)! D_{N-k} \quad (5.33)$$

が得られる。この積分を  $N$  回繰り返すと  $P_{\beta=2}$  の規格化定数として  $N! \prod_{n=0}^{N-1} h_n$  が得られるため、 $k$  点相関関数は

$$R_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \det [K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^k \quad (5.34)$$

で与えられる。したがって、カーネルを得ることができれば、その行列式から  $k$  点相関関数が計算できる。具体的に行列式を  $k = 1, 2$  の場合に展開すると、

$$\begin{aligned} R_1(\lambda_1) &= K(\lambda_1, \lambda_1) = \rho(\lambda_1) \\ R_2(\lambda_1, \lambda_2) &= \det [K(\lambda_i, \lambda_j)]_{i,j=1}^2 = K(\lambda_1, \lambda_1)K(\lambda_2, \lambda_2) - K^2(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

が得られる。  $R_1(\lambda_1)$  は固有値密度  $\rho(\lambda_1)$  を表し、  $R_2(\lambda_1, \lambda_2)$  は固有値準位の 2 点相関関数を表す。

次に、ギャップ確率  $E_k(I)$  は、区間  $I = (a, b)$  の中に  $k$  個の固有値が含まれる確率を意味し、

$$\begin{aligned} E_k(I) &= \binom{n}{k} \int_I d\lambda_1 \cdots d\lambda_k \int_{\mathbb{R} \setminus I} d\lambda_{k+1} \cdots d\lambda_N P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \\ &= \frac{N!}{k!(N-k)!} \int d\lambda_1 \cdots d\lambda_N P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \prod_{j=1}^k \chi_I(\lambda_j) \prod_{l=k+1}^N (1 - \chi_I(\lambda_l)) \end{aligned} \quad (5.35)$$

と定義される。ここで、関数  $\chi_I(\lambda)$  は

$$\chi_I(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in I, \\ 0, & \lambda \notin I, \end{cases} \quad (5.36)$$

によって定義される。また、  $P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  は規格化されているとする。ギャップ確率  $E_k(I)$  を用いる利点は固有値準位の並び順を考慮した統計量を評価できる点にある。例えば、区間  $I = [0, s)$  を考えると、  $E_0(I)$  は区間  $I$  の中に固有値が存在しない確率を表す。一方、  $E_0([0, s)) - E_0([0, s + \delta s))$  は区間  $dI := [s, s + \delta s)$  の中に固有値が少なくとも 1 個存在する確率を表す。この区間が微小であれば、  $E_0([0, s)) - E_0([0, s + \delta s))$  は  $\mathcal{O}(\delta s^1)$  で固有値が 1 個だけ含まれる確率とみなせる。  $E_0(s) := E_0([0, s))$  と置くと、  $\delta s \rightarrow 0$  の極限において、

$$p_1(s) = -\frac{d}{ds} E_0(s) \quad (5.37)$$

と定義される  $p_1(s)$  は最小固有値の確率密度を表す。つまり、ギャップ確率  $E_0(s)$  は最小固有値の累積分布

$$\int_0^s p_1(s') ds' = 1 - E_0(s) \quad (5.38)$$

を意味する。次に、  $E_l(s)$  を考える。  $E_l(s)$  は区間  $I$  中に  $l$  個の固有値が存在する確率を表し、  $E_l(s + \delta s)$  は固有値が区間  $I$  中に  $l$  個存在する確率と固有値が区間  $I$  中に  $l - 1$  個、微小区間  $dI$  中に 1 個存在する確率の和を表す。よって、  $E_l(s) - E_l(s + \delta s)$  は微小区間  $dI$  中に  $l + 1$  番目の固有値が 1 個存在する確率と固有値が区間  $I$  中に  $l - 1$  個、微小区間  $dI$  中に 1 個存在する確率の差を表すので、  $\delta s \rightarrow 0$  の極限において

$$-\frac{d}{ds} E_l(s) = p_{l+1}(s) - p_l(s) \quad (5.39)$$

となる． $p_0(s) = 0$  とし， $l = 0, 1, \dots, k-1$  について和をとることによって， $k$  番目に小さい固有値分布が

$$p_k(s) = -\frac{d}{ds} \sum_{l=0}^{k-1} E_l(s) \quad (5.40)$$

のように表現できる．したがって，ギャップ確率を得ることができれば， $k$  番目の小さい固有値の確率密度，すなわち， $k$  番目の個別固有値分布が計算できる．

ギャップ確率  $E_k(I)$  の具体的な形は相関関数  $R_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  を用いて，次のような Fredholm 行列式によって表現される（詳細は [84] に委ねる）：

$$E_k(I) = \frac{1}{k!} \left( -\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^k \det(\mathbf{1} - \xi \hat{K}_I) \Big|_{\xi=1} \quad (5.41)$$

ここで， $\hat{K}_I$  は区間  $I$  上の  $L^2$  関数  $f(\lambda)$  に作用するカーネル演算子

$$(\hat{K}_I f)(\lambda) = \int_I K(\lambda, \lambda') f(\lambda') d\lambda' \quad (5.42)$$

である．各  $k$  におけるギャップ確率  $E_k(I)$  は Fredholm 行列式とカーネル演算子  $\hat{K}_I$  のレゾルベント演算子による式

$$T_n(I) := \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{K}_I(\mathbf{1} - \hat{K}_I)^{-1})^n \quad (5.43)$$

を用いることによって，次のように表現される [83, 85]：

$$\begin{aligned} E_0(I) &= \det(\mathbf{1} - \hat{K}_I) \\ E_1(I) &= E_0 T_1 \\ E_2(I) &= \frac{E_0}{2!} (T_1^2 - T_2) \\ E_3(I) &= \frac{E_0}{3!} (T_1^3 - 3T_1 T_2 + 2T_3) \\ E_4(I) &= \frac{E_0}{4!} (T_1^4 - 6T_1^2 T_2 + 3T_2^2 + 8T_1 T_3 - 6T_4) \\ E_5(I) &= \frac{E_0}{5!} (T_1^5 - 10T_1^3 T_2 + 20T_1^2 T_3 + 15T_1 T_2^2 - 30T_1 T_4 - 20T_2 T_3 + 24T_5) \\ E_6(I) &= \frac{E_0}{6!} \left\{ \begin{aligned} &T_1^6 - 15T_1^4 T_2 + 40T_1^3 T_3 + 45T_1^2 T_2^2 - 90T_1^2 T_4 - 120T_1 T_2 T_3 \\ &\quad - 15T_2^3 + 144T_1 T_5 + 90T_2 T_4 + 40T_3^2 - 120T_6 \end{aligned} \right\} \\ E_7(I) &= \frac{E_0}{7!} \left\{ \begin{aligned} &T_1^7 - 21T_1^5 T_2 + 70T_1^4 T_3 + 105T_1^3 T_2^2 - 210T_1^3 T_4 - 420T_1^2 T_2 T_3 \\ &\quad - 105T_1 T_2^3 + 504T_1^2 T_5 + 630T_1 T_2 T_4 + 280T_1 T_3^2 + 210T_2^2 T_3 \\ &\quad - 840T_1 T_6 - 504T_2 T_5 - 420T_3 T_4 + 720T_7 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Fredholm 行列式を計算するためにはカーネルを得る必要がある．カーネルは (5.26) で与えられるように直交多項式で表現される．このため，直交多項式を用いたカーネルの導出は直交多項

式法と呼ばれる．詳細は [82, 86] などに委ねることにして，ここでは結果のみを以下で与える．(5.26) は直交多項式のすべての次数についての和を含んでいるが，この困難を解消する方法として，Christoffel–Darboux 公式

$$K(\lambda_i, \lambda_j) = \sqrt{w(\lambda_i)w(\lambda_j)} \frac{1}{h_{N-1}} \frac{C_N(\lambda_i)C_{N-1}(\lambda_j) - C_{N-1}(\lambda_i)C_N(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (5.45)$$

が知られている． $\beta = 2$  の場合，重み関数  $w(\lambda) = e^{-\lambda} \lambda^\nu$  である直交関係から直交多項式  $C_n(\lambda)$  は Laguerre 多項式  $L_n^{(\nu)}(\lambda)$  の定数倍であり，

$$C_n(\lambda) = (-1)^n n! L_n^{(\nu)}(\lambda), \quad h_n = \Gamma(n+1)\Gamma(n+\nu+1) \quad (5.46)$$

のように書くことができる．カイラルガウス型アンサンブルの原点近傍にスケールするために，微視的スケール (2.116) として， $x_i = \lambda_i 4N$  を定義する．このとき Laguerre 多項式の  $n \rightarrow \infty$  での漸近公式

$$L_n^{(\nu)}(\lambda) \sim \left(\frac{n}{\lambda}\right)^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{n\lambda}) \quad (5.47)$$

が成り立つ．ここで， $J_\nu(\lambda)$  は Bessel 関数である．(5.47) を (5.45) に代入すると，次の Bessel カーネルが得られる：

$$K(\lambda_i, \lambda_j) \sim \frac{\sqrt{x_i} J_{\nu+1}(\sqrt{x_i}) J_\nu(\sqrt{x_j}) - \sqrt{x_j} J_{\nu+1}(\sqrt{x_j}) J_\nu(\sqrt{x_i})}{2(x_i - x_j)} \quad (5.48)$$

数学的な議論の詳細は [87] に委ねる．

Fredholm 行列式の具体的な形は Painlevé 超越方程式の解によって解析的に得られることが知られている [88]．特に本節で取り扱っている chGUE の場合は  $k$  番目の個別固有値分布の具体的な関数形が Ref. [46] において図示されている．しかし，5.3 節で取り扱う遷移カイラルランダム行列の  $k$  番目の個別固有値分布の具体的な関数形が厳密に導出された例は見られない．そのため本論文では (5.42) のカーネル演算子に対する Fredholm 行列式を評価するための効率のよい精密な数値計算方法として知られる Nyström 型の離散化法 [89–91] を用いて Fredholm 行列式を評価する．以下では Ref. [83, 90, 91] において示される結果のみを与える．この方法は Fredholm 行列式におけるカーネル演算子  $\hat{K}_I$  が次のように単純に離散化される：

$$\det(\mathbf{1} - \hat{K}_I) \simeq \det(\mathbf{1}_{N \times N} - \mathcal{K}_I), \quad \mathcal{K}_I = [K(x_i, x_j) \sqrt{w_i w_j}]_{i,j=1}^N \quad (5.49)$$

$N \times N$  行列  $\mathcal{K}_I$  の行列式の評価は求積法によってなされる．求積法は実区間  $I = [a, b]$  から採取される  $N$  個の点の集合  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  および正の重みの集合  $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$  に対して，

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) w_i \simeq \int_a^b f(x) dx \quad (5.50)$$

与えられる． $a, b$  を複素平面における実軸上の焦点とする楕円  $\varepsilon$  の長軸および短軸の長さが  $R, r$  であるとし， $\mathcal{K}_I$  が  $\varepsilon \times \varepsilon$  上で有界かつ正則な関数であるとする．このとき  $N \rightarrow \infty$  におい



て, (5.49) の右辺は左辺に一樣収束する. その誤差は  $\rho = \sqrt{(R+r)/(R-r)}$  が定義されるとき,  $O(\rho^{-N})$  で抑制される. (5.43) も同様に,

$$\text{tr}(\hat{K}_I(\mathbf{1} - \hat{K}_I)^{-1})^n \simeq \text{tr}(\mathcal{K}_I(\mathbf{1}_N - \mathcal{K}_I)^{-1})^n \quad (5.51)$$

のように離散化され, (5.51) は  $N \rightarrow \infty$  において同じ誤差で左辺に収束する. 本論文では具体的な点の集合  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  として  $N$  次の Legendre 多項式の零点を用いる Gauss–Legendre 求積法を採用する. カイラルランダム行列のカーネルの場合, Legendre 多項式の零点は区間  $I$  を  $I = [-1, 1]$  から  $I = [0, s]$  にリスケールした上で求められる.

Fredholm 行列式の Nyström 型の離散化法による数値計算を Gauss–Legendre 求積法によって実行する場合における誤差評価は Ref. [90, 91] においてなされている. 例えば, GUE のスペクトルバルクにおいて得られるサインカーネル  $K(x, y) = \sin \pi(x - y)/(\pi(x - y))$  の場合,  $E_0(I)$  は,  $N$  次の近似における誤差が  $O(e^{-\text{const.}N})$  で抑えられ, 非常に優れた精度で得られることが示されている. 格子ゲージ理論におけるシミュレーションによって得られる Dirac 固有値分布のヒストグラムに生じる誤差と比べて,  $p_k(s)$  の誤差は極めて小さい. 小さい  $k$  に対する  $p_k(s)$  は  $N$  を少なくとも 20 以上にすれば十分な精度が得られる [44]. 図 5.1 は Fredholm 行列式を Nyström 型の離散化法 (Gauss–Legendre 求積法) によって評価した場合における chGUE の 8 番目までの小さい個別固有値分布を図示している. 図 5.1 はカーネル (5.48) において  $\nu = 0$  とした場合を図示している.  $\nu = 0$  は QCD においてトポロジカルチャージが 0 であることに対応する. 本論文では  $\nu = 0$  の場合のみ取り扱う.

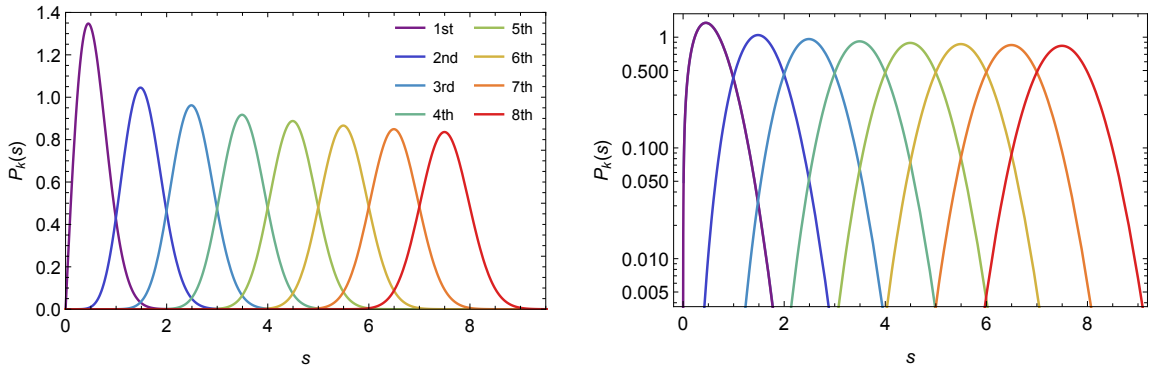


図 5.1 chGUE の個別固有値分布の例 ( $\nu = 0$ ): 左図は最初の 8 つの個別固有値分布の線形プロットを示し, 右図はその対数プロットを示す. これらの図は Ref. [46, 53, 54, 85] における図の再現である.

### 5.3 遷移カイラルランダム行列

カイラルガウス型アンサンブルは 3 つの対称性クラスを持っているが, それに加えて, これらのクラス間を遷移するアンサンブルも存在する. このような対称性クラス間を遷移するようなラ

ンダム行列は遷移ランダム行列と呼ばれる。特に、遷移カイラルランダム行列のアンサンブルは  $N \times N'$  行列  $A, B$  に対して、 $(N + N') \times (N + N')$  行列  $H$  を

$$H = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^\dagger & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.52)$$

のように組み合わせて表現される（後で見ると実際はもう少し複雑にパラメトライズされる）。行列  $B$  はカイラルガウス型アンサンブルの 3 種類  $\beta = 1, 2, 4$  のどれでもよいが、行列  $A$  は  $B$  と同じ、または、より強い対称性を持っているクラスに属する行列を選ぶ。初期条件として、実パラメータ  $\alpha = 0$  における行列  $H$  を行列  $A$  と等しくする。 $H$  は、 $\alpha$  を増加させるにつれて行列  $A$  の対称性を破り、 $\alpha \rightarrow \infty$  において、行列  $B$  の対称性に漸近するように構成される。

### 5.3.1 chGSE–chGUE クロスオーバー

本節では遷移カイラルランダム行列のアンサンブルのうち、第 6 章において取り扱う chGSE–chGUE クロスオーバーについて簡単に結果を中心にまとめる。chGSE–chGUE クロスオーバーは chGSE に属する  $N \times N'$  行列  $A$ 、chGUE に属する  $N \times N'$  行列  $B$  およびパラメータ  $\tau \in \mathbb{R}$  を用いて、次のように構成される：

$$H = \begin{pmatrix} 0 & C \\ C^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad C := e^{-\tau} A + \sqrt{1 - e^{-2\tau}} B \quad (5.53)$$

ここで、 $\nu = N' - N \geq 0$  であるとする。chGSE–chGUE クロスオーバーは、chGSE に属する行列  $A$  が持っている反ユニタリー対称性を破る因子として chGUE に属する行列  $B$  を  $\tau \in \mathbb{R}$  によって添加し、 $\tau \rightarrow \infty$  において chGUE に漸近するアンサンブルである。このパラメトライズはガウス型アンサンブルにおいて Dyson によって導入された Brown 運動模型に基づく [36]。

次に、chGSE–chGUE クロスオーバーの固有値分布関数について考える。詳細は Ref. [82, 92, 93] に委ね、ここでは結果を中心に述べる。ここでの議論は Ref. [53] におけるレビューに従っている。chGSE は実四元数を要素とするカイラルランダム行列であるから、実四元数の  $2 \times 2$  行列表現を用いる。 $N, N'$  は正の偶数であるとし、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  は  $(N/2) \times (N'/2)$  四元数行列であるとする。このとき通常の  $N \times N'$  行列  $A, B$  は

$$A = \sum_{\mu=0}^3 \left( A_{jk}^{(\mu)} \right) \otimes \sigma_\mu, \quad B = \sum_{\mu=0}^3 \left( B_{jk}^{(\mu)} \right) \otimes \sigma_\mu, \quad j = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N'}{2} \quad (5.54)$$

