

Phase plane analysis on global asymptotic stability of ecological models

(生態系モデルの大域的漸近安定性に関する相平面解析)

平成30年9月

ZHENG WEI

島根大学大学院総合理工学研究科

目次

序文	1
1 準備	5
1.1 微分方程式の安定性	5
1.2 リヤプノフの安定性に関する定理	7
1.3 関数族 [WIP] と関数族 [IP]	9
2 大域的漸近安定性に係る減衰係数の増加率	11
2.1 先行研究	11
2.2 広義積分の収束と発散	14
2.3 主定理とパラメータ図解	15
3 二次元生態系モデル	22
3.1 時変捕食者・被食者システムと主定理	22
3.2 変数変換と方向場	25
3.3 主定理の証明と具体例	26
3.4 一様大域的漸近安定性の証明	39
4 三次元生態系モデル	50
4.1 プランクトン及び小型魚類の食物連鎖網	50
4.2 変数変換と相平面解析	54
4.3 主結果の証明	58
4.4 総括と具体例	69
参考文献	74

序文

急激な環境破壊が起こらない限り、自然界は毎日変わりつつあっても、多くの生物の個体数は長期的には、ほぼ一定に保たれていると考えられている。なぜなら、環境資源が一定である場合、個体数が増えれば資源の奪い合いが激しくなり、栄養などが十分に供給されなくなるため、増殖が低下することにより個体数が減っていく。反対に、個体数が減れば資源の奪い合いが緩和され、栄養などが充分に行き渡ることにより個体数が増えるからである。このような事実に基づいて考察された生態系モデルを研究対象として、生態系の種の個体密度が如何に変動するかについて調べるのが個体群生態学である。個体群生態学は、数理生物学の一分野であり、バイオテクノロジーや医学にまたがる学際的な研究テーマにも応用されている。

個体密度の変動傾向をより正確にシミュレートするために、生物間の複雑な相互作用を考慮した様々な生態系モデルが提案されている。例えば、最初に考察されたのがロトカ-ボルテラ (Lotka-Volterra) 型捕食者・被食者生態系モデル

$$\begin{aligned} N' &= (a - bP)N, \\ P' &= (-c + dN)P \end{aligned} \tag{LV}$$

であった。ここで、 N は被食者の個体密度を、 P は捕食者の個体密度を表している。また、係数 a , b , c と d は正の実数である。このモデルは唯一の内部平衡点 $(c/d, a/b)$ を持つ。2つの個体密度 N と P はともに時間変化するので、 $N(t)$ と $P(t)$ で表すのが妥当である。つまり、これらは時間 t をパラメータとする関数として表される。2つの関数 $N(t)$ と $P(t)$ からパラメータ t を消去して、 N と P だけの関係を平面上に描いたものが解軌跡である。初期値 (N_0, P_0) によって解軌跡の形は異なるが、すべての解軌跡は唯一の内部平衡点を囲む閉曲線になる。言い換えると、内部平衡点は

中立安定である。したがって、何らかの突発的な現象によって、被食者や捕食者の個体密度が変化して別の閉曲線である解軌跡に移ると、その後、2つの個体密度を表す点 $(N(t), P(t))$ はその閉曲線上を回転し、元の閉曲線には戻らないことになる。しかし、実際の自然現象には柔軟性があり、少々のズレは時間経過とともに消滅していき、2つの個体密度の関係は最終的には元の状態に戻ることが報告されている。その意味で、モデル (LV) が自然現象をシミュレートするには適切ではないと言える。このようなモデルと現実とのギャップを埋めるために、多くの別の要因をモデルに加える試みがなされてきた。しかし、モデルが複雑になればなるほど、数学的に解析し難くなるのも事実である。

個体数に影響を与える様々な要因の中で、本論文では季節変化に着目する。季節の変化により、生物の出生率や環境の収容力なども変化することはよく知られてい。季節変化を考慮するために、出生率や収容力などを表す係数が定数ではなく、時間 t についての関数である二種及び三種の生態系モデル（一般に時変モデルと呼ばれている）を考察し、主に内部平衡点の大域的漸近安定性について研究する。大域的漸近安定性とは、大雑把に言うと、各解軌跡が内部平衡点に時間の経過に従って近づくことである。詳しい数学的な定義は [15, 18, 30] を見よ。

本論文は4章からなり、各章の概要は以下に記すとおりである。

第1章では、数学的解析に必要な概念や古典的な定理を紹介する。まず、連立微分方程式の平衡点または零解の安定性に関する定義を紹介する。次に、安定性問題の研究において頻繁に使われているリヤプノフ方法を紹介する。

第2章では、線形減衰振動子を一般化した半分線形微分方程式

$$(\phi_p(x'))' + h(t)\phi_p(x') + \omega^p\phi_p(x) = 0 \quad (H)$$

の平衡点 $(0, 0)$ の大域漸近安定について研究する。ここで、 ω は正の定数、パラメータ p は1より大きな定数であり

$$\phi_p(z) = \begin{cases} |z|^{p-2}z & \text{if } z \neq 0, \\ 0 & \text{if } z = 0, \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$

と定義する．この方程式の平衡点の大域的漸近安定性は減衰係数 $h(t)$ の発散速度と関係をもつことが報告されている．例えば， $h(t) = t$ や $h(t) = t^2$ はどちらも非有界な関数であるが，前者の場合には平衡点は大域的漸近安定になるが，後者の場合には平衡点は大域的漸近安定にならないことが知られている．このことから分かるように，平衡点の大域的漸近安定性は $h(t)$ が増加する速度（増加率）に深い関係を持っていると言える．本論文では，その関係を明確にするために，特に $h(t)$ が t の多項式である場合を考え，平衡点が大域漸近安定になるための多項式の次数 n とパラメータ p に関する必要十分条件を与える．また， $h(t)$ が多項式でない場合も考察し，方程式 (H) の平衡点が大域的漸近安定であるかどうかを判断する基準をパラメータダイアグラムを用いて示す．

第3章では，被食者の個体群が環境の時間的変化を受けると仮定し，時変のロトカ-ボルテラ型捕食者・被食者生態系モデル

$$\begin{aligned} N' &= (a + ch(t) - dh(t)N - bP)N, \\ P' &= (-c + dN)P, \end{aligned} \tag{E}$$

の内部平衡点 $(c/d, a/b)$ が大域的漸近安定になるための必要十分条件を報告する．そのため，変数変換 $x = -\ln(bP/a)$ と $y = -\ln(dN/c)$ を行い，モデル (E) を非線形微分方程式

$$\begin{aligned} x' &= c(1 - e^{-y}), \\ y' &= -a(1 - e^{-x}) - ch(t)(1 - e^{-y}). \end{aligned} \tag{N}$$