として表現される。ここで、 $\sigma_\mu$  は  $2 \times 2$  単位行列と 3 つの Pauli 行列  $\sigma_k$  を組み合わせた 4 つの組： $\sigma_\mu = (\mathbf{1}, -i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3)$  を表す（便宜上 (1.7) と定義が異なることに注意）。これらの行列要素はそれぞれ  $A_{jk}^{(\mu)} \in \mathbb{R}$ 、 $B_{jk}^{(\mu)} \in \mathbb{C}$  であり、 $\mathbf{A}$  は四元数実行列であるが、 $\mathbf{B}$  は  $\mathbf{A}$  と異なり  $B$  が通常の  $N \times N'$  複素行列である。このとき  $A_{jk}^{(\mu)}$ 、 $\operatorname{Re} B_{jk}^{(\mu)}$  および  $\operatorname{Im} B_{jk}^{(\mu)}$  はそれぞれガウス分布  $e^{-\frac{1}{2} \operatorname{tr} A A^\dagger}$  および  $e^{-\operatorname{tr} B B^\dagger}$  に従う独立な乱数であると考えられる。 $C$  の行列要素についての規格化さ

れていない確率測度は

$$dC \int dA e^{-\frac{1}{2} \text{tr} AA^\dagger} \int dB e^{-\text{tr} BB^\dagger} \delta(e^{-\tau} A + \sqrt{1 - e^{-2\tau}} B - C) \\ \propto dC \int dA \exp \left( -\frac{1}{2} \text{tr} AA^\dagger - \frac{1}{1 - e^{-2\tau}} \text{tr} (C - e^{-\tau} A)(C - e^{-\tau} A)^\dagger \right) \quad (5.55)$$

で与えられる. ここで,  $dA = \prod_{j,k,\mu} dA_{jk}^{(\mu)}$ ,  $dB = \prod_{j,k,\mu} d^2 B_{jk}^{(\mu)}$ ,  $dC = \prod_{j,k,\mu} d^2 C_{jk}^{(\mu)}$  である. 行列  $A, C$  の特異値分解を実行すると,

$$A = SMS'^\dagger, \quad M = [\text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) \quad 0_{N \times \nu}] \\ C = U\Lambda U'^\dagger, \quad \Lambda = [\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad 0_{N \times \nu}] \quad (5.56)$$

が得られる. ここで,  $S \in \text{USp}(N)$ ,  $S' \in \text{USp}(N')$ ,  $U \in \text{U}(N)$ ,  $U' \in \text{U}(N')$  である. 行列  $A$  の Kramers 縮退する特異値の対は  $\mu_{i+N/2} = \mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N/2$  の順に並んでいる. 積分測度  $dA, dC$  は次のような形をとる:

$$dA = d(S, S') \left( \prod_{i=1}^{N/2} d\mu_i \mu_i^{2\nu+3} \right) \Delta_{N/2}^4(\mu^2), \quad \Delta_{N/2}(\mu^2) = \prod_{i>j}^{N/2} (\mu_i^2 - \mu_j^2), \\ dC = d(U, U') \left( \prod_{i=1}^N d\lambda_i \lambda_i^{2\nu+1} \right) \Delta_N^2(\lambda^2), \quad \Delta_N(\lambda^2) = \prod_{i>j}^N (\lambda_i^2 - \lambda_j^2), \quad (5.57)$$

ここで,  $d(S, S')$ ,  $d(U, U')$  は角度の自由度についての不変測度を表し,  $\Delta$  は Vandermonde 行列式を表す. (5.55) および (5.57) から  $C$  の特異値  $\{\lambda_i\}$  についての確率測度をユニタリ行列  $(U, U')$  について積分することによって次式が得られる:

$$(5.55) = \prod_{i=1}^N d\lambda_i \lambda_i^{2\nu+1} \exp \left( -\frac{\lambda_i^2}{1 - e^{-2\tau}} \right) \Delta_N^2(\lambda^2) \int_0^\infty \prod_{j=1}^{N/2} d\mu_j \mu_j^{2\nu+3} \exp \left( -\frac{\mu_j^2}{\tanh \tau} \right) \\ \times \Delta_{N/2}^4(\mu^2) \int_{\text{U}(N)} dU \int_{\text{U}(N')} dU' \exp \left( \frac{1}{\sinh \tau} \text{Re tr} U\Lambda U'^\dagger \text{T}M \right) \quad (5.58)$$

ここで, シンプレクティック行列  $(S, S')$  についての積分は  $S^\dagger U \rightarrow U$ ,  $S'^\dagger U' \rightarrow U'$  によってユニタリ行列を再定義した後に分離させている. (5.58) の  $(U, U')$  についての積分は Berezin-Karpelevich 公式 [94–96] を用いて実行し, Kramers 縮退の対の合流極限  $\mu_{i+N/2} \rightarrow \mu_i$  をすべての  $i = 1, 2, \dots, N/2$  についてとると,

$$\int_{\text{U}(N)} dU \int_{\text{U}(N')} dU' \exp \left( \frac{1}{\sinh \tau} \text{Re tr} U\Lambda U'^\dagger \text{T}M \right) \propto \frac{\det \left[ I_\nu \left( \frac{\lambda_i \mu_j}{\sinh \tau} \right) \right]_{i,j=1}^N}{\Delta_N(\lambda^2) \Delta_N(\mu^2) \prod_{i=1}^N (\lambda_i \mu_i)^\nu} \Bigg|_{\mu_{i+N/2} \rightarrow \mu_i} \\ \propto \frac{\det \left[ I_\nu \left( \frac{\lambda_i \mu_j}{\sinh \tau} \right) \frac{\partial}{\partial \mu_j^2} I_\nu \left( \frac{\lambda_i \mu_j}{\sinh \tau} \right) \right]_{i=1,2,\dots,N}^{j=1,2,\dots,N/2}}{\Delta_N(\lambda^2) \Delta_{N/2}^4(\mu^2) \prod_{i=1}^N \lambda_i^\nu \prod_{j=1}^{N/2} \mu_i^{2\nu}} \quad (5.59)$$

が得られる．ここで， $I_\nu$  は純虚数変数の Bessel 関数  $I_\nu(z) = J_\nu(iz)$  である．(5.59) を (5.58) に代入し，行列  $C, A$  の特異値をそれぞれ行列  $CC^\dagger, AA^\dagger$  の固有値に置き換えるために， $x_i = \lambda_i^2$  および  $y_i = \mu_i^2$  と置くと，確率測度は次式に比例する：

$$(5.58) \propto \prod_{i=1}^N dx_i \sqrt{w(x_i)} \Delta_N(x) \int_0^\infty \prod_{j=1}^{N/2} dy_j y_j \det \left[ g(x_k, y_l) \frac{\partial g(x_k, y_l)}{\partial y_l} \right]_{l=1,2,\dots,N/2}^{k=1,2,\dots,N} \quad (5.60)$$

ここで，Laguerre の重み関数  $w(x_i) = x^\nu e^{-x}$  が導入され，関数  $g(x_k, x_l)$  は

$$g(x, y) := \frac{e^{-(2\nu+1)\tau}}{1 - e^{-2\tau}} \exp\left(-\frac{x+y}{2 \tanh \tau}\right) I_\nu\left(\frac{\sqrt{xy}}{\sinh \tau}\right) \quad (5.61)$$

で表される対称な関数である．この関数  $g(x, y)$  は時間  $\tau$  における Brown 運動模型に対する 1 粒子 Green 関数としてのもう一つの解釈を認めることで次のような表現を持つ：

$$g(x, y) = \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k^\nu(x)L_k^\nu(y)}{h_k} e^{-\gamma_k \tau} \quad (5.62)$$

ここで， $h_k = (k+\nu)!/k!$ ， $\gamma_k = 2k + \nu + 1$  である．Ref. [84] の A.17 の補題を用いると，(5.60) における  $N \times N$  行列式の  $(N/2)$  重積分は 1 重積分の  $N \times N$  の Pfaffian に分解できるので，

$$(5.60) \propto \prod_{i=1}^N dx_i \sqrt{w(x_i)} \Delta_N(x) \text{Pf}[F(x_j, x_k)]_{j,k=1}^N \quad (5.63)$$

$$F(x, x') := \int_0^\infty dy y \left( g(x, y) \frac{\partial g(x', y)}{\partial y} - \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} g(x', y) \right) \quad (5.64)$$

のように表現できる．よって，確率測度を得るために Pfaffian を評価する必要がある．Pfaffian は四元数行列式によって表現できることが知られている．詳細は Ref. [84] に委ね，以下では簡単に結果をまとめる．私たちは任意のモニック多項式の集合  $\{R_k(x)\}_{k=0,1,\dots}$  と任意の正の数  $\{r_k\}_{k=1,2,\dots}$  を導入し，次のような関数  $\{\psi_k(x)\}$

$$\psi_{2k}(x) = \frac{\sqrt{w(x)}R_{2k}(x)}{\sqrt{r_k}}, \quad \psi_{2k+1}(x) = \frac{\sqrt{w(x)}R_{2k+1}(x)}{\sqrt{r_k}} \quad (5.65)$$

および  $\psi_k(x)$  を  $F(x, x')$  によってたたみ込んだ関数  $\{\phi_k(x)\}$  を定義する：

$$\phi_k(x) = - \int_0^\infty dx' F(x, x') \psi_k(x') \quad (5.66)$$

次に私たちは次式で表される関数  $D(x, x')$ ， $S(x, x')$  および  $I(x, x')$  を導入する：

$$D(x, x') = \sum_{k=0}^{N/2-1} (\psi_{2k}(x)\psi_{2k+1}(x') - \psi_{2k+1}(x)\psi_{2k}(x')) \quad (5.67)$$

$$S(x, x') = \sum_{k=0}^{N/2-1} (\phi_{2k}(x)\psi_{2k+1}(x') - \phi_{2k+1}(x)\psi_{2k}(x')) \quad (5.68)$$

$$I(x, x') = - \sum_{k=0}^{N/2-1} (\phi_{2k}(x)\phi_{2k+1}(x') - \phi_{2k+1}(x)\phi_{2k}(x')) \quad (5.69)$$

私たちはこれらの関数に対応する  $N \times N$  行列  $D_N$ ,  $S_N$  および  $I_N$  を次のように書く：

$$D_N = [D(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N, \quad S_N = [S(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N, \quad I_N = [I(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N \quad (5.70)$$

これらの  $N \times N$  行列によって、私たちは次のような  $2N \times 2N$  反対称行列を定義する：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_N & {}^T S_N \\ -S_N & -I_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \psi_{2k}(x_i) & \psi_{2k+1}(x_i) \\ -\phi_{2k}(x_i) & -\phi_{2k+1}(x_i) \end{bmatrix}_{k=0,1,\dots,N/2-1}^{i=1,2,\dots,N} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \psi_{2k+1}(x_j) & -\phi_{2k+1}(x_j) \\ -\psi_{2k}(x_j) & \phi_{2k}(x_j) \end{bmatrix}_{j=1,2,\dots,N}^{k=0,1,\dots,N/2-1} \end{aligned} \quad (5.71)$$

(5.71) は左辺の  $2N \times 2N$  反対称行列を右辺の  $2N \times N$  長方形列と  $N \times 2N$  長方形列の積によって書けることを示す．左辺の反対称行列のランクは  $\{\psi_i(x)\}_{i=0,1,\dots,N-1}$  の線形結合のため高々  $N$  である．したがって、下側の  $N$  行  $[-S_N, -I_N]$  は上側の  $N$  行  $[D_N, {}^T S_N]$  の線形結合である．ここで、私たちはもう一つ  $2N \times 2N$  反対称行列

$$\begin{bmatrix} D_N & {}^T S_N \\ -S_N & -I_N - F_N \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

の Pfaffian を考える．ただし、 $F_N = [F(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$  である．前述のように上側の  $N$  行は線形独立のため、行列式の性質から下側の  $N$  行に  $[S_N, I_N]$  を加えても行列式の値は変わらない．よって、

$$\text{Pf} \begin{bmatrix} D_N & {}^T S_N \\ -S_N & -I_N - F_N \end{bmatrix} = \text{Pf} \begin{bmatrix} D_N & 0 \\ 0 & -F_N \end{bmatrix} = (-1)^{N/2} \text{Pf} D_N \cdot \text{Pf} F_N \quad (5.73)$$

が得られる．一方、 $\text{Pf} D_N$  は

$$\begin{aligned} \text{Pf} D_N &= \text{Pf} \left[ [\psi_{2k}(x_i) \quad \psi_{2k+1}(x_i)]_{k=0,1,\dots,N/2-1}^{i=1,2,\dots,N} \begin{bmatrix} \psi_{2k+1}(x_j) \\ -\psi_{2k}(x_j) \end{bmatrix}_{j=1,2,\dots,N}^{k=0,1,\dots,N/2-1} \right] \\ &= \det[\psi_{k-1}(x_i)]_{i,k=1}^N = \det \left[ \sqrt{w(x_i)} x_i^{k-1} \right]_{i,k=1}^N \propto \prod_{i=1}^N \sqrt{w(x_i)} \cdot \Delta_N(x) \end{aligned} \quad (5.74)$$

となるので、(5.73) および (5.74) を用いると、確率測度 (5.63) は

$$(5.63) \propto \prod_{i=1}^N dx_i \text{Pf}(ZK_N), \quad (5.75)$$

$$K_N = \begin{bmatrix} S_N & J_N \\ D_N & {}^T S_N \end{bmatrix}, \quad J_N = I_N + F_N, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}_N \\ -\mathbf{1}_N & 0 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

になる．上側の対角ブロックが下側の対角ブロックの転置であり、非対角ブロックがどちらも反対称であるから、 $K_N$  は  $N \times N$  四元数自己双対行列の  $2N \times 2N$  複素行列表現とみなすことができる．私たちは  $N \times N$  四元数自己双対行列を  $\mathbf{K}_N = [\mathbf{K}(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$  と表記する．四元数自己双対

行列  $\Phi$  の四元数行列式 (qdet) に対する Dyson の補題 [97]:  $\text{qdet } \Phi = \text{Pf}(Z\Phi)$  を用いると, 確率測度は

$$(5.75) = \prod_{i=1}^N dx_i \text{qdet } \mathbf{K}_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (5.77)$$

の形で表現できる. したがって, 四元数カーネル  $\mathbf{K}(x, y)$  の具体的な形が必要になる. このために,  $\mathbf{K}(x, y)$  を表現する  $2 \times 2$  行列

$$\mathbf{K}(x, y) = \begin{bmatrix} S(x, y) & J(x, y) \\ D(x, y) & S(y, x) \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

が次のような準射影性および規格化を満たすとする:

$$\int_0^\infty \mathbf{K}(x, y) \mathbf{K}(y, z) dy = \mathbf{K}(x, z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K}(x, z) \quad (5.79)$$

$$\int_0^\infty \mathbf{K}(x, x) dx = N \quad (5.80)$$

私たちは  $\mathbf{K}(x, y)$  が上の 2 式を満たすような  $\{R_k\}$  および  $\{r_k\}$  を選ぶことを考える. (5.79) および (5.80) から四元数行列  $\mathbf{K}_n = [\mathbf{K}(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$  は

$$\int_0^\infty dx_n \text{qdet } \mathbf{K}_n(x_1, \dots, x_n) = (N - n + 1) \text{qdet } \mathbf{K}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (5.81)$$

を満たす. (5.81) は前節における  $\beta = 2$  の場合の (5.32) に対応する. (5.79) および (5.80) の関係は  $\{R_k\}$  を歪直交する多項式にすることによって実現されることが知られている. 歪直交関係は歪内積  $\langle, \rangle$  およびそれらのノルムとして  $\{r_k\}$  を選ぶことで構成される:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \sqrt{w(x)w(y)} F(x, y) f(x) g(y) = -\langle g, f \rangle \quad (5.82)$$

$$\langle R_{2k}, R_{2k+1} \rangle = -\langle R_{2k+1}, R_{2k} \rangle = r_k, \quad \text{その他} = 0 \quad (5.83)$$

この歪直交関係によって,  $F(x, x')$  は

$$F(x, x') = \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_{2k}(x) \phi_{2k+1}(x') - \phi_{2k+1}(x) \phi_{2k}(x')) \quad (5.84)$$

と表現される. よって,  $J_N = I_N + F_N$  の行列要素は (5.69) から,

$$J(x, x') = \sum_{k=N/2}^{\infty} (\phi_{2k}(x) \phi_{2k+1}(x') - \phi_{2k+1}(x) \phi_{2k}(x')) \quad (5.85)$$

となる.  $\tau = 0$  (chGSE) の場合, Ref. [98] によって,

$$R_{2k}^{(0)}(x) = \sum_{j=0}^k \frac{2^{2k} k! \Gamma(k + (\nu + 1)/2)}{2^{2j} j! \Gamma(j + (\nu + 1)/2)!} (2j)! L_{2j}^{\nu-1}(x), \quad (5.86)$$

$$R_{2k+1}^{(0)}(x) = -(2k + 1)! L_{2k+1}^{\nu-1}(x)$$

が歪直交関係 (5.83) を満たすことが示されている。ただし,  $r_k^{(0)} = (2k+1)!(2k+\nu)!$  である。Ref. [99] の補題によって,

$$\langle R_m, R_n \rangle = e^{-(\gamma_m + \gamma_n)\tau} \langle R_m^{(0)}, R_n^{(0)} \rangle \quad (5.87)$$

の関係が示されるので,  $\tau > 0$  の場合は,

$$R_{2k}(x) = \sum_{j=0}^k \frac{2^{2k} k! \Gamma(k + (\nu+1)/2)}{2^{2j} j! \Gamma(j + (\nu+1)/2)!} (2j)! L_{2j}^{\nu-1}(x) e^{(\gamma_{2j} - \gamma_{2k})\tau}, \quad (5.88)$$

$$R_{2k+1}(x) = R_{2k+1}^{(0)}(x)$$

が (5.83) を満たすことが示される。ただし,  $r_k = r_k^{(0)} e^{-(\gamma_{2k} + \gamma_{2k+1})\tau}$  である [92]。したがって, 定義 (5.65)–(5.68) および (5.85) によって, 有限の  $N$  の四元数カーネル要素は完全に決定される。

次に, Kramers 縮退が小さいパラメータ  $\tau \ll 1$  によって弱く破られる場合を考える。行列  $H$  の大きい  $N$  の極限における固有値密度  $\rho(\lambda)$  は chGSE ( $\tau = 0$ ) の場合と等しいことが知られている, すなわち, Wigner の半円則  $\rho(\lambda) = \pi^{-1} \sqrt{4N - \lambda^2}$  を満たす。原点近傍にスケールするために, 私たちは微視的スケールにおける変数  $s_i := \lambda_i/\Delta$  を導入する。これは原点近傍での平均準位間隔を 1 にするアンフォールド (unfold) という操作に対応する:  $\Delta = 1/\rho(0) = \pi/\sqrt{4N}$ 。  $\tau > 0$  による非自明な遷移を実現するために, 私たちは,  $\rho = \sqrt{\tau}/\Delta$  および  $s_i$  を有限の値に固定しながら, 3重のスケーリング極限  $N \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$  をとる。この極限において,  $k$  についての和は  $\nu := k/N$  についての積分に置き換わり, Laguerre 多項式は  $k \rightarrow \infty$  における漸近公式 (5.47):  $\sqrt{w(z)} L_k^\nu(z) \sim k^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{kz})$  により, Bessel 関数に置き換わる。したがって, 四元数カーネルの要素 (5.67), (5.68) および (5.85) は

$$S(s, t) = \pi \sqrt{st} \left( \frac{J_\nu(\pi s) t J_{\nu-1}(\pi t) - s J_{\nu-1}(\pi s) J_\nu(\pi t)}{s^2 - t^2} - \frac{J_\nu(\pi s)}{2} \pi \int_0^1 d\nu e^{\pi^2 \rho^2 (\nu^2 - 1)} J_\nu(\pi \nu t) \right) \quad (5.89)$$

$$D(s, t) = \frac{\pi^2 \sqrt{st}}{2} \int_0^1 d\nu \nu \int_0^1 du e^{\pi^2 \rho^2 \nu^2 (1+u^2)} (J_\nu(\pi \nu u s) J_\nu(\pi \nu t) - J_\nu(\pi \nu s) J_\nu(\pi \nu u t)) \quad (5.90)$$

$$J(s, t) = \frac{\pi^3 \sqrt{st}}{2} \int_1^\infty d\nu \nu^2 e^{-2\pi^2 \rho^2 \nu^2} (J_\nu(\pi \nu s) t J_{\nu-1}(\pi \nu t) - s J_{\nu-1}(\pi \nu s) J_\nu(\pi \nu t)) \quad (5.91)$$

の形で表現される [92]。よって, 行列  $H$  の原点近傍における  $k$  個の正のアンフォールドされた固有値  $\{s_i\}$  の相関関数は

$$R_k(s_1, \dots, s_k) = \text{Pf} \left( Z \left[ \mathbf{K}(s_i, s_j) \right]_{i,j=1}^k \right), \quad \mathbf{K}(s, t) = \begin{bmatrix} S(s, t) & J(s, t) \\ D(s, t) & S(t, s) \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

と表現される。

### 5.3.2 個別固有値分布

個別固有値分布は 5.2 節と同様な方法で評価される．chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布は  $\beta = 2$  の場合のカーネルを四元数カーネルに置き換えて評価される．詳細は Ref. [84] に委ねることにして，四元数カーネルの場合のギャップ確率  $E_k(I)$  は区間  $I = [0, s)$  において，次のように表現される：

$$E_k(I) = \frac{1}{k!} \left( -\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^k \text{Pf}(Z - \xi Z \hat{\mathbf{K}}_I) \Big|_{\xi=1} = \frac{1}{k!} \left( -\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^k \det(\mathbf{1} - \xi \hat{\mathbf{K}}_I)^{1/2} \Big|_{\xi=1} \quad (5.93)$$

ここで， $\beta = 2$  の場合と異なり，Fredholm 行列式の平方根が現れる． $\hat{\mathbf{K}}_I$  は区間  $I$  上における 2 成分の  $L^2$  関数  $F(x)$  に作用する四元数カーネル演算子

$$(\hat{\mathbf{K}}_I F)(x) = \int_I \mathbf{K}(x, y) \cdot F(y) dy \quad (5.94)$$

である． $\det(\mathbf{1} - \xi \hat{\mathbf{K}}_I)^{1/2} = \exp \frac{1}{2} \text{tr} \log(\mathbf{1} - \xi \hat{\mathbf{K}}_I)$  を  $\xi$  で微分することによって，各  $k$  におけるギャップ確率は Fredholm 行列式と四元数カーネル演算子のレゾルベント演算子による式

$$T_n(I) := \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\mathbf{K}}_I (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{K}}_I)^{-1})^n \quad (5.95)$$

を用いることによって，次のように表現される [83, 85]：

$$\begin{aligned} E_0(I) &= \det(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{K}}_I)^{1/2} \\ E_1(I) &= E_0 T_1 \\ E_2(I) &= \frac{E_0}{2!} (T_1^2 - T_2) \\ E_3(I) &= \frac{E_0}{3!} (T_1^3 - 3T_1 T_2 + 2T_3) \\ E_4(I) &= \frac{E_0}{4!} (T_1^4 - 6T_1^2 T_2 + 3T_2^2 + 8T_1 T_3 - 6T_4) \\ E_5(I) &= \frac{E_0}{5!} (T_1^5 - 10T_1^3 T_2 + 20T_1^2 T_3 + 15T_1 T_2^2 - 30T_1 T_4 - 20T_2 T_3 + 24T_5) \\ E_6(I) &= \frac{E_0}{6!} \left\{ \begin{aligned} &T_1^6 - 15T_1^4 T_2 + 40T_1^3 T_3 + 45T_1^2 T_2^2 - 90T_1^2 T_4 - 120T_1 T_2 T_3 \\ &\quad - 15T_2^3 + 144T_1 T_5 + 90T_2 T_4 + 40T_3^2 - 120T_6 \end{aligned} \right\} \\ E_7(I) &= \frac{E_0}{7!} \left\{ \begin{aligned} &T_1^7 - 21T_1^5 T_2 + 70T_1^4 T_3 + 105T_1^3 T_2^2 - 210T_1^3 T_4 - 420T_1^2 T_2 T_3 \\ &\quad - 105T_1 T_2^3 + 504T_1^2 T_5 + 630T_1 T_2 T_4 + 280T_1 T_3^2 + 210T_2^2 T_3 \\ &\quad - 840T_1 T_6 - 504T_2 T_5 - 420T_3 T_4 + 720T_7 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (5.96)$$

ギャップ確率を得ることができれば，個別固有値分布は (5.40)

$$p_k(s) = -\frac{d}{ds} \sum_{l=0}^{k-1} E_l(s) \quad (5.97)$$



に従って得られる．Fredholm 行列式の評価は 5.2 節の最後に述べた Nyström 型の離散化法 (Gauss–Legendre 求積法) による数値的方法を用いる．図 5.2 は chGSE–chGUE クロスオーバーの 4 番目までの小さい個別固有値分布の例であり，四元数カーネルの要素 (5.89)–(5.91) において， $\nu = 0$  とした場合の個別固有値分布を図示している．本論文では遷移パラメータの範囲を  $0.04 \leq \rho \leq 0.7$  (step 0.01) として個別固有値分布を評価している．図 5.2 の chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布は遷移パラメータ  $\rho$  の増加に伴って，Kramers 縮退した chGSE の固有値分布 ( $\rho = 0$ ) から縮退が解けて，chGUE の固有値分布 ( $\rho = \infty$ ) に向かって遷移する様子が見られる．

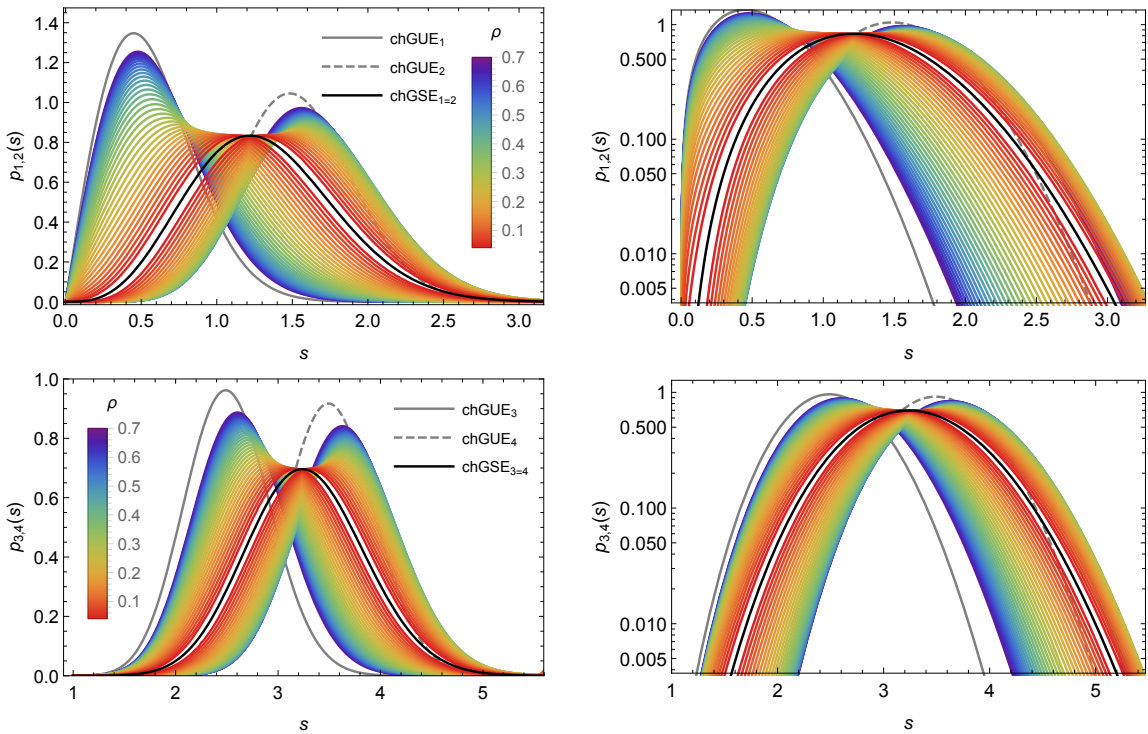


図 5.2 chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布の例 ( $\nu = 0$ ) : (上) 1 番目と 2 番目の個別固有値分布の線形および対数プロット，(下) 3 番目と 4 番目の個別固有値分布の線形および対数プロット．遷移パラメータ  $\rho$  の増加に伴い，Kramers 縮退が解けて，固有値分布が chGUE の固有値分布に向かって遷移する (赤から紫)．これらの図は Ref. [53, 54] における図の再現である．

最後に，第 3 章で述べた低エネルギー有効理論と遷移カイラルランダム行列の対応について簡単に述べる．(3.57) が実際に遷移カイラルランダム行列と等価であることはカイラルランダム行列の  $\sigma$  模型表現における微視的極限を考える必要がある． $\sigma$  模型表現はカイラルランダム行列を QCD の有効模型として場の理論的に取り扱う手法に対応し，その具体的な計算方法としてレプリカ法や超対称性法が知られている． $\sigma$  模型表現は，そのアプローチから QCD の低エネルギー有効理論との対応は明確であるが，本論文で必要となる準位統計とは異なるアプローチになる．ゆえに，ここではこの方法の詳細を Ref. [55, 56, 83, 101] などに委ねることにし，結果のみを述べる．(3.57) に

おける低エネルギー定数と chGSE–chGUE クロスオーバーの遷移パラメータとの関係は

$$VF^2\mu^2 \rightarrow \frac{\pi^2}{2}\rho^2, \quad V\Sigma m \rightarrow i\pi s \quad (5.98)$$

と対応付けられる [44, 45, 83] . この関係は四元数カーネル要素における指数部分からも読み取ることができる. この対応付けを用いて低エネルギー定数を決める方法の詳細は第 6 章において説明する.

## 第 6 章

# Dirac 準位統計 : $SU(2) \times U(1)$ LGT

本章では本論文の主題である Dirac 準位統計を用いた  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論の低エネルギー一定数を精密決定する方法について議論する。第 5 章において解析的に導出される chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布と第 4 章において述べた格子ゲージ理論による数値シミュレーションから得られた Dirac 固有値分布のフィットによって、低エネルギー一定数が精密に決定されることを示す。まず 6.1 節では、本論文で採用した  $SU(2)$  ゲージ理論の擬実性を  $U(1)$  によって破る 2 つの模型について説明する。6.1.1 節ではシミュレーションの設定を示し、6.1.2 節では本論文の特徴である chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布とそれに対応する Dirac 固有値分布をフィットする方法およびそこで得られたフィットパラメータのコンバインについて説明する。6.1.3 節では 6.1.2 節の方法によって得られたフィットパラメータを用いた低エネルギー一定数の決定方法について説明する。本章の議論は主に Ref. [53] に従っている。

### 6.1 数値シミュレーションの詳細

本節では数値シミュレーションを実行する 2 つの模型について説明する。一つ目は、(a) 虚数化学ポテンシャルを持つ  $SU(2)$  格子ゲージ理論、二つ目は、(b)  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論である。両模型に共通なことは  $SU(2)$  ゲージ群が持っている擬実性が  $U(1)$  場によって弱く破られることである。この  $U(1)$  場はそれぞれ、(a) 固定された背景場、(b) ダイナミカルにゆらぐ力学的な場として、 $SU(2)$  ゲージ場に寄与する。

(a) 虚数化学ポテンシャル (ICP) を持つ  $SU(2)$  格子ゲージ理論 ( $SU(2)$ +ICP 模型) :

$SU(2)$ +ICP 模型は格子サイズ  $V = L^4$  の超立方格子上的時間方向の  $SU(2)$  リンク変数  $U_\nu(n)$  に対して、定数の位相をかけることによって導入する :

$$U_\nu^{\text{ICP}}(n) = U_\nu(n) \times \begin{cases} e^{i2\pi\varphi} & (\nu = 4, n_4 = L - 1) \\ 1 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (6.1)$$

ここで、位相  $2\pi\varphi$  は時間方向の円経路を貫く Aharonov–Bohm (AB) フラックス [40] とみなすことができ、虚数化学ポテンシャル  $\mu := i\mu_1 = i2\pi\varphi/L$ 、すなわち、固定された  $U(1)$

背景場  $B_\nu = (2\pi\varphi/L)\delta_{\nu,4}$  と等価である。格子上の境界条件は、空間方向について周期的境界条件を課し、時間方向について反周期的境界条件を課す。U(1) 背景場の効果は時間方向に沿った小さいツイストとして考える ( $\varphi \ll 1$ )。

(b) SU(2)×U(1) 格子ゲージ理論 (SU(2)×U(1) 模型) :

SU(2)×U(1) 模型はダイナミカルにゆらぐ U(1) ゲージ場として、Ref. [103] に従った非コンパクト U(1) リンク変数  $B_\nu(n)$  を採用する。この  $B_\nu(n)$  は Coulomb ゲージ固定条件 (および  $B_4(n)$  に対する追加の拘束条件) の下で生成される。SU(2)×U(1) 模型は裸の U(1) 結合定数  $e$  を持つ U(1) ゲージ場を

$$U_\nu^{\text{SU}(2)\times\text{U}(1)}(n) = U_\nu(n) \times e^{ieB_\nu(n)} \quad (6.2)$$

のように SU(2) リンク変数にかけることで導入する。格子上の境界条件は全ての方向について周期的境界条件を課す。U(1) ゲージ場の効果は小さな摂動として考える ( $e \ll 1$ )。

SU(2)+ICP 模型における AB フラックス  $\varphi$  または SU(2)×U(1) 模型における U(1) 結合定数  $e$  は SU(2) ゲージ理論の Dirac 演算子が持つ擬実性を破る、すなわち、Dirac 演算子が持つ反ユニタリー対称性を破る効果であり、chGSE–chGUE クロスオーバーの遷移パラメータ  $\rho$  に対応する格子ゲージ理論のパラメータであることが予想される。虚数化学ポテンシャル  $\mu_I$  の効果は対称性によって完全に決定され [104,105] , 第 3 章において議論したようにカイラルラグランジアン中において実化学ポテンシャル  $\mu$  として  $\pi$  中間子の崩壊定数  $F$  と関係する [68] . 具体的な低エネルギー定数との関係は 6.1.3 節で説明する。

### 6.1.1 シミュレーションの設定

私たちは格子サイズ  $V = 4^4$  および  $6^4$  の小規模な格子上でナイーブなスタaggered Dirac 演算子 (4.44) の固有値を計算する。本論文における解析手法の妥当性を調べるために、私たちは強結合領域から連続極限に近いスケールリング領域まで裸の SU(2) ゲージ結合定数  $\beta = 1/g^2$  を採用する：純粋 SU(2) 格子ゲージ理論の裸のゲージ結合定数および測定した Dirac 固有値の配位数  $N_{\text{conf}}$  は表 6.1 のように選ぶ。

表 6.1 純粋 SU(2) ゲージ結合定数  $\beta$  と配位数  $N_{\text{conf}}$

$V$	$\beta$	$N_{\text{conf}}$
$4^4$	0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75	40000
$6^4$	0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0, 2.1	10000

シミュレーションのアルゴリズムは最も単純なものを採用する：SU(2) ゲージ場の生成はプラケット作用 (4.51) を用いた 10 回ヒットの熱浴法および過緩和法を組み合わせたアップデートを採用する (4.3.1 節を参照)。反ユニタリー対称性を破る U(1) 場のパラメータは次のように設定す

る：SU(2)+ICP 模型に対する U(1) パラメータおよび測定した Dirac 固有値の配位数  $N_{\text{conf}}$  は表 6.2, SU(2) $\times$ U(1) 模型に対しては表 6.3 のように選ぶ。

表 6.2 SU(2)+ICP 模型の U(1) パラメータ  $\varphi$  と配位数  $N_{\text{conf}}$

$V$	$\varphi$	$N_{\text{conf}}$
$4^4$	0.01, 0.02, ..., 0.06 (step 0.01)	40000
$6^4$	0.01, 0.015, ..., 0.05 (step 0.005)	10000

表 6.3 SU(2) $\times$ U(1) 模型の U(1) パラメータ  $e$  と配位数  $N_{\text{conf}}$

$V$	$e$	$N_{\text{conf}}$
$4^4$	0.002, 0.003, 0.004, 0.005, 0.006, 0.008, 0.01	40000
$6^4$	0.0004, 0.0006, ..., 0.0016 (step 0.0002), 0.002, 0.0024, 0.0028	10000