に書き換える．このとき，モデル (E) の唯一の内部平衡点 $(c/d, a/b)$ は方程式 (N) の原点 $(0, 0)$ に移され，定義域は $(N-P)$ 平面の第一象限から $(x-y)$ 平面全体へ変換される．方程式 (N) と第2章で考察した減衰線形振動子は構造的に近いことに注目したことがモデル (E) の内部平衡点の大域的漸近安定性を保証する必要十分条件を導くことができた契機である．さらに，内部平衡点の近傍に各解軌跡が漸近する時間をある程度予想可能とするために，一様大域的漸近安定性に関する研究も行う．一様大域的漸近安定性の定義については [15, 18, 30] を見よ．

第4章では，海洋生物の育成を支える植物プランクトン，動物プランクトン及び小型魚類からなる三種の食物連鎖モデルを考察する．気温・水温や日照時間などの

季節要因が植物及び動物プランクトンの活性に影響を及ぼすため、成長係数や損失係数などは時間変化するものと仮定する。一般に、時間変化する係数には周期性を仮定して議論することが多いが、ここでは、環境の変化は不安定であると考え、これらの時間変化する係数は必ずしも周期的であることを仮定しない。もちろん、係数が周期性を有する場合も拒むものではない。また、動物プランクトンは人間や貝など魚以外の生物によって収穫されていることも知られている。さらに、動物プランクトンは植物プランクトン以外の微生物から栄養を吸収できることも報告されている。このため、これらの収穫効果や栄養補給も考慮して、三種の食物連鎖モデル

$$\begin{cases} P' = \left(h(t) + \frac{c}{d}g(t) \right) P - \frac{h(t)}{K}P^2 - g(t)PZ, \\ Z' = aZ + f(t)PZ - bZF - Kf(t)Z, \\ F' = -cF + dZF. \end{cases} \quad (C)$$

を構成する。モデル (C) は唯一の内部平衡点 $(K, c/d, a/b)$ をもつ。本論文では、内部平衡点 $(K, c/d, a/b)$ の大域的漸近安定性に加えて、同程度漸近安定性についても研究する。同程度漸近安定性の定義については [15, 18, 30] を見よ。内部平衡点の大域的漸近安定性や同程度漸近安定性を示すことは、植物プランクトン、動物プランクトンと小型魚類が共存できるための条件を求めることを意味する。

Chapter 1

準備

1.1 微分方程式の安定性

自然科学や社会科学で研究される様々な動的システムの運動変化は微分方程式系によってある程度記述できる。微分方程式の初期値問題では、初期条件を定める必要がある。ただし、初期値や微分方程式の係数やパラメータを測定するとき、誤差が生じる。また、運動変化の途中で外部からの干渉も多い。それらの要因によって、実際の測定値と理論値が食い違うことが想定される。したがって、モデルを記述する微分方程式には、初期値やパラメータなどが理想の状態からわずかな誤差があっても、解軌道が理論的な挙動に近づいてくることが求められる。有限時間内では、初期値やパラメータに十分小さい誤差があっても、解のずれは小さいことは、解の初期値に関する連続性や微分可能性に関する定理で保証されている。しかし、無限に長い時間では、解のずれは十分小さいかどうかは分からない。そのため、微分方程式の安定性理論が必要になってくる。

一般の n 次元微分方程式系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (1.1)$$

を考える。ここに、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ であり、

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f_1(t, \mathbf{x}), f_2(t, \mathbf{x}), \dots, f_n(t, \mathbf{x}))^T$$

は領域 $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ で連続であるとする。さらに、 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ は $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ で \mathbf{x} に関し

てリプシッツの条件を満たせば、初期値問題 (τ_0, ξ_0) に対して、解はただ1つであることがよく知られている。この解を $\mathbf{x}(t; \tau_0, \xi_0)$ で表しておく。

すべての $t \geq a$ に対して、 $\mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}}) = 0$ となる点 $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ を微分方程式系 (1.1) の平衡点と呼ぶ。ここで、適当なノルム $\|\cdot\|$ を用いて、リヤプノフの意味における安定性の定義を列挙する。

Definition 1.1. 任意の $\varepsilon > 0$ と $\tau_0 \geq a$ に対して、ある正の数 $\delta(\varepsilon, \tau_0) > 0$ が存在して、 $\|\xi_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ ならば、すべての $t \geq \tau_0$ に対して $\|\mathbf{x}(t; \tau_0, \xi_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ が成り立つとき、方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ は安定であるという。

Definition 1.2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある正の数 $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して、 $\|\xi_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ ならば、すべての $t \geq \tau_0$ に対して $\|\mathbf{x}(t; \tau_0, \xi_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ が成り立つとき、方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ は一様安定であるという。

Definition 1.3. 任意の $\tau_0 > a$ に対して、ある正の数 $\delta(\tau_0) > 0$ が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\|\xi_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ ならば、ある正の数 $T(\varepsilon, \tau_0, \xi_0) > 0$ が存在して、すべての $t \geq \tau_0 + T$ に対して $\|\mathbf{x}(t; \tau_0, \xi_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ が成り立つとき、方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ は吸収的であるという。

Definition 1.4. 方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ が安定かつ吸収的であるとき、それは漸近安定であるという。

Definition 1.5. 任意の $\tau_0 > a$ に対して、ある正の数 $\delta(\tau_0) > 0$ が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある正の数 $T(\varepsilon, \tau_0) > 0$ が存在して、すべての $\|\xi_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ を満たす ξ_0 とすべての $t \geq \tau_0 + T$ に対して、 $\|\mathbf{x}(t; \tau_0, \xi_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ が成り立つとき、方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ は同程度吸収的であるという。

Definition 1.6. 方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ が安定かつ同程度吸収的であるとき、それは同程度漸近安定であるという。

Definition 1.7. 正の数 $\delta_0 > 0$ が存在して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、正の数 $T(\varepsilon) > 0$ が存在して任意の $\tau_0 > a$ に対して、ある $\|\xi_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ ならば、すべての $t \geq \tau_0 + T$ に対して $\|\mathbf{x}(t; \tau_0, \xi_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ が成り立つとき、方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ は一様吸収的であるという。

Definition 1.8. 方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ が一様安定かつ一様吸収的であるとき、それは一様漸近安定であるという。

Definition 1.9. 任意の $\tau_0 > a$, 任意の ξ_0 と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、正の数 $T(\tau_0, \xi_0, \varepsilon) > 0$ が存在して、すべての $t \geq \tau_0 + T$ に対して $\|\mathbf{x}(t; \tau_0, \xi_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ が成り立つとき、方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ は大域吸収的であるという。