### 6.1.2 固有値分布のフィット方法

本節では Dirac 固有値分布を遷移カイラルランダム行列の個別固有値分布にフィットする手順を説明する。このステップは次の 2 つからなる：

#### (1) Dirac 固有値密度の原点近傍での平均準位間隔 $\Delta$ の決定

まず、Dirac 固有値分布をカイラルランダム行列の固有値分布にフィットするために数値シミュレーションで得られた Dirac 固有値の物理的なスケールを決めて、固有値を規格化する必要がある。このような操作はアンフォールド (unfold) と呼ばれる。測定した固有値を  $\lambda_i$  とすると、アンフォールドした固有値  $s_i$  は

$$s_i = \frac{\lambda_i}{\Delta_i} \quad (6.3)$$

のように規格化される。ここで、 $\Delta_i$  は  $\lambda_i$  に対応する平均準位間隔である。各  $i$  に対する平均準位間隔を決めるためにはヒストグラムの  $\chi^2$  フィットを利用する。 $\Delta$  を変数として、アンフォールドした Dirac 固有値  $\lambda_i/\Delta$  のヒストグラム  $P_i(s)$  を chGSE の固有値分布  $p_i(s)$  にベストフィットし、 $\Delta$  の変化によって  $\chi^2$  統計量が最小化されるときに値が  $\lambda_i$  に対応する平均準位間隔  $\Delta_i$  であると決める。これを実行するために、私たちは  $p_i(s)$  の左端  $[0, s_{\text{min}}]$  と右端  $[s_{\text{max}}, \infty)$  の面積をそれぞれ

$$\int_0^{s_{\text{min}}} ds p_i(s) = \int_{s_{\text{max}}}^{\infty} ds p_i(s) \simeq 10^{-3} \quad (6.4)$$

だけ取り除き，区間  $[s_{\min}, s_{\max}]$  を固定幅  $\delta s = 0.1$  の  $B$  個のビン  $I_b, b = 1, 2, \dots, B$  に分割する，すなわち， $[s_{\min}, s_{\max}] = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_B$ ．このとき  $\chi^2$  統計量は，測定した Dirac 固有値  $\lambda_i$  の頻度を  $F_b = \#\{\lambda_i \in I_b\}$ ，chGSE の個別固有値分布から得られる頻度を  $f_b = N_{\text{conf}} \int_{I_b} ds p_i(s)$  と置いて，

$$\chi^2 = \sum_{b=1}^B \frac{(F_b - f_b)^2}{f_b} \quad (6.5)$$

と定義される．その統計誤差  $\delta\Delta_i$  は  $\chi^2$  統計量が 1 だけ増加したときの  $\Delta_i$  の最適値からの変化量として推定される．

次に，原点近傍の Dirac 固有値のうち，私たちは 4 番目までの最小固有値を採用する．純粋 SU(2) スタッガード Dirac 固有値は Kramers 縮退しているため，実際には縮退していない固有値  $\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i}, i = 1, 2, 3, 4$  について  $N_{\text{conf}}$  個の独立な配位を用いる．原点近傍の平均準位間隔  $\Delta_i$  のコンバインした値  $\bar{\Delta}$  は  $(\Delta_i, \delta\Delta_i), i = 1, 2, 3, 4$  の重み付き平均として得られる：

$$\bar{\Delta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\Delta_i}{\delta\Delta_i^2} / \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\delta\Delta_i^2}, \quad \delta\bar{\Delta} = \left( \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\delta\Delta_i^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (6.6)$$

後の 6.2 節で示すように，これらの 4 つの平均準位間隔は常に一致していることが確認される．したがって，私たちはコンバインによって平均準位間隔の統計誤差を改善することができる．

## (2) 遷移パラメータ $\rho$ の決定

私たちは，(a) SU(2)+ICP 模型および (b) SU(2) $\times$ U(1) 模型のそれぞれにおける Dirac 固有値  $\{\lambda_k\}$  の  $N_{\text{conf}}$  個の独立な配位を用いる．純粋 SU(2) スタッガード Dirac 固有値は U(1) の寄与によって Kramers 縮退した固有値の対が分裂する： $\lambda_{2i-1} < \lambda_{2i}$ ．そのうち，私たちは最小の 2 つの Dirac 固有値の対  $(\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i}), i = 1, 2$  を採用し，アンフォールドした固有値の対は対応する  $\Delta_i$  によって  $(s_{2i-1}, s_{2i}) = (\lambda_{2i-1}/\Delta_i, \lambda_{2i}/\Delta_i)$  と定義する．私たちは遷移パラメータ  $\rho_k$  を決定するために，ステップ (1) と同様に，Dirac 固有値のヒストグラム  $P_k(s_k)$  を chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布  $p_k^{(\rho)}(s)$  と  $\chi^2$  フィットする．私たちは  $p_k^{(\rho)}(s)$  の遷移パラメータ  $\rho$  を変化させたときに， $\chi^2$  統計量が最小になる値を  $\rho_k$  とする．その誤差  $\delta\rho_k$  は  $\chi^2$  統計量が 1 だけ増加したときの最適値からの変化量として推定される．

各 U(1) パラメータ  $\varphi$  または  $e$  の選択に対応する遷移パラメータ  $\bar{\rho}$  は  $(\rho_k, \delta\rho_k), k = 1, 2, 3, 4$  の重み付き平均としてコンバインすることで決定される．Kramers 縮退していた固有値の対を含む形でコンバインする利点として次のことが考えられる： $s_{2i-1}$  と  $s_{2i}$  のヒストグラムは Kramers 縮退が解けていく過程で常に反対方向にシフトするため，ステップ (1) で決めた  $\Delta_i$  に生じうる小さな誤差の効果が最終的な  $\bar{\rho}$  においてキャンセルされることが期待される．

### 6.1.3 低エネルギー定数

低エネルギー有効理論 (3.57) 中のカイラルラグランジアンに含まれる 2 つの低エネルギー定数 — カイラル凝縮  $\Sigma$  および  $\pi$  中間子の崩壊定数  $F$  — はステップ (1) と (2) において決定される  $\bar{\Delta}$  および  $\bar{\rho}$  と直接関係する。前者は Banks–Casher 関係式 (2.115) によって,

$$\Sigma = \frac{\pi}{\Delta V} \quad (6.7)$$

と与えられる。後者は, (a) SU(2)+ICP 模型に対して,

$$F^2 = \frac{\pi}{2V} \left( \frac{\bar{\rho}}{\mu_1} \right)^2 = \frac{\pi}{2V} \left( \frac{\bar{\rho}}{2\pi\varphi/L} \right)^2 \quad (6.8)$$

(b) SU(2) $\times$ U(1) 模型に対して,

$$\frac{F^2 \mu_1^2}{e^2} = \frac{\pi}{2V} \left( \frac{\bar{\rho}}{e} \right)^2 \quad (6.9)$$

のようにそれぞれ与えられる。(6.9) の左辺における  $F^2 \mu_1^2$  は (3.57) における  $\text{tr} \hat{B} Q^T \hat{B} Q^\dagger$  項の 1 つの係数とみなされる。この量が  $e^2$  に比例するはずなので, ここでの目的はダイナミクスによって決まるまだ知られていない比例定数を定めることである。したがって, 確認することは (a) または (b) の模型における各  $\beta$  に対して, それらの比  $\rho/\varphi$  または  $\bar{\rho}/e$  が  $\varphi$  または  $e$  が変化するにつれて一定値になるかどうかである。一定値であれば, その平均値は重み付き平均として決定することができる。6.2.2 節において述べるように, 実際にこれらの比は一定値になることが確認される。

## 6.2 数値シミュレーションの結果

### 6.2.1 Dirac 固有値分布のフィットの結果

#### 平均準位間隔の決定

ステップ (1) で述べたように, 私たちは平均準位間隔  $\Delta_i, i = 1, 2, 3, 4$  を測定するために, 2 つの模型: (a) SU(2)+ICP 模型 (時間方向のみ反周期的境界条件) および (b) SU(2) $\times$ U(1) 模型 (全方向周期的境界条件) において, それぞれ純粋 SU(2) Dirac 固有値分布を chGSE の個別固有値分布にフィットする。私たちは, 平均準位間隔を精密に決めるための基準として, 各  $\beta$  における固有値分布のフィットの適合度が  $\chi^2/\text{d.o.f.} < 2.0$  である場合のみを採用して  $\Delta_i$  を決定する。

図 6.1 は測定した純粋 SU(2) Dirac 固有値密度のヒストグラムを (a) SU(2)+ICP 模型および (b) SU(2) $\times$ U(1) 模型についてそれぞれ図示したものである。強結合領域, すなわち,  $\beta$  が小さい領域に着目すると,  $\beta$  が小さいほど原点近傍の固有値密度が大きくなっている。つまり, 強結合領域では Banks–Casher 関係式 (6.7) からカイラル凝縮がゼロでない値を持ち, 私たちが採用した  $\beta$  の範囲ではカイラル対称性が自発的に破れていることが確認される。私たちは図 6.1 の原点近傍の固有値のうち, 非縮退の最小の 4 つの個別固有値を考える。図 6.2 は純粋 SU(2) 個別 Dirac 固

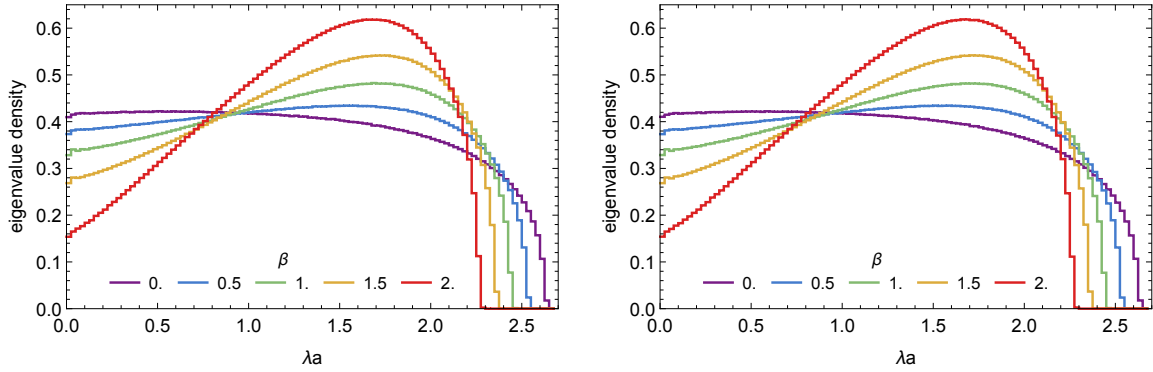


図 6.1 純粋 SU(2) Dirac 固有値密度のヒストグラム: (左)SU(2)+ICP 模型, (右)SU(2) $\times$ U(1) 模型. どちらの図も  $\beta = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$  の場合を例として示す.

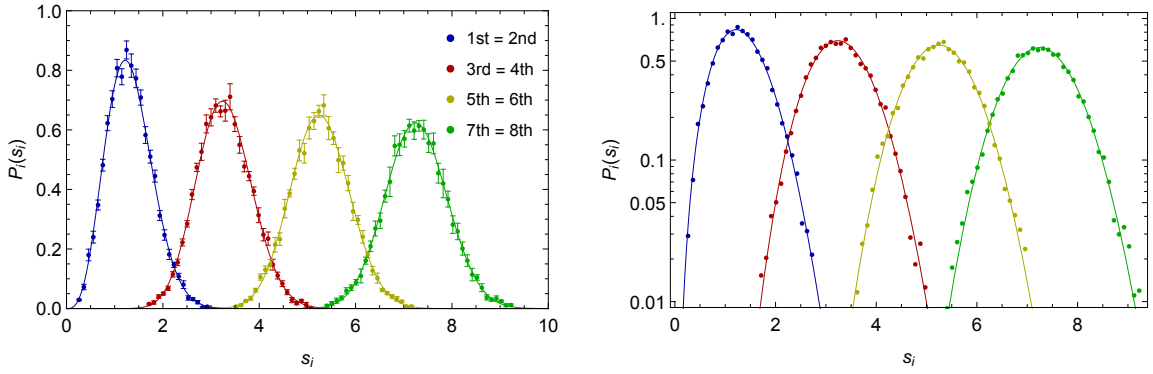


図 6.2 純粋 SU(2) Dirac 固有値の最初の 4 つの非縮退の個別固有値分布  $P_i(s_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  と対応する chGSE の個別固有値分布の (左) 線形および (右) 対数プロット. SU(2) $\times$ U(1) 模型における  $V = 6^4$  の  $\beta = 1.0$  において,  $\Delta_i$  によって規格化した後のヒストグラムを示す. ヒストグラムにおける誤差バーはジャックナイフ法によって推定される.

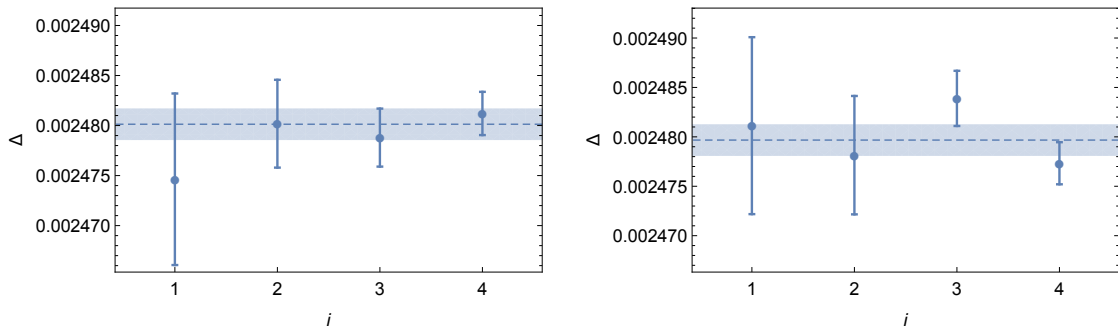


図 6.3 平均準位間隔  $\Delta_i$  の各  $i$  におけるプロット. (左) SU(2)+ICP 模型, (右) SU(2) $\times$ U(1) 模型. どちらも  $V = 6^4$  の  $\beta = 1.25$  における値を示す. 点線は重み付き平均, ストライプはその誤差を示す.



表 6.4 SU(2)+ICP 模型における  $V = 4^4$  および  $6^4$  での純粋 SU(2) Dirac 固有値の平均準位間隔. 各値は  $10^{-2}a^{-1}$  を単位とする.

$V$	$\beta$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\bar{\Delta}$	$\chi^2/\text{d.o.f.}$
$4^4$	0	0.929(2)	0.9315(7)	0.9309(5)	0.9313(4)	0.9311(3)	0.99–1.00
	0.25	0.969(2)	0.9708(9)	0.9709(6)	0.9703(4)	0.9705(3)	0.85–1.00
	0.5	1.019(2)	1.0190(9)	1.0180(6)	1.0175(4)	1.0179(3)	0.74–1.02
	0.75	1.073(2)	1.0735(8)	1.0749(6)	1.0756(5)	1.0750(3)	1.01–1.36
	1.0	1.151(2)	1.1500(9)	1.1504(7)	–	1.1503(5)	0.68–1.47
	1.25	1.255(2)	1.254(1)	–	–	1.2544(9)	0.81–1.46
	1.5	1.408(3)	–	–	–	1.408(3)	0.73
	1.75*	1.705(4)	–	–	–	1.705(4)	0.91
$6^4$	0	0.1854(7)	0.1852(3)	0.1850(2)	0.1852(2)	0.1852(1)	0.92–1.02
	0.25	0.1912(7)	0.1926(3)	0.1931(2)	0.1927(2)	0.1928(1)	0.98–1.20
	0.5	0.2030(8)	0.2027(4)	0.2020(2)	0.2023(2)	0.2023(1)	0.95–0.99
	0.75	0.2135(7)	0.2133(2)	0.2143(2)	0.2135(2)	0.2137(1)	0.85–1.01
	1.0	0.2293(8)	0.2277(4)	0.2279(3)	0.2278(2)	0.2278(1)	0.93–1.00
	1.25	0.2475(9)	0.2480(4)	0.2479(3)	0.2481(2)	0.2480(2)	0.63–0.99
	1.5	0.2795(9)	0.2787(5)	0.2783(3)	0.2779(2)	0.2782(2)	0.96–1.00
	1.75	0.334(1)	0.3331(6)	0.3329(4)	–	0.3330(3)	0.73–1.00
	2.0	0.482(2)	–	–	–	0.482(2)	1.12
	2.1*	0.640(2)	–	–	–	0.640(2)	1.49

表 6.5 SU(2) $\times$ U(1) 模型における  $V = 4^4$  および  $6^4$  での純粋 SU(2) Dirac 固有値の平均準位間隔. 各値は  $10^{-2}a^{-1}$  を単位とする.

$V$	$\beta$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$	$\bar{\Delta}$	$\chi^2/\text{d.o.f.}$
$4^4$	0	0.932(2)	0.9306(8)	0.9311(5)	0.9313(4)	0.9311(3)	0.62–1.13
	0.25	0.972(2)	0.9718(8)	0.9708(6)	0.9704(4)	0.9708(3)	0.84–1.13
	0.5	1.020(2)	1.0160(9)	1.0162(6)	1.0170(4)	1.0167(3)	0.97–1.20
	0.75	1.080(2)	1.0770(9)	1.0774(6)	1.0765(5)	1.0769(3)	0.76–1.15
	1.0	1.153(2)	1.152(1)	1.1525(7)	–	1.1524(5)	1.00–1.14
	1.25	1.249(2)	1.253(1)	–	–	1.2525(9)	0.99–1.00
	1.5	1.412(2)	–	–	–	1.412(2)	0.93
	1.75*	1.698(3)	–	–	–	1.698(3)	1.35
$6^4$	0	0.1865(6)	0.1854(3)	0.1853(2)	0.1854(2)	0.1854(1)	0.79–1.00
	0.25	0.1928(7)	0.1929(3)	0.1928(2)	0.1928(2)	0.1928(1)	0.99–1.00
	0.5	0.2024(8)	0.2024(4)	0.2020(2)	0.2020(2)	0.2021(1)	0.77–1.01
	0.75	0.2146(8)	0.2137(4)	0.2138(2)	0.2136(2)	0.2137(1)	0.98–1.01
	1.0	0.2286(8)	0.2292(4)	0.2285(3)	0.2285(2)	0.2286(1)	0.99–1.00
	1.25	0.2481(9)	0.2478(6)	0.2484(3)	0.2477(2)	0.2480(2)	0.97–1.01
	1.5	0.277(1)	0.2778(5)	0.2783(3)	0.2782(2)	0.2781(2)	0.99–1.00
	1.75	0.333(1)	0.3318(6)	0.3331(4)	–	0.3327(3)	0.96–1.24
	2.0	0.480(2)	–	–	–	0.480(2)	1.66
	2.1*	0.639(3)	–	–	–	0.639(3)	0.99

有値分布  $P_i(s_i)$  を対応する chGSE の個別固有値分布  $p_i(s)$  にフィットした例を図示したものである。図 6.3 は各  $i$  における平均準位間隔  $\Delta_i$  の測定値とそれらの重み付き平均を図示した例である。これらが互いに一定性を示すことから、重み付き平均によって  $\Delta_i$  をコンバインすることが正当化される。表 6.4 および表 6.5 において、私たちは (a) SU(2)+ICP 模型および (b) SU(2) $\times$ U(1) 模型の平均準位間隔  $\Delta_i$  とその重み付き平均  $\bar{\Delta}$  の値をそれぞれ示している。これらの表についての注意として、\* とマークされている  $V = 4^4$  の  $\beta = 1.75$  および  $V = 6^4$  の  $\beta = 2.1$  のヒストグラムは、フィットの適合度が  $\chi^2/\text{d.o.f.} > 3.0$  となったために chGSE の  $p_i(s)$  とのフィットに失敗している。このため私たちは固有値分布のフィット範囲を緩和し、これらのヒストグラムに対して、 $p_1(s) < 0.2$  の部分をカットした範囲で再びフィットした結果の値を示している。このフィット範囲であれば  $\chi^2/\text{d.o.f.} < 2.0$  が実現されることが確認されている。

### 遷移パラメータの決定

ステップ (2) で述べたように、私たちは遷移パラメータ  $\rho_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  を決定するために、2 つの模型 : (a) SU(2)+ICP 模型および (b) SU(2) $\times$ U(1) 模型において、それぞれ U(1) の寄与を添

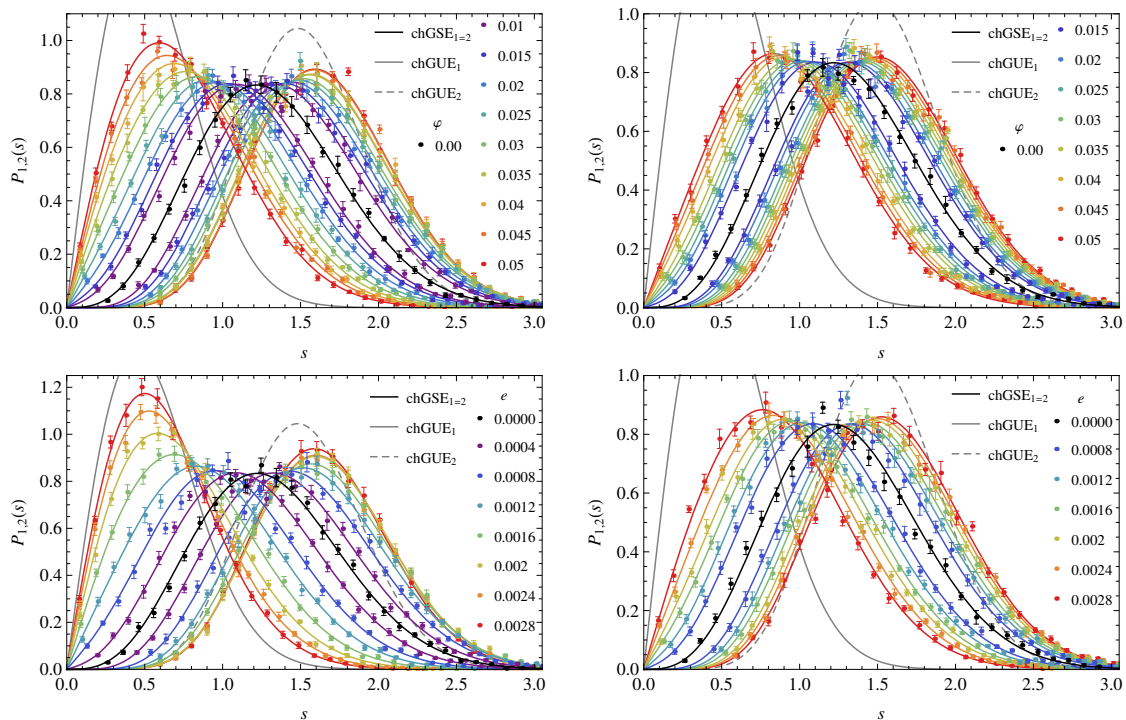


図 6.4 1 番目と 2 番目の Dirac 固有値分布  $P_{1,2}(s)$  の例 : (上) SU(2)+ICP 模型, (下) SU(2) $\times$ U(1) 模型, U(1) パラメータ  $\varphi$  と  $e$  が増加するにつれて、黒 ( $\varphi, e = 0$ ) から始まり、紫 (最小の  $\varphi, e$ ) から赤 (最大の  $\varphi, e$ ) に遷移する。  $V = 6^4$  におけるデータのうち、(左)  $\beta = 1.0$ , (右)  $\beta = 2.0$  を示す。 chGSE と chGUE の曲線はそれぞれ黒色と灰色で示す。 chGSE-chGUE クロスオーバーのベストフィット曲線は対応する Dirac 固有値のヒストグラムと同じ色で示す。 ヒストグラムにおける誤差バーはジャックナイフ法によって推定される。

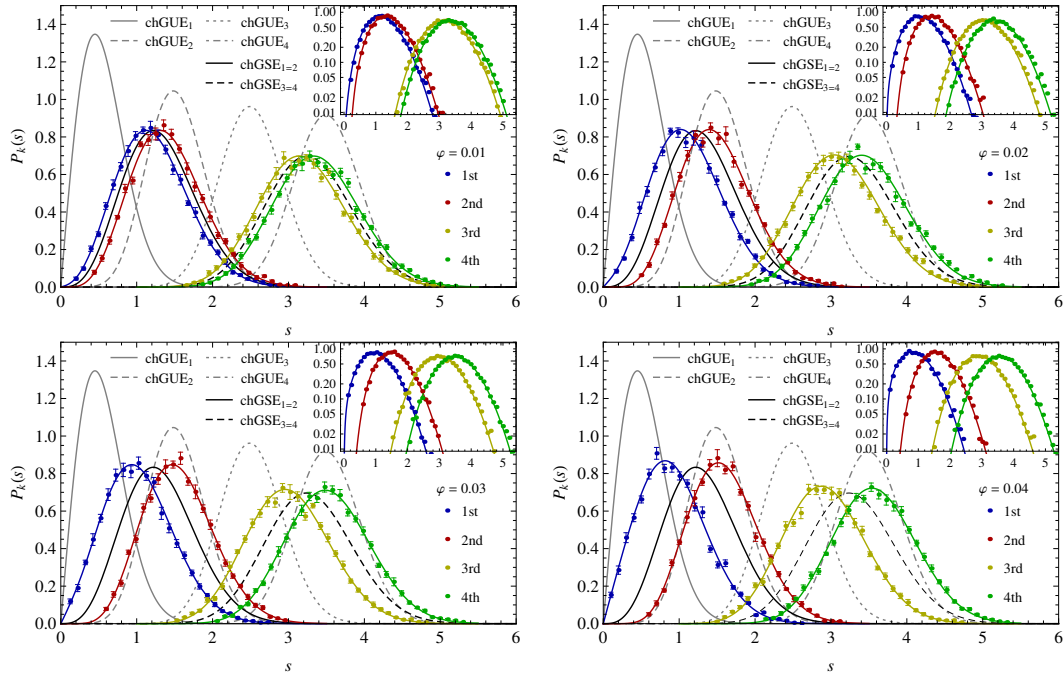


図 6.5  $SU(2)+ICP$  模型における  $V = 6^4$  の  $\beta = 1.75$  に対する最初の 4 つの Dirac 固有値分布  $P_{1,2,3,4}(s)$  (青, 赤, 黄, 緑) と chGSE–chGUE クロスオーバーのベストフィット曲線の線形および対数プロットの例. (左上)  $\varphi = 0.01$ , (右上)  $\varphi = 0.02$ , (左下)  $\varphi = 0.03$ , (右下)  $\varphi = 0.04$ . ヒストグラムにおける誤差バーはジャックナイフ法によって推定される.

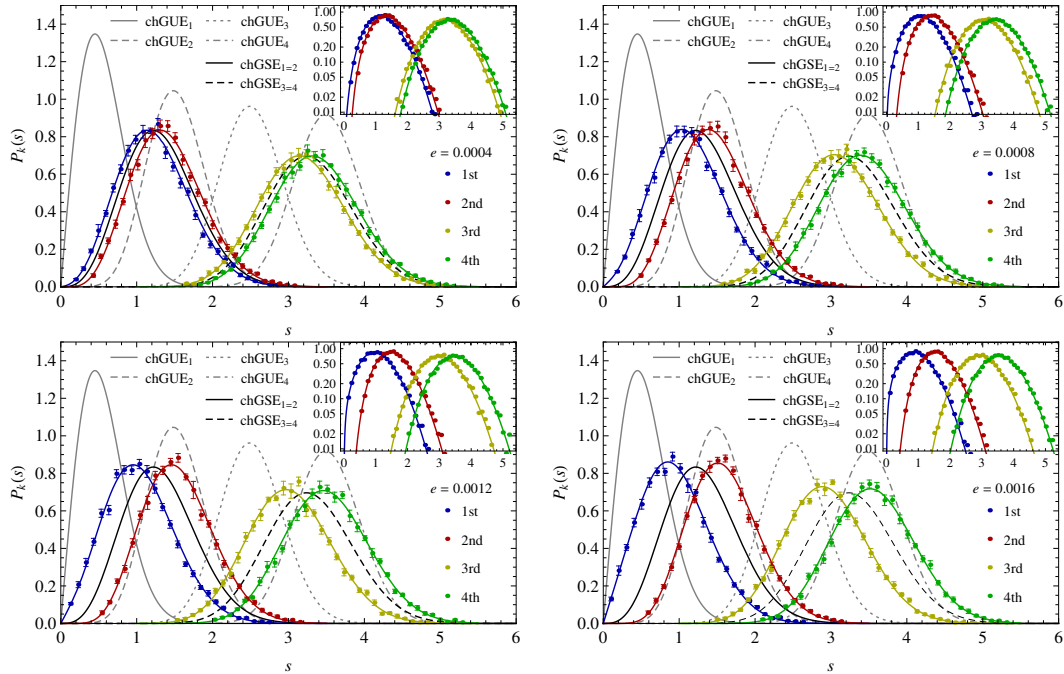


図 6.6  $SU(2) \times U(1)$  模型における  $V = 6^4$  の  $\beta = 1.75$  に対する最初の 4 つの Dirac 固有値分布  $P_{1,2,3,4}(s)$  (青, 赤, 黄, 緑) と chGSE–chGUE クロスオーバーのベストフィット曲線の線形および対数プロットの例. (左上)  $e = 0.0004$ , (右上)  $e = 0.0008$ , (左下)  $e = 0.0012$ , (右下)  $e = 0.0016$ . ヒストグラムにおける誤差バーはジャックナイフ法によって推定される.

加した場合の個別 Dirac 固有値分布を chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布にフィットする．ステップ (1) の場合と同様に， $\rho_k$  を精密に決定するための基準として，固有値分布のフィットの適合度が  $\chi^2/\text{d.o.f.} < 2.0$  である場合のみを採用する．図 6.4 は (a) SU(2)+ICP 模型および (b) SU(2) $\times$ U(1) 模型について U(1) の寄与を添加した個別 Dirac 固有値のヒストグラム  $\{P_1(s_1), P_2(s_2)\}$  とベストフィットした chGSE–chGUE クロスオーバーの  $p_k(s)$  の例をそれぞれ図示したものである．U(1) のパラメータ  $\varphi$  または  $e$  が増加するにつれて，Kramers 縮退が解けて Dirac 固有値分布が chGSE–chGUE クロスオーバーの固有値分布に従って chGUE の固有値分布にシフトしていく様子が確認できる．U(1) の摂動の強さに対するヒストグラムの遷移は大きい  $\beta$  (右図) よりも小さい  $\beta$  (左図) の方が速く遷移する．この事実は低エネルギー定数  $F$  が  $\beta$  に対する減少関数であることを意味する．図 6.5 および図 6.6 は図 6.4 を見やすくするため，各 U(1) パラメータごとに個別 Dirac 固有値のヒストグラムとベストフィットした chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布を示したものである．図 6.5 および図 6.6 は (a) SU(2)+ICP 模型および (b) SU(2) $\times$ U(1) 模型の両方とも， $V = 6^4$  の  $\beta = 1.75$  の場合に対して  $\varphi$  または  $e$  が増加するにつれて 4 つのヒストグラム  $\{P_1(s_1), \dots, P_4(s_4)\}$  が遷移する様子を示した例である．純粋 SU(2) Dirac 固有値に対して，Kramers 縮退しているアンフォールドした固有値  $s_{2i-1} = s_{2i}$  のヒストグラムが chGSE の個別固有値分布とよくフィットできる場合は，いつでも対応する Dirac 固有値のヒストグラムのペア  $\{P_{2i-1}(s_{2i-1}), P_{2i}(s_{2i})\}$  が chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布とよくフィットされる．図 6.7 は (a) SU(2)+ICP 模型および (b) SU(2) $\times$ U(1) 模型における  $V = 6^4$  の  $\beta = 1.75$  の場合に対して，各  $k$  ごとにベストフィットによって得られた遷移パラメータ  $\rho_k$  を図示したものである．図 6.7 から気付くことは，すべての  $\varphi$  または  $e$  において  $\rho_1$  と  $\rho_2$  (または  $\rho_3$  と  $\rho_4$ ) の値が 4 つの重み付き平均の値と交差するように逆方向に動く傾向があるということである．この事実は 6.1.2 節で期待したことを裏付ける．したがって，私たちは  $\rho_k$  を  $(\rho_1, \rho_2)$  や  $(\rho_3, \rho_4)$  のような対の形でコンバインする必要がある．表 6.6 および表 6.7 は (a) SU(2)+ICP 模型において得られた遷移パラメータ  $\rho_k$  とその重み付き平均  $\bar{\rho}$  の値をそれぞれ  $V = 4^4$  および  $V = 6^4$  の場合について示している．表 6.8 および表 6.9 は (b) SU(2) $\times$ U(1) 模型において得られた遷移パラメータ  $\rho_k$  とその重み付き平均  $\bar{\rho}$  の値をそれぞれ  $V = 4^4$  および  $V = 6^4$  の場合について示している．表 6.4 および表 6.5 の場合と同様の注意として，\* とマークされている  $V = 4^4$  の  $\beta = 1.75$  および  $V = 6^4$  の  $\beta = 2.1$  のヒストグラムは，フィットの適合度が  $\chi^2/\text{d.o.f.} > 3.0$  となったため， $p_1(s) < 0.2$  の部分をカットした範囲で再びフィットした結果の値を示している．

表 6.6 SU(2)+ICP 模型における  $V = 4^4$  での遷移パラメータ  $\rho$ .

$\beta$	$\rho$	$\varphi$						$\chi^2/\text{d.o.f.}$
		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	
0	$\rho_1$	0.061(1)	0.122(1)	0.183(1)	0.244(2)	–	–	0.68–1.06
	$\rho_2$	0.061(2)	0.121(2)	0.183(2)	0.238(3)	–	–	0.95–1.71
	$\rho_3$	0.060(2)	0.118(2)	0.181(2)	0.243(2)	–	–	0.50–0.69
	$\rho_4$	0.062(2)	0.125(2)	0.184(2)	0.245(3)	–	–	0.64–1.19
	$\bar{\rho}$	0.0612(8)	0.1214(9)	0.183(1)	0.243(1)	–	–	–
0.25	$\rho_1$	0.060(1)	0.117(1)	0.176(1)	0.234(2)	0.291(2)	–	0.65–1.21
	$\rho_2$	0.057(2)	0.118(2)	0.174(2)	0.234(3)	0.296(4)	–	0.63–1.22
	$\rho_3$	0.062(2)	0.117(2)	0.176(2)	0.235(2)	0.291(3)	–	0.80–1.49
	$\rho_4$	0.056(2)	0.116(2)	0.174(2)	0.231(3)	0.298(4)	–	0.76–1.30
	$\bar{\rho}$	0.0586(8)	0.1169(9)	0.1753(9)	0.234(1)	0.292(1)	–	–
0.5	$\rho_1$	0.056(1)	0.108(1)	0.168(1)	0.224(2)	0.279(2)	–	0.57–1.56
	$\rho_2$	0.056(2)	0.117(2)	0.167(2)	0.227(3)	0.282(4)	–	0.35–1.33
	$\rho_3$	0.056(2)	0.111(2)	0.165(2)	0.228(2)	0.279(2)	–	0.64–1.25
	$\rho_4$	0.057(2)	0.112(2)	0.171(2)	0.217(3)	0.277(4)	–	0.82–1.34
	$\bar{\rho}$	0.0561(8)	0.1113(9)	0.1677(9)	0.224(1)	0.279(1)	–	–
0.75	$\rho_1$	0.055(1)	0.108(1)	0.162(1)	0.216(1)	0.270(2)	–	0.63–0.90
	$\rho_2$	0.053(2)	0.106(2)	0.159(2)	0.213(3)	0.266(4)	–	0.76–1.23
	$\rho_3$	0.056(2)	0.110(2)	0.164(2)	0.218(2)	0.271(2)	–	0.78–1.39
	$\rho_4$	0.051(2)	0.104(2)	0.158(2)	0.210(3)	0.262(3)	–	0.98–1.18
	$\bar{\rho}$	0.0538(8)	0.1073(9)	0.1610(9)	0.215(1)	0.269(1)	–	–
1.0	$\rho_1$	0.052(1)	0.102(1)	0.153(1)	0.203(1)	0.254(2)	–	0.78–1.05
	$\rho_2$	0.050(2)	0.101(2)	0.151(2)	0.201(2)	0.251(3)	–	0.60–1.16
	$\rho_3$	0.050(2)	0.101(2)	0.151(2)	0.202(2)	0.252(2)	–	0.78–1.39
	$\rho_4$	0.051(2)	0.102(2)	0.153(2)	0.204(3)	0.253(3)	–	0.90–1.23
	$\bar{\rho}$	0.0508(8)	0.1015(9)	0.1522(9)	0.203(1)	0.253(1)	–	–
1.25	$\rho_1$	0.048(1)	0.096(1)	0.143(1)	0.190(1)	0.238(2)	0.285(2)	0.88–1.23
	$\rho_2$	0.047(2)	0.095(2)	0.142(2)	0.189(2)	0.236(3)	0.283(4)	0.70–1.14
	$\rho_3$	–	–	–	–	–	–	–
	$\rho_4$	–	–	–	–	–	–	–
	$\bar{\rho}$	0.048(1)	0.095(1)	0.143(9)	0.190(1)	0.237(1)	0.285(2)	–
1.5	$\rho_1$	–	0.087(1)	0.130(1)	0.174(1)	0.217(2)	0.261(2)	0.69–0.94
	$\rho_2$	–	0.086(2)	0.129(2)	0.172(2)	0.214(3)	0.254(3)	0.62–1.03
	$\rho_3$	–	–	–	–	–	–	–
	$\rho_4$	–	–	–	–	–	–	–
	$\bar{\rho}$	–	0.087(1)	0.130(1)	0.173(1)	0.216(1)	0.259(1)	–
1.75*	$\rho_1$	–	0.075(2)	0.113(2)	0.150(2)	0.188(2)	0.226(2)	0.88–1.99
	$\rho_2$	–	0.074(2)	0.110(2)	0.147(3)	0.180(3)	0.216(4)	0.56–1.30
	$\rho_3$	–	–	–	–	–	–	–
	$\rho_4$	–	–	–	–	–	–	–
	$\bar{\rho}$	–	0.075(1)	0.112(2)	0.149(2)	0.186(2)	0.224(2)	–

表 6.7 SU(2)+ICP 模型における  $V = 6^4$  での遷移パラメータ  $\rho$ .