Definition 1.10. 任意の $\tau_0 > a$, 任意の δ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、正の数 $T(\tau_0, \xi_0, \varepsilon) > 0$ が存在して、すべての $\|\xi_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ を満たす ξ とすべての $t \geq \tau_0 + T$ に対して、 $\|\mathbf{x}(t; \tau_0, \xi_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ が成り立つとき、方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ は大域的同程度吸収的であるという。

Definition 1.11. 任意の δ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、正の数 $T(\delta, \varepsilon) > 0$ が存在して、すべての $\|\xi_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ を満たす ξ_0 とすべての $t \geq \tau_0 + T$ に対して $\|\mathbf{x}(t; \tau_0, \xi_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ が成り立つとき、方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ は一様大域的吸収的であるという。

Definition 1.12. 方程式系 (1.1) の平衡点 $\bar{\mathbf{x}}$ が一様安定かつ一様大域吸収的であるとき、それは一様大域的漸近安定であるという。

1.2 リヤプノフの安定性に関する定理

微分方程式の解の具体的な数式表現を求めるのは困難であるため、リヤプノフ (Lyapunov) は代わりに方程式の特徴を利用し、解の挙動を考察する二つの方法を提案した。ここでは、その一つであるリヤプノフの直接法を紹介する。リヤプノフの直接法は、微分方程式の安定性理論の中核であり、ある特性を持つ関数（これをリヤプノフ関数という）を導入することによって、直接に微分方程式の解の安定性などの漸近的性質を導く方法である。リヤプノフの直接法は方程式系のエネルギー変化に着目した解法である。平衡点でのエネルギーは常に0であり、平衡点以外の位置でのエネルギーは0より大きいと設定し、質点のエネルギーが常に散失して減少することが判明すれば、質点は平衡点に近づくことになる。また、質点が平衡点の位置にあれば、その後も質点は平衡点に留まる。このような場合、平衡点は安定状態であるといえる。この考え方を一般化したものがリヤプノフの直接法であり、リヤプノフ関数はエネルギー量を表す役割を果たしている。

ベクトル \mathbf{x} についての連続関数 $W: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ が任意の $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$ に対して $W(\mathbf{x}) > 0$ かつ $W(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ を満たすならば, W は連続な正定値関数という. また, 関数 $V: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ が連続であり, 変数 t と \mathbf{x} に関して連続な偏導関数をもつとき, V をリヤプノフ関数と呼ぶ. リヤプノフ関数 V がすべての $t \geq 0$ に対して $W(\mathbf{x}) \leq V(t, \mathbf{x})$ を満たすような連続な正定値関数 W が存在するならば, V は正定値であるという. さらに, リヤプノフ関数 $V(t, \mathbf{x})$ の方程式系 (1.1) の解に沿っての導関数 $\dot{V}_{(1.1)}(t, \mathbf{x})$ を

$$\dot{V}_{(1.1)}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

で定義する. このとき, 以下のような種々の安定性に関するリヤプノフの定理がよく知られている.

Theorem A. リヤプノフ関数 V が条件

- $V(t, \bar{\mathbf{x}}) \equiv 0$
- $V(t, \mathbf{x})$ は正定値である
- $\dot{V}_{(1.1)}(t, \mathbf{x}) \leq 0$

を満たすならば, 方程式系 (1.1) の平衡点は安定である.

Theorem B. リヤプノフ関数 V が条件

- $V(t, \bar{\mathbf{x}}) \equiv 0$
- $V(t, \mathbf{x})$ は正定値である
- $\dot{V}_{(1.1)}(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x})$ となる連続な正定値関数 W が存在する

を満たすと仮定する. このとき, $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq L$ となる正の数 L が存在すれば, 方程式系 (1.1) の平衡点は漸近安定である.

Theorem C. リヤプノフ関数 V が条件

- $V(t, \mathbf{x})$ は正定値である
- $V(t, \mathbf{x}) \leq W(\mathbf{x})$ となる連続な正定値関数 W が存在する

- $\dot{V}_{(1.1)}(t, \mathbf{x}) \leq 0$

を満たすならば, 方程式系 (1.1) の平衡点は一様安定である.

Theorem D. リヤプノフ関数 V が条件

- $V(t, \mathbf{x})$ は正定値である
- $V(t, \mathbf{x}) \leq b(\mathbf{x})$ となる連続な正定値関数 b が存在する
- $\dot{V}_{(1.1)}(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x})$ となる連続な正定値関数 W が存在する

を満たすならば, 方程式系 (1.1) の平衡点は一様漸近安定である.

Theorem E. リヤプノフ関数 V が条件

- $W_1(\mathbf{x}) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq W_2(\mathbf{x})$ となる連続な正定値関数 W_1 と W_2 が存在し,
 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ のとき $W_1(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ である
- $\dot{V}_{(1.1)}(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x})$ となる連続な正定値関数 W が存在する

を満たすならば, 方程式系 (1.1) の平衡点は一様大域的漸近安定である.

1.3 関数族 [WIP] と関数族 [IP]

準備の最後として, Hatvani [8] と Matrosov [14] が導入した本論文の研究に欠かせない2つの関数族について説明する.

Definition 1.13. $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n - \tau_n) > 0$ と $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\tau_{n+1} - \sigma_n) < \infty$ を満たす任意の単調増加の数列 $\{\tau_n\}$ と $\{\sigma_n\}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\sigma_n} h(t) dt = \infty$$

を満たすならば, 関数 h は *weakly integrally positive* であるという (今後, 簡単に [WIP] と表す).

明らかに、関数 h が正の下限を有すれば、 h は [WIP] に属する。ただし、たとえ関数 h の下極限が零の関数であっても、[WIP] に属する可能性もある。例えば、 $1/(1+t)$ と $\sin^2 t/(1+t)$ の下極限は零であるが、二つの関数とも [WIP] に属していることが示せる（証明は [24, Proposition 2.1] を見よ）。

Definition 1.14. $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n - \tau_n) > 0$ を満たす任意の単調増加の数列 $\{\tau_n\}$ と $\{\sigma_n\}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\sigma_n} h(t) dt = \infty$$

を満たすならば、関数 h は *integrally positive* であるという（今後、簡単に [IP] と表す）。

関数 h が [IP] になる必要十分条件は、任意の $\gamma > 0$ に対して

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+\gamma} h(s) ds > 0$$

が成り立つことである。また、二つの定義を比べると、[IP] である関数は必ず [WIP] になるが、必ずしも逆は成り立つとは限らない。例えば、先程の関数 $1/(1+t)$ と $\sin^2 t/(1+t)$ は [IP] には属さない。