$\beta$	$\rho$	$\varphi$									$\chi^2/\text{d.o.f.}$
		0.01	0.015	0.02	0.025	0.03	0.035	0.04	0.045	0.05	
0	$\rho_1$	0.093(3)	0.135(3)	0.178(3)	0.228(3)	–	–	–	–	–	0.54–1.18
	$\rho_2$	0.089(3)	0.138(4)	0.187(5)	0.228(6)	–	–	–	–	–	0.47–1.40
	$\rho_3$	0.083(4)	0.135(4)	0.173(4)	0.223(4)	–	–	–	–	–	0.56–1.30
	$\rho_4$	0.099(4)	0.138(4)	0.191(5)	0.236(6)	–	–	–	–	–	0.76–1.09
	$\bar{\rho}$	0.091(2)	0.136(2)	0.180(2)	0.228(2)	–	–	–	–	–	–
0.25	$\rho_1$	0.088(3)	0.135(3)	0.177(3)	0.223(3)	–	–	–	–	–	0.87–1.32
	$\rho_2$	0.087(3)	0.130(4)	0.171(4)	0.215(5)	–	–	–	–	–	0.51–1.37
	$\rho_3$	0.090(4)	0.133(4)	0.179(4)	0.218(4)	–	–	–	–	–	0.66–1.05
	$\rho_4$	0.087(4)	0.132(4)	0.169(4)	0.229(6)	–	–	–	–	–	0.76–1.19
	$\bar{\rho}$	0.088(2)	0.133(2)	0.175(2)	0.221(2)	–	–	–	–	–	–
0.5	$\rho_1$	0.083(3)	0.119(3)	0.168(3)	0.217(3)	–	–	–	–	–	0.96–1.25
	$\rho_2$	0.085(3)	0.135(4)	0.170(4)	0.201(5)	–	–	–	–	–	0.60–0.94
	$\rho_3$	0.083(4)	0.123(4)	0.166(4)	0.222(4)	–	–	–	–	–	0.77–1.32
	$\rho_4$	0.086(4)	0.130(4)	0.173(5)	0.200(5)	–	–	–	–	–	0.48–1.23
	$\bar{\rho}$	0.084(2)	0.125(2)	0.169(2)	0.213(2)	–	–	–	–	–	–
0.75	$\rho_1$	0.082(3)	0.123(3)	0.157(3)	0.202(3)	0.240(3)	–	–	–	–	0.70–1.47
	$\rho_2$	0.077(3)	0.119(4)	0.171(4)	0.205(5)	0.246(6)	–	–	–	–	0.46–1.12
	$\rho_3$	0.087(4)	0.124(4)	0.163(4)	0.207(4)	0.241(4)	–	–	–	–	0.60–1.14
	$\rho_4$	0.076(4)	0.116(4)	0.159(4)	0.200(5)	0.244(6)	–	–	–	–	0.80–1.33
	$\bar{\rho}$	0.081(2)	0.121(2)	0.161(2)	0.203(2)	0.242(2)	–	–	–	–	–
1.0	$\rho_1$	0.076(3)	0.111(3)	0.153(3)	0.188(3)	0.233(3)	–	–	–	–	0.49–0.97
	$\rho_2$	0.080(3)	0.117(4)	0.157(4)	0.197(5)	0.228(6)	–	–	–	–	0.71–1.27
	$\rho_3$	0.078(4)	0.108(4)	0.146(4)	0.186(4)	0.227(4)	–	–	–	–	0.75–1.38
	$\rho_4$	0.078(4)	0.125(4)	0.165(5)	0.199(5)	0.233(6)	–	–	–	–	0.70–1.13
	$\bar{\rho}$	0.078(2)	0.114(2)	0.154(2)	0.191(2)	0.231(2)	–	–	–	–	–
1.25	$\rho_1$	0.074(3)	0.107(3)	0.146(3)	0.180(3)	0.213(3)	–	–	–	–	0.54–1.31
	$\rho_2$	0.073(3)	0.113(4)	0.144(4)	0.180(5)	0.219(5)	–	–	–	–	0.67–1.05
	$\rho_3$	0.071(4)	0.106(4)	0.152(4)	0.181(4)	0.214(4)	–	–	–	–	0.84–0.98
	$\rho_4$	0.074(4)	0.111(4)	0.138(4)	0.179(5)	0.222(5)	–	–	–	–	0.66–1.24
	$\bar{\rho}$	0.073(2)	0.109(2)	0.145(2)	0.180(2)	0.216(2)	–	–	–	–	–
1.5	$\rho_1$	0.068(3)	0.099(3)	0.136(3)	0.169(3)	0.196(3)	0.230(3)	–	–	–	0.6–0.89
	$\rho_2$	0.067(3)	0.104(4)	0.132(4)	0.158(4)	0.206(5)	0.240(6)	–	–	–	0.60–1.02
	$\rho_3$	0.069(4)	0.106(4)	0.141(4)	0.172(4)	0.201(4)	0.232(4)	–	–	–	0.80–1.17
	$\rho_4$	0.063(4)	0.094(4)	0.128(4)	0.157(4)	0.200(5)	0.231(6)	–	–	–	0.84–1.32
	$\bar{\rho}$	0.067(2)	0.100(2)	0.135(2)	0.166(2)	0.199(2)	0.232(2)	–	–	–	–
1.75	$\rho_1$	0.058(3)	0.090(3)	0.115(3)	0.148(3)	0.172(3)	0.209(3)	–	–	–	0.67–1.21
	$\rho_2$	0.060(3)	0.084(3)	0.121(4)	0.144(4)	0.181(5)	0.203(5)	–	–	–	0.67–1.60
	$\rho_3$	0.057(4)	0.091(4)	0.117(4)	0.148(4)	0.178(4)	0.216(4)	–	–	–	0.76–1.54
	$\rho_4$	0.060(4)	0.083(4)	0.116(4)	0.145(4)	0.172(5)	0.192(5)	–	–	–	0.77–1.68
	$\bar{\rho}$	0.059(2)	0.087(2)	0.117(2)	0.147(2)	0.175(2)	0.207(2)	–	–	–	–
2.0	$\rho_1$	–	0.072(3)	0.095(3)	0.117(3)	0.140(3)	0.163(3)	0.185(3)	0.207(3)	0.230(3)	0.94–1.48
	$\rho_2$	–	0.063(3)	0.085(3)	0.108(4)	0.131(4)	0.152(4)	0.173(4)	0.194(5)	0.214(5)	0.90–1.37
	$\rho_3$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\rho_4$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\bar{\rho}$	–	0.068(2)	0.091(2)	0.114(2)	0.137(2)	0.159(2)	0.181(2)	0.204(3)	0.226(3)	–
2.1*	$\rho_1$	–	–	0.079(4)	–	0.114(4)	0.133(4)	0.151(4)	0.170(4)	0.189(4)	1.55–1.90
	$\rho_2$	–	–	0.064(5)	–	0.101(5)	0.119(5)	0.137(5)	0.150(6)	0.167(6)	1.42–1.94
	$\rho_3$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\rho_4$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\bar{\rho}$	–	–	0.073(3)	–	0.109(3)	0.128(3)	0.147(3)	0.165(3)	0.183(3)	–

表 6.8 SU(2)×U(1) 模型における  $V = 4^4$  での遷移パラメータ  $\rho$ .

$\beta$	$\rho$	$e$							$\chi^2/\text{d.o.f.}$
		0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.008	0.010	
0	$\rho_1$	0.093(1)	0.136(1)	0.186(1)	0.232(2)	0.276(2)	–	–	0.62–1.52
	$\rho_2$	0.905(2)	0.142(2)	0.181(2)	0.225(3)	0.277(4)	–	–	0.73–1.38
	$\rho_3$	0.089(2)	0.136(2)	0.183(2)	0.231(2)	0.273(2)	–	–	0.82–1.20
	$\rho_4$	0.094(2)	0.139(2)	0.187(2)	0.230(3)	0.280(4)	–	–	0.81–1.08
	$\bar{\rho}$	0.0918(8)	0.1378(9)	0.184(1)	0.230(1)	0.276(1)	–	–	–
0.25	$\rho_1$	0.088(1)	0.136(1)	0.176(1)	0.225(2)	0.265(2)	–	–	0.48–1.14
	$\rho_2$	0.088(2)	0.128(2)	0.177(2)	0.216(3)	0.264(3)	–	–	0.76–1.75
	$\rho_3$	0.087(2)	0.137(2)	0.175(2)	0.226(2)	0.262(2)	–	–	0.55–1.04
	$\rho_4$	0.088(2)	0.128(2)	0.176(2)	0.214(3)	0.261(3)	–	–	0.75–1.53
	$\bar{\rho}$	0.0880(8)	0.1331(9)	0.1760(9)	0.222(1)	0.264(1)	–	–	–
0.5	$\rho_1$	0.083(1)	0.126(1)	0.167(1)	0.210(2)	0.251(2)	–	–	0.50–0.99
	$\rho_2$	0.086(2)	0.128(2)	0.170(2)	0.212(3)	0.256(3)	–	–	0.53–0.94
	$\rho_3$	0.086(2)	0.121(2)	0.170(2)	0.206(2)	0.255(2)	–	–	0.79–1.34
	$\rho_4$	0.082(2)	0.133(2)	0.166(2)	0.218(3)	0.248(3)	–	–	0.38–1.34
	$\bar{\rho}$	0.0840(8)	0.1262(9)	0.1682(9)	0.210(1)	0.252(1)	–	–	–
0.75	$\rho_1$	0.078(1)	0.118(1)	0.159(1)	0.199(1)	0.239(2)	–	–	0.68–1.22
	$\rho_2$	0.082(2)	0.122(2)	0.163(2)	0.202(2)	0.244(3)	–	–	0.48–0.84
	$\rho_3$	0.081(2)	0.116(2)	0.161(2)	0.196(2)	0.242(2)	–	–	0.72–1.01
	$\rho_4$	0.080(2)	0.124(2)	0.159(2)	0.204(3)	0.237(3)	–	–	0.62–1.40
	$\bar{\rho}$	0.0799(8)	0.1198(9)	0.1602(9)	0.200(1)	0.240(1)	–	–	–
1.0	$\rho_1$	0.075(1)	0.114(1)	0.150(1)	0.189(1)	0.225(2)	0.300(2)	–	0.75–1.27
	$\rho_2$	0.075(2)	0.111(2)	0.150(2)	0.184(2)	0.223(3)	0.296(4)	–	1.00–1.55
	$\rho_3$	0.076(2)	0.114(2)	0.151(2)	0.189(2)	0.226(2)	0.303(3)	–	0.94–1.62
	$\rho_4$	0.073(2)	0.111(2)	0.147(2)	0.183(2)	0.218(2)	0.283(4)	–	0.86–1.20
	$\bar{\rho}$	0.0748(8)	0.1126(9)	0.1494(9)	0.187(1)	0.224(1)	0.298(1)	–	–
1.25	$\rho_1$	0.068(1)	0.103(1)	0.138(1)	0.172(1)	0.208(1)	0.278(2)	–	0.60–1.15
	$\rho_2$	0.069(2)	0.104(2)	0.138(2)	0.172(2)	0.206(3)	0.272(4)	–	0.53–0.95
	$\rho_3$	0.069(2)	0.107(2)	0.139(2)	0.177(2)	0.210(2)	0.281(2)	–	1.14–1.57
	$\rho_4$	0.069(2)	0.097(2)	0.134(2)	0.162(2)	0.201(3)	0.264(3)	–	1.32–1.65
	$\bar{\rho}$	0.0688(8)	0.1032(8)	0.1377(9)	0.1716(9)	0.207(1)	0.276(1)	–	–
1.5	$\rho_1$	0.063(1)	0.092(1)	0.125(1)	0.154(1)	0.187(1)	0.250(2)	0.313(2)	0.68–1.06
	$\rho_2$	0.060(2)	0.093(2)	0.121(2)	0.154(2)	0.180(2)	0.236(3)	0.286(4)	0.61–1.25
	$\rho_3$	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\rho_4$	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\bar{\rho}$	0.062(1)	0.092(1)	0.123(1)	0.154(1)	0.185(1)	0.246(1)	0.308(2)	–
1.75*	$\rho_1$	0.054(2)	–	0.106(2)	–	0.158(2)	0.210(2)	0.263(2)	1.35–1.63
	$\rho_2$	0.049(2)	–	0.100(2)	–	0.148(2)	0.195(3)	0.236(3)	1.16–1.77
	$\rho_3$	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\rho_4$	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\bar{\rho}$	0.052(1)	–	0.103(1)	–	0.154(1)	0.206(1)	0.258(2)	–

表 6.9 SU(2)×U(1) 模型における  $V = 6^4$  での遷移パラメータ  $\rho$ .

$\beta$	$\rho$	$e$										$\chi^2/\text{d.o.f.}$
		0.0004	0.0006	0.0008	0.0010	0.0012	0.0014	0.0016	0.0020	0.0024	0.0028	
0	$\rho_1$	0.090(3)	0.149(3)	0.192(3)	0.241(3)	–	–	–	–	–	–	0.72–1.03
	$\rho_2$	0.102(4)	0.134(4)	0.187(5)	0.232(6)	–	–	–	–	–	–	0.97–1.31
	$\rho_3$	0.098(4)	0.147(4)	0.196(4)	0.236(4)	–	–	–	–	–	–	0.67–1.45
	$\rho_4$	0.092(4)	0.138(4)	0.183(5)	0.240(6)	–	–	–	–	–	–	0.59–1.09
	$\bar{\rho}$	0.095(2)	0.143(2)	0.190(2)	0.238(2)	–	–	–	–	–	–	–
0.25	$\rho_1$	0.093(3)	0.134(3)	0.185(3)	0.225(3)	–	–	–	–	–	–	0.49–1.21
	$\rho_2$	0.089(3)	0.143(4)	0.180(5)	0.238(6)	–	–	–	–	–	–	0.97–1.41
	$\rho_3$	0.093(4)	0.132(4)	0.184(4)	0.223(4)	–	–	–	–	–	–	0.67–1.31
	$\rho_4$	0.090(4)	0.147(4)	0.180(5)	0.243(6)	–	–	–	–	–	–	1.01–1.51
	$\bar{\rho}$	0.092(2)	0.138(2)	0.183(2)	0.228(2)	–	–	–	–	–	–	–
0.5	$\rho_1$	0.090(3)	0.127(3)	0.177(3)	0.215(3)	–	–	–	–	–	–	0.73–1.19
	$\rho_2$	0.085(3)	0.140(4)	0.173(4)	0.230(6)	–	–	–	–	–	–	0.57–1.20
	$\rho_3$	0.085(4)	0.128(4)	0.173(4)	0.214(4)	–	–	–	–	–	–	0.64–1.10
	$\rho_4$	0.091(4)	0.135(4)	0.180(5)	0.222(5)	–	–	–	–	–	–	0.82–0.98
	$\bar{\rho}$	0.088(2)	0.131(2)	0.176(2)	0.218(2)	–	–	–	–	–	–	–
0.75	$\rho_1$	0.082(3)	0.124(3)	0.166(3)	0.206(3)	0.249(3)	–	–	–	–	–	0.77–0.96
	$\rho_2$	0.084(3)	0.128(4)	0.167(4)	0.213(5)	0.250(6)	–	–	–	–	–	0.74–0.79
	$\rho_3$	0.082(4)	0.123(4)	0.166(4)	0.205(4)	0.248(5)	–	–	–	–	–	0.84–1.02
	$\rho_4$	0.082(4)	0.129(4)	0.163(4)	0.214(5)	0.244(6)	–	–	–	–	–	0.94–1.12
	$\bar{\rho}$	0.082(2)	0.125(2)	0.166(2)	0.208(2)	0.248(2)	–	–	–	–	–	–
1.0	$\rho_1$	0.081(3)	0.116(3)	0.155(3)	0.193(3)	0.232(3)	–	–	–	–	–	1.02–1.36
	$\rho_2$	0.073(3)	0.117(4)	0.154(4)	0.194(5)	0.231(6)	–	–	–	–	–	0.75–1.01
	$\rho_3$	0.083(4)	0.113(4)	0.161(4)	0.191(4)	0.241(5)	–	–	–	–	–	0.36–1.45
	$\rho_4$	0.072(4)	0.119(4)	0.155(4)	0.196(5)	0.234(6)	–	–	–	–	–	0.75–1.09
	$\bar{\rho}$	0.078(2)	0.116(2)	0.156(2)	0.193(2)	0.234(2)	–	–	–	–	–	–
1.25	$\rho_1$	0.070(3)	0.108(3)	0.143(3)	0.178(3)	0.216(3)	–	–	–	–	–	0.70–1.13
	$\rho_2$	0.076(3)	0.110(4)	0.149(4)	0.182(5)	0.222(6)	–	–	–	–	–	0.76–0.95
	$\rho_3$	0.073(4)	0.111(4)	0.144(4)	0.184(4)	0.217(4)	–	–	–	–	–	0.87–1.23
	$\rho_4$	0.071(4)	0.108(4)	0.143(4)	0.179(5)	0.213(5)	–	–	–	–	–	0.48–0.94
	$\bar{\rho}$	0.072(2)	0.109(2)	0.144(2)	0.180(2)	0.217(2)	–	–	–	–	–	–
1.5	$\rho_1$	0.062(3)	0.095(3)	0.130(3)	0.160(3)	0.195(3)	–	–	–	–	–	0.77–1.33
	$\rho_2$	0.068(3)	0.098(3)	0.132(4)	0.165(4)	0.196(5)	–	–	–	–	–	0.68–1.26
	$\rho_3$	0.069(4)	0.100(4)	0.129(4)	0.164(4)	0.193(4)	–	–	–	–	–	0.78–1.25
	$\rho_4$	0.059(4)	0.094(4)	0.127(4)	0.157(4)	0.189(5)	–	–	–	–	–	0.96–0.99
	$\bar{\rho}$	0.064(2)	0.097(2)	0.130(2)	0.161(2)	0.194(2)	–	–	–	–	–	–
1.75	$\rho_1$	0.052(3)	0.079(3)	0.108(3)	0.133(3)	0.163(3)	0.187(3)	0.217(3)	–	–	–	0.93–1.24
	$\rho_2$	0.057(3)	0.085(3)	0.113(4)	0.140(4)	0.167(4)	0.194(5)	0.220(5)	–	–	–	0.87–1.20
	$\rho_3$	0.060(4)	0.075(4)	0.115(4)	0.129(4)	0.170(4)	0.183(4)	0.226(4)	–	–	–	0.66–1.22
	$\rho_4$	0.049(4)	0.088(4)	0.102(4)	0.141(4)	0.154(4)	0.195(5)	0.204(5)	–	–	–	0.46–1.09
	$\bar{\rho}$	0.055(2)	0.081(2)	0.109(2)	0.135(2)	0.163(2)	0.188(2)	0.217(2)	–	–	–	–
2.0	$\rho_1$	–	0.057(3)	0.080(3)	0.096(3)	0.118(3)	0.134(3)	0.156(3)	0.194(3)	0.234(3)	0.272(3)	0.95–1.44
	$\rho_2$	–	0.058(3)	0.073(3)	0.095(3)	0.110(4)	0.132(4)	0.147(4)	0.180(5)	0.215(5)	0.244(6)	0.90–1.94
	$\rho_3$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\rho_4$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\bar{\rho}$	–	0.57(2)	0.077(2)	0.096(2)	0.115(2)	0.133(2)	0.153(2)	0.190(2)	0.229(3)	0.266(3)	–
2.1*	$\rho_1$	–	–	0.062(4)	–	0.091(4)	–	–	0.147(4)	0.176(4)	0.205(4)	1.03–1.56
	$\rho_2$	–	–	0.059(5)	–	0.087(5)	–	–	0.139(5)	0.162(6)	0.187(7)	1.29–1.76
	$\rho_3$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\rho_4$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	$\bar{\rho}$	–	–	0.061(3)	–	0.089(3)	–	–	0.144(3)	0.172(3)	0.201(3)	–



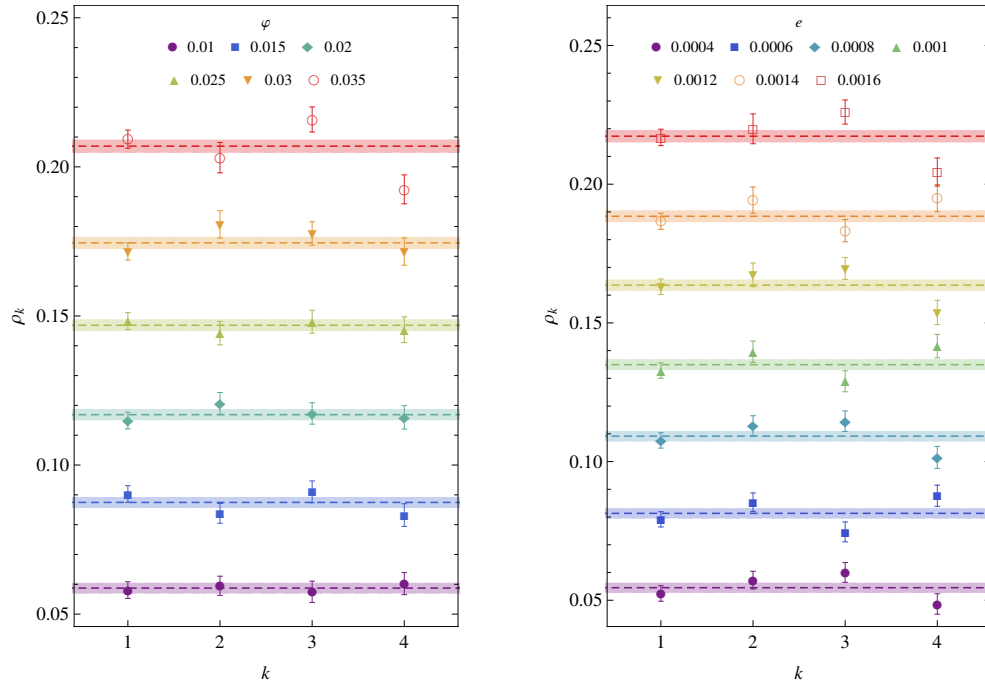


図 6.7  $P_{1,2,3,4}(s)$  から決められた遷移パラメータ  $\rho_{1,2,3,4}$  の例. これらの重み付き平均と誤差は同じ色の点線とストライプでそれぞれ示される. (左)  $SU(2)+ICP$  模型における  $\varphi = 0.01-0.035$  (紫から赤), (右)  $SU(2)\times U(1)$  模型における  $e = 0.0004-0.0016$  (紫から赤). どちらも  $V = 6^4$  の  $\beta = 1.75$  に対するデータである.

## 6.2.2 低エネルギー一定数の決定

カイラル凝縮  $\Sigma$  は表 6.4 および表 6.5 において示した  $\bar{\Delta}$  の値から (6.7) を用いて決定される. 表 6.10 に示されるように,  $V = 4^4$  および  $V = 6^4$  における各  $\beta$  に対する  $\Sigma$  の値は (a)  $SU(2)+ICP$  模型における値を 3 行目, (b)  $SU(2)\times U(1)$  模型における値を 5 行目にそれぞれリストされている. それに加えて, 私たちは熱力学極限  $V \rightarrow \infty$  における  $\Sigma$  の値を推定している. これらの値は熱力学極限における値を推定できた  $SU(2)$  ゲージ結合定数  $\beta$  の範囲においてリストされている.  $V = 4^4$  の  $\beta = 1.75$  でのヒストグラムのフィット範囲は  $\beta \leq 1.5$  の場合と比べて妥協しているが, 私たちは参考値としてあえてこれらのデータを用いて低エネルギー一定数の熱力学極限を推定することにする.  $\pi$  中間子の崩壊定数  $F$  は (6.8) および (6.9) から, 本質的に  $U(1)$  の摂動の強さ ( $\mu_1$  または  $e$ ) と遷移パラメータ  $\rho$  の間の比例定数である. 図 6.8 は,  $V = 6^4$  の各  $\beta$  に対して, 左図に (a)  $SU(2)+ICP$  模型における比  $\bar{\rho}/\mu_1$  の  $\mu_1$  依存性, 右図に (b)  $SU(2)\times U(1)$  模型における比  $\bar{\rho}/e$  の  $e$  依存性を図示している. 各模型に対して,  $\mu_1$  または  $e$  が増加するにつれて, その比  $\bar{\rho}/\mu_1$  または  $\bar{\rho}/e$  の非常にすぐれた一定性が観察される. この事実は各  $\beta$  において利用可能な全ての  $\mu_1$  または  $e$  に対して,  $\bar{\rho}/\mu_1$  または  $\bar{\rho}/e$  の値をコンバインすることを正当化する. その結果, コンバインした比の値の誤差は著しく低減される. この方法で決定される  $\pi$  中間子の崩壊定数の値は

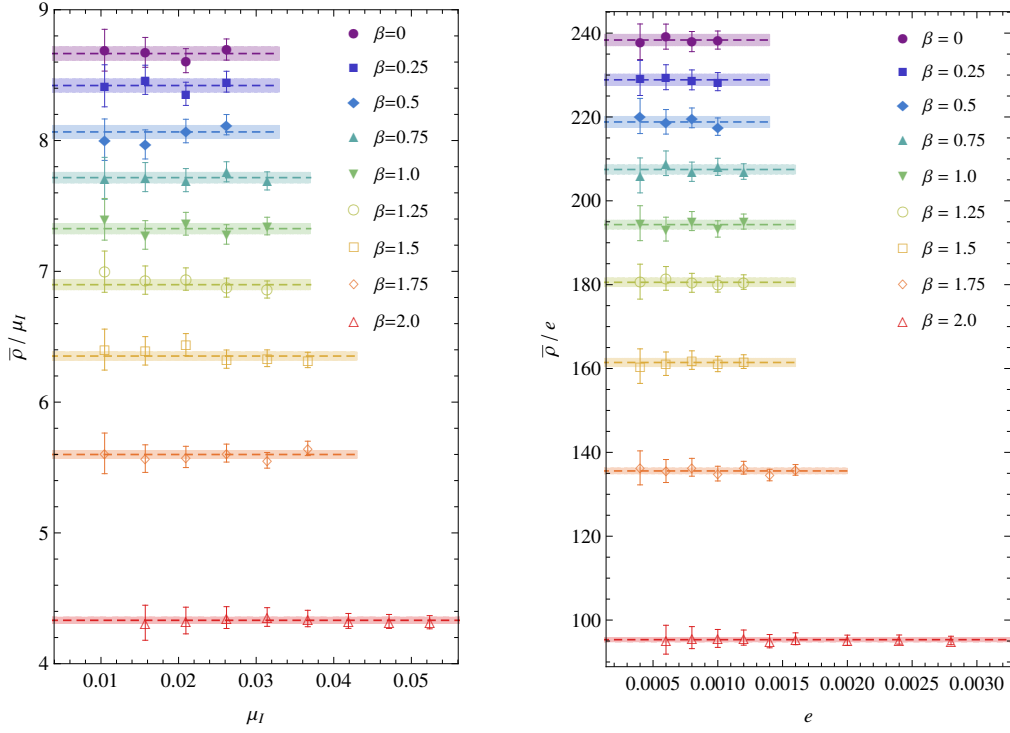


図 6.8 遷移パラメータと U(1) の摂動の強さの間の比：(左) SU(2)+ICP 模型に対する  $\bar{\rho}/\mu_1$ 、(右) SU(2) $\times$ U(1) 模型に対する  $\bar{\rho}/e$ 。  $V = 6^4$  の各  $\beta$  における比の  $\mu_1$  または  $e$  依存性を示す。色付きの点線とストライプは比の重み付き平均と誤差を示す。

表 6.10 における 4 行目 (SU(2)+ICP 模型) と 6 行目 (SU(2) $\times$ U(1) 模型) にリストされている。(a) SU(2)+ICP 模型に対する  $\Sigma$  と  $F^2$  の値は  $V = 4^4$  および  $V = 6^4$  の小規模な格子状においてそれぞれ  $O(10^{-4})$  および  $O(10^{-3})$  の精度で決定される。この観察は、アイソスピン ICP を持つ SU(3) ゲージ理論の文脈において Ref. [42] で最初に主張されたように、これらの値を熱力学極限  $V \rightarrow \infty$  に外挿することができる。熱力学極限における値は表 6.10 の下側にリストされている。一方で、(b) SU(2) $\times$ U(1) 模型に対する  $F^2\mu_1^2/e^2$  の値は格子の体積  $V$  とともに線形にスケールすることが見いだされる。したがって、私たちは  $V = 4^4, 6^4$  における  $F^2\mu_1^2/(e^2V)$  の値とその熱力学極限における推定値もリストしている。最後に、私たちは図 6.9 において、 $V = 4^4, 6^4$  および  $\infty$  における 2 つの低エネルギー定数の SU(2) ゲージ結合定数  $\beta$  依存性を図示する。左図が (a) SU(2)+ICP 模型、右図が (b) SU(2) $\times$ U(1) 模型における結果である。注意：図 6.9 はエラーバー付きのプロットであるが、エラーバーの大きさが小さいために、エラーバーはプロットのシンボルによって不鮮明になっている。

表 6.10 SU(2)+ICP 模型および SU(2) $\times$ U(1) 模型から決定された低エネルギー定数  $\Sigma$  および  $F$ .  $V = 4^4$  および  $6^4$  に対する値とそれらの外挿による熱力学極限 (TDL) を示す.

		SU(2)+ICP		SU(2) $\times$ U(1)		
$V$	$\beta$	$\Sigma a^3$	$F^2 a^2$	$\Sigma a^3$	$F^2 \mu_1^2 a^4 / e^2$	$F^2 \mu_1^2 a^4 / (e^2 V)$
$4^4$	0	1.3180(4)	0.289(2)	1.3179(4)	40.8(2)	0.1594(8)
	0.25	1.2645(4)	0.267(1)	1.2641(4)	37.6(2)	0.1468(7)
	0.5	1.2057(4)	0.244(1)	1.2070(4)	34.1(2)	0.1331(7)
	0.75	1.1416(4)	0.226(1)	1.1395(4)	30.8(2)	0.1203(6)
	1.0	1.0669(5)	0.201(1)	1.0649(5)	26.9(1)	0.1051(6)
	1.25	0.9783(7)	0.176(1)	0.9798(7)	22.9(1)	0.0893(4)
	1.5	0.8713(2)	0.1463(9)	0.869(2)	18.3(1)	0.0715(4)
	1.75*	0.720(2)	0.109(1)	0.723(1)	12.8(1)	0.0500(4)
$6^4$	0	1.3092(8)	0.286(3)	1.3075(8)	216(2)	0.167(2)
	0.25	1.2574(8)	0.270(3)	1.2573(8)	199(2)	0.154(2)
	0.5	1.1982(9)	0.248(3)	1.1996(8)	182(2)	0.141(2)
	0.75	1.1342(7)	0.227(2)	1.1341(7)	164(2)	0.126(1)
	1.0	1.0639(7)	0.204(2)	1.0604(7)	144(2)	0.111(1)
	1.25	0.9774(6)	0.181(2)	0.9776(6)	124(1)	0.096(1)
	1.5	0.8714(6)	0.154(2)	0.8716(6)	99(1)	0.0766(9)
	1.75	0.7279(7)	0.119(1)	0.7286(7)	70.0(7)	0.0540(5)
	2.0	0.502(2)	0.0715(8)	0.505(2)	34.6(4)	0.0267(3)
	2.1*	0.379(1)	0.0465(9)	0.379(2)	19.8(4)	0.0153(3)
TDL	0	1.2916(4)	0.280(2)	1.2865(4)	–	0.1819(7)
	0.25	1.2432(4)	0.275(1)	1.2435(4)	–	0.1681(7)
	0.5	1.1832(4)	0.254(1)	1.1848(3)	–	0.1559(6)
	0.75	1.1195(3)	0.229(1)	1.1234(3)	–	0.1387(6)
	1.0	1.0579(4)	0.212(1)	1.0513(4)	–	0.1227(4)
	1.25	0.9756(5)	0.1912(9)	0.9732(5)	–	0.1088(4)
	1.5	0.8717(5)	0.1684(8)	0.8769(5)	–	0.0867(4)
	1.75*	0.7439(6)	0.1402(7)	0.7399(6)	–	0.0619(3)

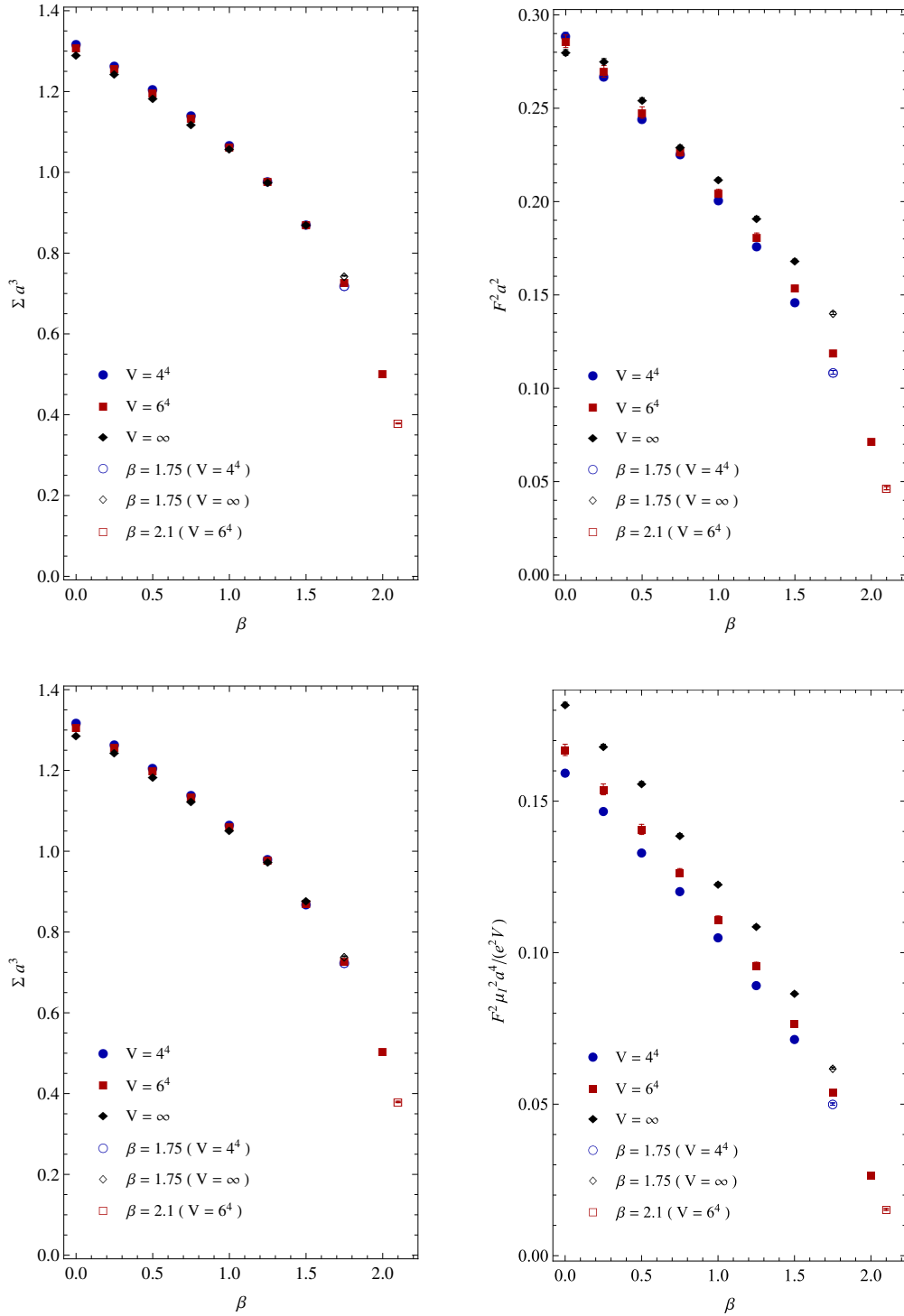


図 6.9 低エネルギー一定数の SU(2) ゲージ結合定数依存性 : (上) SU(2)+ICP 模型から得られた  $\Sigma$  (左) および  $F^2$  (右), (下) SU(2) $\times$ U(1) 模型から得られた  $\Sigma$  (左) および  $F^2 \mu_1^2 / (e^2 V)$  (右). 青と赤の塗りつぶされたシンボルは  $V = 4^4$  および  $6^4$  における値を表し, 黒の塗りつぶされたシンボルは  $V \rightarrow \infty$  に外挿された値を表す. 中空のシンボルは表 6.4 から表 6.10 における \* の印のある場合に対応する.