Chapter 2

大域的漸近安定性に係る減衰係数の増加率

2.1 先行研究

減衰項をもつ半分線形微分方程式

$$(\phi_p(x'))' + h(t)\phi_p(x') + \omega^p\phi_p(x) = 0. \quad (2.1)$$

を考える．ここで，減衰係数 h は $[a, \infty)$ での連続かつ非負の関数， ω は正の定数であり，パラメータ $p > 1$ に対して

$$\phi_p(z) = \begin{cases} |z|^{p-2}z & \text{if } z \neq 0, \\ 0 & \text{if } z = 0, \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$$

とする．特に， $\phi_2(z) = z$ となり，方程式 (2.1) は減衰線形振動子と呼ばれている2階微分方程式

$$x'' + h(t)x' + \omega^2x = 0, \quad (2.2)$$

に一致する．よく知られているように，線形微分方程式の解空間には，解同士の和や解の定数倍も解になるという2つの特性がある．一方，方程式 (2.1) は解の定数倍も解になるが，解同士の和は解になるとは限らない．このように2つのうち「半分」

の一つだけの特性微分方程式と呼ばれている。

初期値問題に関して，半分線形微分方程式 (2.1) の解の大域的存在性と一意性は保証されている（詳しくは Došlý [4, p.170], Došlý and Řehák [6, pp.8–10] を見よ）。方程式 (2.1) の振動理論に関して，数多くの研究が行われてきた。2005 年までに報告された成果は [4, 6] にまとめられている。それ以降も，積極的に研究が続けられている。例えば，[5, 17, 27] が挙げられる。

また，方程式 (2.2) は，自己随伴型の

$$(r(t)\phi_p(x'))' + c(t)\phi_p(x) = 0. \quad (2.3)$$

の特別な場合であると考えられる。実際， $r(t) = e^{H(t)}$ かつ $c(t) = \omega^p e^{H(t)}$ の場合，方程式 (2.3) は方程式 (2.1) の形に書き換えられる。

本章の目的は，方程式 (2.1) 平衡点が大域的漸近安定であるか否かを決定する減衰係数 h の成長率を明らかにすることである。減衰線形振動子 (2.2) の大域的漸近安定性に関する研究は数多い。これらの研究の歴史的発展過程は，Hatvani [10, Section 1] や Sugie [23, Section 1] において簡潔に要約されている。その中で，特に Smith 与えた結果は言及する価値がある。

Theorem F. すべての $t \geq a$ に対して $h(t) \geq \underline{h}$ が満たされるような正の定数 \underline{h} が存在すると仮定する。このとき，方程式 (2.2) の平衡点が大域的漸近安定になるための必要十分条件は

$$\int_a^\infty \frac{\int_a^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} dt = \infty, \quad (2.4)$$

である。ここで

$$H(t) = \int_a^t h(s) ds$$

であるとする。

条件 (2.4) は減衰係数 h に関する成長条件と呼ばれている。成長条件 (2.4) は必要十分条件であるから，Smith [20] の研究以後，大前提である減衰係数 h の下界 \underline{h} を取り除こうとする多くの努力が払われた。例えば，[IP] という概念を使って，Hatvani [9] は方程式 (2.2) を含む二次元線形非自律系微分システムの漸近安定性を研究した。その結果を方程式 (2.2) に適用すると，次の事実が導かれる ([9, Corollary 4.3] を見よ)。

Theorem G. 減衰係数 h が [IP] に属し、条件 (2.4) が満たされるならば、方程式 (2.2) の平衡点は漸近安定である。

パラメータ p の共役数を p^* は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1. \quad (2.5)$$

を満たす 1 より大きな実数である。Sugie [23] は方程式 (2.1) の平衡点が大域的漸近安定であるかどうかを判断できる基準を与えた。

Theorem H. 減衰係数 h が [IP] に属するならば、方程式 (2.1) の平衡点が大域的漸近安定であるための必要十分条件は

$$\int_a^\infty \phi_{p^*} \left(\frac{\int_a^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right) dt = \infty. \quad (2.6)$$

である。

Theorem H は Theorem F や Theorem G を完全に一般化したものである。

過減衰現象は、減衰係数 h が急激に増加するときに起こることが報告されている。過減衰の現象というのは、零でない値に収束する解が存在することである (例えば, [26, Section 6] を参照せよ)。過減衰現象が起こると、当然 (2.1) の平衡は大域的漸近安定ではない。条件 (2.4) とその一般化である (2.6) は、減衰係数 $h(t)$ があまりにも速く成長するのを禁止する働きをする。減衰係数 h が上から有界であれば、条件 (2.4) や (2.6) が満たされていることは簡単に確認できる。Hatvani et al. [11, Theorem 1.1] は (2.2) の平衡点の漸近安定性のための別の必要十分条件も与えた。条件 (2.4) が積分表示であるので、連続的成長条件と言えるのに対して、この条件はある数列の総和で表されるため離散的成長条件と呼べる。

この離散的成長条件は Smith [20] によって与えた連続的成長条件より確認し易い場合がある。例えば、 $h(t) = t$ ならば、離散的成長条件は満たされるが、 $h(t) = t^2$ ならば、この条件は満たされないことが確かめられる。したがって、条件 (2.4) も $h(t) = t$ ならば成立し、 $h(t) = t^2$ ならば成立しないことが間接的に分かる。しかし、減衰係数 h がこれら以外の場合、条件 (2.4) が成立するかどうかを判断するのは容

易ではない。本章では、特に減衰係数 h が t の多項式である場合を考え、平衡点が大域的漸近安定になるための多項式の次数 n とパラメータ p に関する必要十分条件を与える。

2.2 広義積分の収束と発散

一般に、広義積分を直接計算するのは困難であるため、limit comparison test という便利な方法が考えられ、積分の収束と発散を判断する場合によく使われている。条件 (2.6) が成り立つかどうかを調べるため、我々はこの方法を利用する。まず、本章で用いる limit comparison test を紹介する。

Lemma 2.1. 関数 $f: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が

$$\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} t^\lambda f(t). \quad (2.7)$$

となるような正の数 λ と ν が存在すると仮定する。このとき

(i) もし $\lambda \leq 1$ であれば, $\int_a^\infty f(t)dt = \infty$

(ii) もし $\lambda > 1$ であれば, $\int_a^\infty f(t)dt < \infty$

が成り立つ。

Lemma 2.2. 関数 $f: [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ が

$$\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} t^\lambda (\log(1+t))^\mu f(t). \quad (2.8)$$

となるような正の数 λ と ν 及び実数 μ が存在すると仮定する。このとき

(i) もし $\lambda \leq 1$ であれば, $\int_a^\infty f(t)dt = \infty$

(ii) もし $\mu \leq \lambda - 1$ であれば, $\int_a^\infty f(t)dt = \infty$

(iii) もし $\mu > \lambda - 1$ であれば, $\int_a^\infty f(t)dt < \infty$

(iv) もし $\lambda > 1$ であれば, $\int_a^\infty f(t)dt < \infty$

が成り立つ.