## 第 7 章

# まとめと考察

本論文では、第 2 章から第 5 章において本論文で必要となる基本事項について簡単な短いレビューを行い、第 6 章において本論文の主題である  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論の低エネルギー定数を精密に決定する方法について議論した。本論文において採用した 2 つの模型：(a) 虚数化学ポテンシャルを持つ  $SU(2)$  格子ゲージ理論および (b)  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論について、基本表現におけるスタッガード Dirac 演算子の個別固有値分布は遷移カイラルランダム行列の一つである chGSE–chGUE クロスオーバーの  $k$ -th 最小固有値分布  $p_k(s)$  と非常によくフィットできた。個別 Dirac 固有値分布と遷移カイラルランダム行列の個別固有値分布のフィットは  $SU(2)$  格子ゲージ理論の強結合領域からスケーリング領域に近い領域まで適用することができた。純粋  $SU(2)$  格子ゲージ理論の最初の 4 つの非縮退の Dirac 固有値分布を用いて得られた平均準位間隔をコンバインする方法は、微視的固有値密度または最小固有値分布を用いる方法の代わりに、カイラル凝縮を  $\mathcal{O}(10^{-4})$  の精度で決定することを可能にした。遷移カイラルランダム行列の非累積的な個別固有値分布と Dirac 固有値のヒストグラムとの非常にすぐれた 1 パラメータフィットの基準  $\chi^2/\text{d.o.f.} < 2$  は  $U(1)$  の摂動 ( $\mu_1, e \ll 1$ ) においてほとんどの場合に達成された。 $U(1)$  の摂動によって Kramers 縮退が解けた最初の 4 つの固有値分布を用いて得られた遷移パラメータ  $\rho$  に対するコンバインの方法は  $\rho$  における系統誤差の改善や統計誤差の低減に寄与した。 $p_k(s)$  の  $\rho$  に対する鋭敏な感度や図 6.8 で観察された  $U(1)$  の摂動の強さ (AB フラックス  $\phi$  または  $U(1)$  結合定数  $e$ ) に対する  $\rho$  の線形依存性は  $\mathcal{O}(10^{-3})$  の精度において  $\pi$  中間子の崩壊定数 (すなわち、 $SU(2)$  の擬実性を破る項の係数) を決定できるという結果を得られた。

本論文において、私たちは  $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論の低エネルギー定数を個別 Dirac 固有値分布と chGSE–chGUE クロスオーバーの個別固有値分布を用いて精密に決定するための新しい方法を提案した。 $SU(2) \times U(1)$  格子ゲージ理論のような QCD ライクな理論において  $F$  を決定する本論文の方法は比較的小規模な格子上で実行可能であることが示された。この事実は  $F$  を計算する上で、従来の時間方向に大きい格子を必要とする軸性カレント相関関数を用いる方法と比較して明らかに有利である。今後の展望として、本論文の方法は (擬) 実表現におけるフェルミオンを持つテクニカラー模型の候補となるゲージ理論に対して適用可能である。その理論の例として、2 フレーバーの随伴表現フェルミオンを持つ  $SU(N)$  ゲージ理論 [106] が挙げられる。この理論は格

子上のフェルミオンとしてオーバーラップ Dirac 演算子を用いる場合, chGSE クラスに属することが知られている [25]. ICP 模型の格子シミュレーションによって得られる低エネルギー定数の高精度な決定方法は, 加速器による衝突実験からの知見との比較に基づき, 素粒子標準模型を越えた理論の候補から信頼されるシナリオを選び出すことに寄与するだろうと考えられる.

# 謝辞

本論文は島根大学大学院総合理工学研究科博士後期課程に在籍中の研究成果をまとめたものである。指導教員の島根大学大学院総合理工学研究科 田中宏志教授には本論文の作成にあたり多大なご尽力を賜りました。深く感謝の意を表します。本論文の作成のもとになった研究を遂行するにあたってご指導いただいた島根大学大学院総合理工学研究科 望月真佑准教授に御礼申し上げます。本論文の審査にあたり貴重なご助言をいただきました島根大学大学院総合理工学研究科 中西敏浩教授，三好清貴教授，武藤哲也准教授に心より感謝申し上げます。島根大学大学院総合理工学研究科 北川裕之准教授には大学入学時から大変お世話になり，日頃から激励の言葉をいただきました。厚く感謝の意を表します。最後に，本研究の遂行にあたってお世話になったすべての方々に感謝の意を表すとともに，サポートしてくれた家族，友人に感謝を申し上げます。

## 参考文献

- [1] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell, Second Edition*, Princeton University Press, (2010).
- [2] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, (1995).
- [3] 九後汰一郎, 『新物理学シリーズ 23 ゲージ場の量子論 I, II』, 培風館, (1989).
- [4] C-N. Yang and R.L. Mills, *Phys. Rev.* 96, 191, (1954).
- [5] H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* 30, 1346, (1973).
- [6] D.J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 30, 1343, (1973).
- [7] K.G. Wilson, *Phys. Rev. D* 10, 2445, (1974).
- [8] H.J. Rothe, *LATTICE GAUGE THEORIES: An Introduction, Fourth Edition*, World Scientific Publishing Co., (2012).
- [9] C. Gattringer and C.B. Lang, *Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation*, Springer, Berlin Heidelberg, (2010).
- [10] 青木慎也, 『格子上の場の理論』(シュプリンガー現代理論物理学シリーズ 3), シュプリンガー・フェアラーク東京, (2005).
- [11] 大川正則, 石川健一, 『格子場の理論入門』(臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-149), サイエンス社, (2018).
- [12] S. Aoki, N. Ishii, K.-I. Ishikawa, N. Ishizuka, T. Izubuchi, D. Kadoh, K. Kanaya, Y. Kuramashi, Y. Namekawa, O.H. Nguyen, M. Okawa, K. Sasaki, Y. Taniguchi, A. Ukawa, N. Ukita, T. Yamazaki and T. Yoshié (PACS-CS Collaboration), *Prog. Theor. Exp. Phys.* 01, A102, (2012).
- [13] S. Aoki, T. Chiu, G. Cossu, X. Feng, H. Fukaya, S. Hashimoto, T. Hsieh, T. Kaneko, H. Matsufuru, J. Noaki, T. Onogi, E. Shintani and K. Takeda, *Prog. Theor. Exp. Phys.* 01, A106, (2012).
- [14] Z. Fodor, *Prog. Theor. Exp. Phys.* 01, A108, (2012).
- [15] T. Banks and A. Casher, *Nucl. Phys.* B169, 103, (1980).
- [16] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 18, 188, (1967).
- [17] S. Weinberg, *Phys. Rev.* 166, 1568, (1968).



- [18] S. Weinberg, *Physica A* 96, 327, (1979).
- [19] J. Gasser and H. Leutwyler, *Ann. Phys.* 158, 142, (1984).
- [20] J. Gasser and H. Leutwyler, *Nucl. Phys.* B250, 465, (1985).
- [21] H. Leutwyler, *Ann. Phys.* 235, 165, (1994), [hep-ph/9311274].
- [22] J. Gasser and H. Leutwyler, *Phys. Lett.* B188, 477, (1987).
- [23] E.V. Shuryak and J.J.M. Verbaarschot, *Nucl. Phys.* A560, 306, (1993), [hep-th/9212088].
- [24] H. Leutwyler and A.V. Smilga, *Phys. Rev.* D46, 5607, (1992).
- [25] J.J.M. Verbaarschot, *Phys. Rev. Lett.* 72, 2531, (1994), [hep-th/9401059].
- [26] J.J.M. Verbaarschot and I. Zahed, *Phys. Rev. Lett.* 70, 3852, (1993), [hep-th/9303012].
- [27] J.J.M. Verbaarschot, *Nucl. Phys.* B426, 559, (1994), [hep-th/9401092].
- [28] T. Nagao and P.J. Forrester, *Nucl. Phys.* B435, 401, (1995).
- [29] E. Brézin, S. Hikami and A. Zee, *Nucl. Phys.* B464, 411, (1996)
- [30] J.J.M. Verbaarschot, *Nucl. Phys.* B427, 534, (1994), [hep-th/9402006].
- [31] M.E. Berbenni-Bitsch, S. Meyer, A. Schäfer, J.J.M. Verbaarschot and T. Wettig, *Phys. Rev. Lett.* 80, 1146, (1998), [hep-lat/9704018].
- [32] P.H. Damgaard, U.M. Heller and A. Krasnitz, *Phys. Lett.* B445, 366, (1999), [hep-lat/9810060].
- [33] R.G. Edwards, U.M. Heller and R. Narayanan, *Phys. Rev.* D60, 077502, [hep-lat/9902021].
- [34] M.R. Zirnbauer, *J. Math. Phys.* 37, 4986, (1996), [math-ph/9808012].
- [35] E.P. Wigner, *Ann. Math.* 62, 548, (1955).
- [36] F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* 3, 140, 157, 166, 1191, 1199, (1962).
- [37] P.W. Anderson, *Phys. Rev.* 109, 1492, (1958).
- [38] A. Altland and M.R. Zirnbauer, *Phys. Rev. Lett.* 76, 3420, (1996), [cond-mat/9508026].
- [39] A. Altland and M.R. Zirnbauer, *Phys. Rev.* B55, 1142, (1996), [cond-mat/9602137].
- [40] N. Dupuis and G. Montambaux, *Phys. Rev.* B43, 14390, (1991).
- [41] K. Saito, T. Nagao, S. Muller and P. Braun, *J. Phys. A: Math. Theor.* 42, 495101, (2009), [nlin/0906.2033].
- [42] P.H. Damgaard, U.M. Heller, K. Splittorff and B. Svetitsky, *Phys. Rev.* D72, 091501(R), (2005), [hep-lat/0508029].
- [43] P.H. Damgaard, K. Splittorff and J.J.M. Verbaarschot, *Phys. Rev. Lett.* 105, 162002, (2010), [hep-lat/1001.2937].
- [44] S.M. Nishigaki, *Phys. Rev.* D86, 114505, (2012), [hep-lat/1208.3452].
- [45] S.M. Nishigaki, *Prog. Theor. Phys.* 128, 6, 1283, (2012), [hep-lat/1208.3878].
- [46] P.H. Damgaard and S.M. Nishigaki, *Phys. Rev.* D63, 045012, (2001), [hep-th/0006111].
- [47] S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka and T. Takaishi, *Prog. Theor. Phys.* 110, 615, (2003), [hep-lat/0306031].

- [48] J.B. Kogut and M.A. Stephanov, *The Phases of Quantum Chromodynamics: From Confinement to Extreme Environments*, Cambridge University Press, (2004).
- [49] J. Terning, *Modern Supersymmetry, Dynamics and Duality*, Oxford University Press, (2006).
- [50] M. Dine, *Supersymmetry and String Theory, Beyond the Standard Model*, Cambridge University Press, (2007).
- [51] K. Yamawaki, M. Bando and K. Matsumoto, Phys. Rev. Lett. 56, 1335, (1985).
- [52] S. Catterall and F. Sannino, Phys. Rev. D76, 034504, (2007).
- [53] T. Yamamoto and S.M. Nishigaki, Prog. Theor. Exp. Phys. 2018, 023B01, (2018), [hep-lat/1711.03388].
- [54] S.M. Nishigaki and T. Yamamoto, PoS (LATTICE2014), 067, (2015), [hep-lat/1501.07508].
- [55] J.J.M. Verbaarschot and T. Wettig, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 50, 343, (2000), [hep-ph/0003017].
- [56] J.J.M. Verbaarschot, AIP Conference Proceedings, 744, 277 (2004) [hep-th/0410211].
- [57] K. Fujikawa and S. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies*, Oxford University Press, (2004).
- [58] A. Bilal, arXiv:hep-th/0802.0634, (2008).
- [59] C. Vafa and E. Witten, Nucl. Phys. B234, 173, (1984).
- [60] M.E. Peskin, Nucl. Phys. B175, 197, (1980).
- [61] S. Dimopoulos, Nucl. Phys. B168, 69, (1980).
- [62] M.I. Vysotsky, Y.I. Kogan and M.A. Shifman, Sov. J. Nucl. Phys. 42, 318 (1985).
- [63] W. Pauli, Nuovo Cimento 6, 205, (1957).
- [64] F. Gürsey, Nuovo Cimento 7, 411, (1958).
- [65] A. Smilga and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev. D51, 829, (1995), [hep-th/9404031].
- [66] D. Toublan and J.J.M. Verbaarschot, Nucl. Phys. B560, 259, (1999), [hep-th/9904199].
- [67] J.B. Kogut, M.A. Stephanov and D. Toublan, Phys. Lett. B464, 183, (1999), [hep-ph/9906346].
- [68] J.B. Kogut, M.A. Stephanov, D. Toublan, J.J.M. Verbaarschot and A. Zhitnitsky, Nucl. Phys. B582, 477, (2000), [hep-ph/0001171].
- [69] M. Gell-mann, R.J. Oakes and B. Renner, Phys. Rev. 175, 2195, (1968).
- [70] H.B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B185, 20, (1981).
- [71] K.G. Wilson, New Phenomena in Subnuclear Physics, ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York Part A, 69, (1975).
- [72] J.B. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D11, 395, (1975).
- [73] L. Susskind, Phys. Rev. D16, 3031, (1977).
- [74] P.H. Ginsparg, and K.G. Wilson, Phys. Rev. D25, 2649, (1982).

- [75] D.B. Kaplan, Phys. Lett. B288, 342, (1992), [hep-lat/9206013].
- [76] Y. Shamir, Nucl. Phys. B406, 90, (1993), [hep-lat/9303005].
- [77] V. Furman and Y. Shamir, Nucl. Phys. B439, 54, (1995) [hep-lat/9405004].
- [78] H. Neuberger, Phys. Lett. B417, 141, (1998) [hep-lat/9707022].
- [79] H. Neuberger, Phys. Lett. B427, 353, (1998), [hep-lat/9801031].
- [80] M. Lüscher, Phys. Lett. B428, 342, (1998), [hep-lat/9802011].
- [81] M.A. Halasz and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett, 74, 3920, (1995) [hep-lat/9501025].
- [82] 永尾太郎, 『ランダム行列の基礎』, 東京大学出版, (2005).
- [83] 西垣真祐, 『ランダム行列とゲージ理論〈普遍性〉を通して捉える量子物理』(SGC ライブラリ-127), サイエンス社, (2016).
- [84] M.L. Mehta, *RANDOM MATRICES: Third Edition*, Elsevier Inc., (2004).
- [85] S.M. Nishigaki, PoS (LATTICE2015), 057, (2015), [hep-lat/1606.00276].
- [86] P.J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, London Mathematical Society Monographs, Princeton University Press, (2010).
- [87] C.A. Tracy and H. Widom, Comm. Math. Phys. 161, 289, (1994), [hep-th/9304063].
- [88] C.A. Tracy and H. Widom, Comm. Math. Phys. 163, 33, (1994), [hep-th/9306042].
- [89] E. Nyström, Acta Math. 54, 185, (1930).
- [90] F. Bornemann, Math. Comp. 79, 871, (2010), [math.NA/0804.2543].
- [91] F. Bornemann, Markov Processes Relat. Fields 16, 803, (2010), [math.PR/0904.1581].
- [92] P.J. Forrester, T. Nagao and G. Honner, Nucl. Phys. B553, 601, (1999) [cond-mat/9811142].
- [93] T. Nagao and P.J. Forrester, Nucl. Phys. B563, 547, (1999).
- [94] F.A. Berezin and F.I. Karpelevich, Math. USSR-Sbornik 6, 185, (1968).
- [95] T. Guhr and T. Wettig, J. Math. Phys. 37, 6395, (1996) [hep-th/9605110].
- [96] A.D. Jackson, M.K. Sener and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Lett. B387, 355, (1996) [hep-th/9605183].
- [97] F.J. Dyson, Commun. Math. Phys. 19, 235, (1970).
- [98] T. Nagao and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn. 61, 1910, (1992).
- [99] K. Frahm and J.-L. Pichard, J. Phys. I France 5, 847, (1995) [cond-mat/9504098].
- [100] G.V. Dunne and S.M. Nishigaki, Nucl. Phys. B654, 445, (2003) [hep-ph/0210219].
- [101] K. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge University Press, (1997).
- [102] M.A. Halasz, J.C. Osborn and J.J.M. Verbaarschot, Phys. Rev. D56, 7059, (1997) [hep-lat/9704007].
- [103] T. Blum, T. Doi, M. Hayakawa, T. Izubuchi and N. Yamada, Phys. Rev. D76, 114508, (2007), [hep-lat/0708.0484].
- [104] C.T. Sachrajda and G. Villadoro, Phys. Lett. B609, 73, (2005), [hep-lat/0411033].

- [105] T. Mehen and B.C. Tiburzi, Phys. Rev. D72, 014501, (2005), [hep-lat/0505014].
- [106] A. Hietanen, J. Rantaharju, K. Rummukainen and K. Tuominen, Nucl. Phys. A820, 191c, (2009).
- [107] T. Kanazawa, *Dirac Spectra in Dense QCD*, Springer Japan, (2013).
- [108] 国広梯二, 『クォーク・ハドロン物理学入門 真空の南部理論を基礎として』(臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-100), サイエンス社, (2013).
- [109] 須藤靖, 『一般相対論入門』, 日本評論社, (2005).
- [110] 中原幹夫, 佐久間一浩, 『理論物理学のための幾何学とトポロジー I, II』, ピアソン桐原, (2000).
- [111] 松本幸夫, 『多様体の基礎』, 東京大学出版会, (1988).