2.3 主定理とパラメータ図解

第 2.1 節で述べたように, 減衰係数 h が上から有界であれば, 被積分関数

$$f(t) = \phi_{p^*} \left(\frac{\int_a^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right)$$

の a から ∞ までの積分は発散するので, 条件 (2.6) が成り立つ. そのため, 無限大に発散する減衰係数 h についてだけ議論すべきである. ここでは, 減衰係数 h が冪関数, 多項式及びその一般化の 3 つの場合に分けて考察する.

まず, 減衰係数 h が冪関数の場合は次の結果が成り立つ.

Theorem 2.1. 方程式

$$(\phi_p(x'))' + t^\ell \phi_p(x') + \omega^p \phi_p(x) = 0 \quad (2.9)$$

を考える. ただし, $\ell > 0$ である. このとき, 内部平衡点が大域的漸近安定になるための必要十分条件は $\ell \leq p - 1$ である.

Proof. 条件 (2.7) の λ として, $\ell(p^* - 1)$ を選ぶ. このとき

$$t^\lambda = (t^\ell)^{p^* - 1} = \phi_{p^*}(t^\ell)$$

であるから, l'Hôpital's rule を二回使うことより,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^\lambda f(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{p^*} \left(\frac{t^\ell \int_0^t e^{\frac{1}{\ell+1} s^{\ell+1}} ds}{e^{\frac{1}{\ell+1} t^{\ell+1}}} \right) = \phi_{p^*} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\ell \int_0^t e^{\frac{1}{\ell+1} s^{\ell+1}} ds}{e^{\frac{1}{\ell+1} t^{\ell+1}}} \right) \\ &= \phi_{p^*} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell t^{\ell-1} \int_0^t e^{\frac{1}{\ell+1} s^{\ell+1}} ds + t^\ell e^{\frac{1}{\ell+1} t^{\ell+1}}}{t^\ell e^{\frac{1}{\ell+1} t^{\ell+1}}} \right) \\ &= \phi_{p^*} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell \int_0^t e^{\frac{1}{\ell+1} s^{\ell+1}} ds}{t e^{\frac{1}{\ell+1} t^{\ell+1}}} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_{p^*} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell e^{\frac{1}{\ell+1} t^{\ell+1}}}{e^{\frac{1}{\ell+1} t^{\ell+1}} + t^{\ell+1} e^{\frac{1}{\ell+1} t^{\ell+1}}} + 1 \right) \\
&= \phi_{p^*} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell}{1 + t^{\ell+1}} + 1 \right) = \phi_{p^*}(1) = 1.
\end{aligned}$$

が得られる。したがって、条件 (2.7) が $\lambda = \ell(p^* - 1)$ かつ $\nu = 1$ で満たされる。

減衰係数 t^ℓ は [IP] に属する。関数式 (2.5) より、 $\ell \leq p - 1$ は $\ell(p^* - 1) \leq 1$ に書き換えることができる。したがって、 $\ell \leq p - 1$ ならば、 $\lambda \leq 1$ となるので、Lemma 2.1(i) より

$$\int_a^\infty f(t) dt = \int_a^\infty \phi_{p^*} \left(\frac{\int_a^t e^{\frac{1}{\ell+1} s^{\ell+1}} ds}{e^{\frac{1}{\ell+1} t^{\ell+1}}} \right) dt = \infty$$

となる。故に、Theorem Hにより、方程式 (2.9) の平衡点は大域的漸近安定である。逆に、 $\ell > p - 1$ ならば、 $\lambda > 1$ となるので、Lemma 2.1(ii) により

$$\int_a^\infty f(t) dt = \int_a^\infty \phi_{p^*} \left(\frac{\int_a^t e^{\frac{1}{\ell+1} s^{\ell+1}} ds}{e^{\frac{1}{\ell+1} t^{\ell+1}}} \right) dt < \infty$$

となる。故に、Theorem Hにより、方程式 (2.9) の平衡点は大域的漸近安定ではない。□

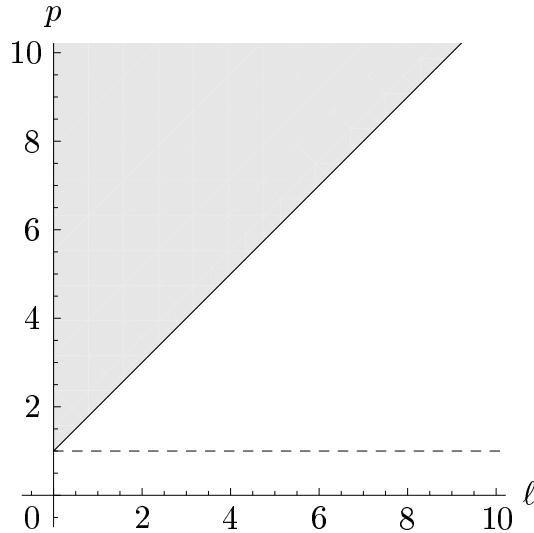


Figure 2.1: The parameter diagram of (2.9)

図 2.1 には、方程式 (2.9) のパラメータ図を描いた。影の部分に (ℓ, p) が含まれていると、方程式 (2.9) の平衡点は大域的漸近安定になる。もし (ℓ, p) が線 $p = \ell + 1$ 上

にあっても、方程式 (2.9) の平衡点は大域的漸近安定である。しかし、 (ℓ, p) が $p > 1$ でも影の部分になれば、方程式 (2.9) の平衡点は大域的漸近安定ではない。

Remark 2.1. もし $\ell \leq 0$ であれば、 $t \geq 1 = a$ に対して $h(t) = t^\ell \leq 1$ となるから、

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \phi_{p^*} \left(\frac{\int_a^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right) dt &= \int_1^\infty \phi_{p^*} \left(\int_1^t e^{-(H(t)-H(s))} ds \right) dt \\ &\geq \int_1^\infty \phi_{p^*} \left(\int_1^t e^{-(t-s)} ds \right) dt = \int_1^\infty \phi_{p^*} \left(\frac{e^t - e}{e^t} \right) dt \\ &\geq \int_1^{1+\log 2} \phi_{p^*} \left(\frac{e^t - e}{e^t} \right) dt + \int_{1+\log 2}^\infty \phi_{p^*} \left(\frac{1}{2} \right) dt = \infty. \end{aligned}$$

が得られる。しかし、 $\ell < 0$ の場合に関数 t^ℓ は [IP] ではない。このため、Theorem H は適用できない。

Theorem 2.2. 実数の組 (c_1, c_2, \dots, c_n) を係数とする n 次多項式

$$g(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \dots + c_{n-1} t + c_n$$

を考える。また、 b 以上の任意の t に対して、 $g(t) \geq 0$ であることを仮定する。このとき、減衰係数

$$h(t) = \begin{cases} g(t) & \text{if } t \geq b, \\ |g(t)| & \text{if } a \leq t < b \end{cases}$$

をもつ (2.1) の内部平衡点が³大域的漸近安定になるための必要十分条件は $n \leq p - 1$ である。

Proof. 条件 (2.7) の λ として、 $n(p^* - 1)$ を選ぶ。このとき

$$t^\lambda = (t^n)^{p^*-1} = \phi_{p^*}(t^n)$$

であるから、l'Hôpital's rule を使うことより

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\lambda f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{p^*} \left(\frac{t^n \int_0^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right) = \phi_{p^*} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n \int_0^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_{p^*} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n t^{n-1} \int_0^t e^{H(s)} ds + t^n e^{H(t)}}{h(t) e^{H(t)}} \right) \\
&= \phi_{p^*} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n t^{n-1} \int_0^t e^{H(s)} ds}{h(t) e^{H(t)}} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{h(t)} \right).
\end{aligned}$$

が得られる。また,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n t^{n-1} \int_0^t e^{H(s)} ds}{h(t) e^{H(t)}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n \int_0^t e^{H(s)} ds}{\left(t + c_1 + \frac{c_2}{t} + \dots + \frac{c_n}{t^{n-1}} \right) e^{H(t)}} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n}{1 - \frac{c_2}{t^2} - \frac{2c_3}{t^3} - \dots - \frac{(n-1)c_n}{t^n} + \left(t + c_1 + \frac{c_2}{t} + \dots + \frac{c_n}{t^{n-1}} \right) h(t)} = 0, \\
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{h(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + \dots + \frac{c_n}{t^n}} = 1,
\end{aligned}$$

であるから,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\lambda f(t) = \phi_{p^*}(1) = 1$$

となる。したがって, 条件 (2.7) が $\lambda = n(p^* - 1)$ かつ $\nu = 1$ で満たされる。証明の残りは, Theorem 2.1 の証明と同じ方法で行えるので, 詳細な分析は省略する。□

次の結果は, 条件 (2.6) を満たす減衰係数 $h(t)$ の発散速度に関するより詳細な情報を与える。

Theorem 2.3. 方程式

$$(\phi_p(x'))' + t^\ell (\log(1+t))^m \phi_p(x') + \omega^p \phi_p(x) = 0. \quad (2.10)$$

を考える。ただし, $m \in \mathbb{R}$ かつ $\ell > 0$ である。このとき, 内部平衡点が³大域的漸近安定になるための必要十分条件は

$$\ell < p - 1$$

または

$$m \leq \ell = p - 1$$

である。

Proof. 条件 (2.7) の λ と μ として, それぞれ $\ell(p^* - 1)$ と $m(p^* - 1)$ を選ぶ. このとき

$$t^\lambda (\log(1+t))^\mu = (t^\ell (\log(1+t))^m)^{p^*-1} = \phi_{p^*}(t^\ell (\log(1+t))^m)$$

であるから, l'Hôpital's rule を使うことより

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^\lambda (\log(1+t))^\mu f(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_{p^*} \left(\frac{t^\ell (\log(1+t))^m \int_0^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right) \\ &= \phi_{p^*} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^\ell (\log(1+t))^m \int_0^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right) \\ &= \phi_{p^*} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell \int_0^t e^{H(s)} ds}{t e^{H(t)}} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m \int_0^t e^{H(s)} ds}{(1+t) \log(1+t) e^{H(t)}} + 1 \right) \end{aligned}$$

が得られる. さらに,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell \int_0^t e^{H(s)} ds}{t e^{H(t)}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell e^{H(t)}}{e^{H(t)} + t^{\ell+1} (\log(1+t))^m e^{H(t)}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ell}{1 + t^{\ell+1} (\log(1+t))^m} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m \int_0^t e^{H(s)} ds}{(1+t) \log(1+t) e^{H(t)}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{m}{\log(1+t) + 1 + t^\ell (1+t) (\log(1+t))^{m+1}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\lambda (\log(1+t))^\mu f(t) = \phi_{p^*}(1) = 1$$

となる. したがって, 条件 (2.8) が $\lambda = \ell(p^* - 1)$, $\mu = m(p^* - 1)$ かつ $\nu = 1$ で満たされる.

減衰係数 $t^\ell (\log(1+t))^m$ は [IP] に属することが確かめられる. 関数式 (2.5) より, $\ell < p - 1$ は $\ell(p^* - 1) < 1$ に書き換えることができる. したがって, $\ell < p - 1$ ならば, Lemma 2.2 (i) より

$$\int_a^\infty f(t) dt = \int_a^\infty \phi_{p^*} \left(\frac{\int_a^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right) dt = \infty$$

となる. 故に, Theorem Hにより, 方程式 (2.10) の平衡点は大域的漸近安定である. また, $m \leq \ell = p - 1$ は $m(p^* - 1) \leq \ell(p^* - 1) = 1$ に書き換えることができる. $m \leq \ell = p - 1$ ならば, Lemma 2.2 (ii) より

$$\int_a^\infty f(t)dt = \int_a^\infty \phi_{p^*} \left(\frac{\int_a^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right) dt = \infty$$

となる. 故に, Theorem Hにより, 方程式 (2.10) の平衡点は大域的漸近安定である. 逆に, $\ell < p - 1$ または $m \leq \ell = p - 1$ を否定すると, $\ell > p - 1$ または $m > \ell = p - 1$ となる. 前者の場合, $\lambda = \ell(p^* - 1) > 1$ となるので, Lemma 2.2 (iv) により

$$\int_a^\infty f(t)dt = \int_a^\infty \phi_{p^*} \left(\frac{\int_a^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right) dt < \infty$$

となる. また, 後者の場合, $\mu > 1 = \lambda$ となるので, Lemma 2.2 (iii) により

$$\int_a^\infty f(t)dt = \int_a^\infty \phi_{p^*} \left(\frac{\int_a^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} \right) dt < \infty$$

が得られる. 故に, Theorem Hにより, 方程式 (2.10) の平衡点は大域的漸近安定ではない. □

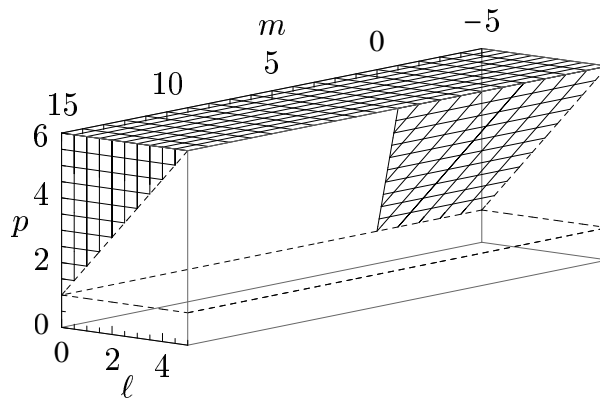


Figure 2.2: The parameter diagram of (2.10)

図 2.2 には方程式 (2.10) のパラメータ図を描いた. もし図 2.2 での奥の三角柱に (ℓ, m, p) が含まれていれば, (2.10) の平衡点は大域的漸近安定になる. 同様に, 図 2.2 での網が付いている平面に (ℓ, m, p) が含まれていれば, (2.10) の平衡点は大域的

漸近安定になる．もし図 2.2 での手前の三角柱に (ℓ, m, p) が含まれていれば，(2.10) の平衡点は大域的漸近安定ではない．

Remark 2.2. たとえ $\ell = 0$ であっても， $m > 0$ の場合には方程式 (2.10) の減衰係数 $(\log(1+t))^m$ は有界ではない．この場合に，この減衰係数は [IP] に属することと，成長条件 (2.6) が満たされていることを容易に検証できる．したがって，Theorem H により方程式 (2.10) の平衡点は大域的漸近安定になる．

この図では，2つの三角柱が合わさって，直方体ができている．組 (ℓ, m, p) が奥側にある三角柱内に含まれていれば，方程式 (2.10) の平衡点は大域的漸近安定になる．また，奥側にある三角柱と手前側にある三角柱の接続部である平面のうち斜線で示した部分に組 (ℓ, m, p) が位置していても，方程式 (2.10) の平衡点は大域的漸近安定になる．一方，その平面の斜線ない部分に組 (ℓ, m, p) が位置していると，方程式 (2.10) の平衡点は大域的漸近安定ではない．また，組 (ℓ, m, p) が手前側の三角柱内に含まれていても，方程式 (2.10) の平衡点は大域的漸近安定ではない．

Chapter 3

二次元生態系モデル

3.1 時変捕食者・被食者システムと主定理

個体群生態学は生物学において主要な研究分野の1つであり、主な研究内容は個体群動態を解明することである。これらの研究の基本的な考え方は、実際の自然現象にできるだけ適合する生態系モデルを研究対象として、その中に記述される生物の個体密度を変化させる要因を解明することである。2種の生き物の相互関係は4つに分類できる。即ち、捕食、競争、寄生と共生である。この中で、最も広く研究されているのは捕食関係である。例えば、ロトカ・ボルテラ (Lotka-Volterra) モデル

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= (a - bP)N, \\ \frac{dP}{dt} &= (-c + dN)P,\end{aligned}\tag{LV}$$

は被食者と捕食者の関係を説明するときによく使われる。ここで、 N は被食者の個体密度、 P は捕食者の個体密度、 t は時間を表し、4つのパラメータ a , b , c , d は正の定数である。ただし、 a は被食者の成長率で、 b は被食者が捕食者に被食される率で、 c は捕食者の死亡率で、 d は摂食によって捕食者が栄養を得て増殖する率である。モデル (LV) は唯一の内部平衡点 $(c/d, a/b)$ をもつ。また、このモデルの第一積分は

$$c \ln N(t) - dN(t) + a \ln P(t) - bP(t) = \alpha$$

である。ただし、 α は任意の定数である。故に、すべての解軌跡は内部平衡点 $(c/d, a/b)$ を囲む閉曲線になるので、内部平衡点は中立安定である。つまり、一度個体密度の組 (N, P) が内部平衡点から離れたら、個体密度の組は決して元の状態には戻らずに、新しい周期軌道上で変化し続けることになる。しかし、実際の自然現象には少々ズレは時間経過とともに消滅していき、最終的には元の状態に戻ることが報告されている。つまり、モデル (LV) と現実にはギャップがある。したがって、自然のバランスを維持するいくつかの要因がモデル (LV) では無視されていると考えられる。多くの研究者はこの要因を見つけるために様々な努力をしてきた。例えば、Crawford S. Holling は捕食者の獲物捕獲率、いわゆる機能応答 (functional response) に着目した。現在では、Holling タイプ I, II, III, IV, Ivlev タイプ及び Leslie-Gower タイプなどと名付けられた様々な機能応答をもつ生態系モデルが研究されている ([21, 22, 25, 26] 参照せよ)。

環境が時間と共に変化することはモデル (LV) では無視された要因の一つである。しかし、実際は、季節変動が個体群動態に影響を与えると考えることは妥当である。したがって、モデル (LV) のように出生率と死亡率を定数と仮定すべきではない。本章では、被食者の出生率と生態系の収容力が時間変化に敏感であると想定して、時変ロトカ・ボルテラ型捕食者-被食者システム

$$\begin{aligned} N' &= (a + ch(t) - dh(t)N - bP)N, \\ P' &= (-c + dN)P, \end{aligned} \tag{E}$$

を考究する。ここで、係数 h は $[0, \infty)$ で定義される非負の関数である。モデル (E) も唯一の内部平衡点 $(c/d, a/b)$ をもつ。モデル (E) に対して、Sugie et al. [28] は以下の結果を与えた。

Theorem I. すべての $t \geq 0$ に対して $0 \leq h(t) \leq \bar{h}$ が満たされるような \bar{h} が存在すると仮定する。もし関数 h が [WIP] に属せば、モデル (E) の内部平衡点 $(c/d, a/b)$ は大域的漸近安定である。

係数 h が時間 t とともに零に収束する場合は、時間 t が無限に近づくとモデル (E) はモデル (LV) になる。すなわち、モデル (E) の極限システムの内部平衡点は大域的漸近安定ではない。しかし、もし h が [WIP] に属せば、Theorem I によりモデル

(E) の内部平衡点は大域的漸近安定である。この紙一重の違いは興味深い。残念ながら、Theorem I は十分条件を与えただけで、モデル (E) の内部平衡点が大域的漸近安定であるような必要条件はまだ報告されていない。本章の目的はモデル (E) の内部平衡点が大域的漸近安定であるための必要十分条件を与えることである。本章の主定理は以下の通りである。

Theorem 3.1. ある $\varepsilon_0 > 0$ と $\delta_0 > 0$ が存在して、 $|t - s| < \delta_0$ を満たす全ての $t \geq 0$ と $s \geq 0$ に対して、 $|h(t) - h(s)| < \varepsilon_0$ が成り立つと仮定する。関数 h が [WIP] に属せば、モデル (E) の内部平衡点 ($c/d, a/b$) は大域的漸近安定であるための必要十分条件は

$$\int_0^\infty \frac{\int_0^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} dt = \infty, \quad (3.1)$$

である。ここで

$$H(t) = \int_0^t h(s) ds$$

である。

Remark 3.1. モデル (E) の内部平衡点 ($c/d, a/b$) が安定である (厳密には一様安定である) ことを示すためには、関数 h が負でなければ十分である (証明は [28, Proposition 2] に参照せよ)。したがって、Theorem 1 は内部平衡点が大域的吸収であるための必要十分条件を与えたと言える。

Remark 3.2. もしすべての $t \geq 0$ に対して、 $0 \leq h(t) \leq \bar{h}$ が満たされるような \bar{h} が存在すれば、任意の $t \geq 0$ と $s \geq 0$ に対して、 $|h(t) - h(s)| \leq |h(t)| + |h(s)| \leq 2\bar{h}$ である。したがって、 $\varepsilon_0 = 2\bar{h}$ と任意の $\delta_0 > 0$ に対して、Theorem 3.1 で $h(t)$ に関する一番目の仮定が満たされる。明らかに、その逆は必ずしも成り立つではない。 h が不連続な関数であっても、一番目の仮定が満たされるかもしれない。例えば、

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } 2n - 2 \leq t < 2n - 1, \\ 1/2 & \text{if } 2n - 1 \leq t < 2n, \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$ の場合に、一番目の仮定が満たされるかつ $h(t)$ が [WIP] に属する。

3.2 変数変換と方向場

第2章で紹介した減衰線形振動子 (2.2) が

$$\begin{aligned}x' &= \omega y, \\y' &= -\omega x - h(t)y.\end{aligned}\tag{3.2}$$

と同値である。したがって、Theorem F は以下のように書き換える。

Theorem J. すべての $t \geq a$ に対して $h(t) \geq \underline{h}$ が満たされるような正の定数 \underline{h} が存在すると仮定する。このとき、方程式 (3.2) の平衡点 $(0, 0)$ が漸近安定になるための必要十分条件は (2.4) である。

方程式系 (3.2) の平衡点 $(0, 0)$ が漸近安定であれば、平衡点も大域的漸近安定であることはよく知られている。 $t \geq 0$ に対して $h(t) \geq 0$ であるため、関数 H が単調増加関数である。

$$H^{-1}(r) = \min\{t \in \mathbb{R} : H(t) \geq r\}$$

とすると、逆関数 H^{-1} も単調増加である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) = \infty.\tag{3.3}$$

の前提で、条件 (3.1) が任意の $\kappa > 0$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} (H^{-1}(\kappa n) - H^{-1}(\kappa(n-1)))^2 = \infty\tag{3.4}$$

と同値であることを Hatvani et al. [10] は示した。Hatvani の方法を用いて、以下の等価関係がわかる。

Lemma 3.1. 条件 (3.3) の前提で、 $\rho > 0$ に対して

$$\int_0^{\infty} \frac{\int_0^t e^{\rho H(s)} ds}{e^{\rho H(t)}} dt = \infty\tag{3.5}$$

は (3.1) と同値である。

実は、条件 (2.4) と (3.1) は同値である。関数 h が [WIP] に属すれば、条件 (3.3) が成り立つので、Lemma 3.1 より、条件 (2.4) と (3.5) も同値である。

変数変換

$$x = -\ln(bP/a) \quad \text{と} \quad y = -\ln(dN/c)$$

を行い、モデル (E) を非線形微分方程式

$$\begin{aligned} x' &= c(1 - e^{-y}), \\ y' &= -a(1 - e^{-x}) - ch(t)(1 - e^{-y}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

に書き換える。このとき、モデル (E) の唯一の内部平衡点 $(c/d, a/b)$ は方程式 (3.6) の原点 $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$ に移され、定義域は $\{(N, P): N > 0, P > 0\}$ から $\{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ 平面全体へ変換される。したがって、モデル (3.6) の原点が大域的漸近安定であることと、(E) の内部平衡点 $(c/d, a/b)$ が大域的漸近安定であることは同義となる。したがって、定理 3.1 を以下のように書き換えられる。

Proposition 3.2. 正数 $\varepsilon_0 > 0$ と $\delta_0 > 0$ が存在して、 $|t - s| < \delta_0$ を満たす全ての $t \geq 0$ と $s \geq 0$ に対して、 $|h(t) - h(s)| < \varepsilon_0$ が成り立つと仮定する。関数 h が [WIP] に属すれば、(3.6) の原点が大域的漸近安定であるための必要十分条件は (3.1) である。

変数 $|x|$ と $|y|$ が十分に小さいとき、 $1 - e^{-x} \approx x$ と $1 - e^{-y} \approx y$ である。だから、方程式 (3.6) と (3.2) は構造的に近いと考え、Proposition 3.2 を証明する方法を発見した。しかし、Proposition 3.2 は解の大域的の性質を解明しているため、この線形近似する手法だけでは役に立たず、極めて詳細な数学的解析が必要となる。

3.3 主定理の証明と具体例

まず、Proposition 3.2 の証明で用いる関数を紹介する。

変数 $z \in \mathbb{R}$ に対して、関数 f

$$f(z) = e^{-z} + z - 1$$

と導関数 g

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dz} f(z) = 1 - e^{-z}$$

を考える. 明らかに, 関数 $f(z)$ が $z \geq 0$ において狭義単調増加, $z \leq 0$ において狭義単調減少である.

$$w = \hat{f}(z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z) \operatorname{sgn} z$$

と定義して, $\hat{f}^{-1}(w)$ を関数 $\hat{f}(z)$ の逆関数とする. 関数 $\hat{f}^{-1}(w)$ が $w \in \mathbb{R}$ において狭義単調増加, $\hat{f}^{-1}(0) = 0$ である. すべての $z \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\frac{d}{dz} (f(z) - f(-z)) = g(z) + g(-z) = 2 - (e^z + e^{-z}) \leq 0,$$

等式が $z = 0$ の時だけ満たされる. よって,

$$f(z_2) - f(z_1) < f(-z_2) - f(-z_1) \quad \text{for } z_1 < z_2 \quad (3.7)$$

と

$$f(z) < f(-z) \quad \text{for } z > 0.$$

がわかる. 故に, すべての $\alpha > 0$ と $w > 0$ に対して,

$$0 \leq f(z) \leq f(-\alpha) \quad \text{for } |z| \leq \alpha, \quad (3.8)$$

と

$$0 < -\hat{f}^{-1}(-w) < \hat{f}^{-1}(w) \quad \text{for } w > 0. \quad (3.9)$$

である. また, 関数 $g(z)$ が $z \in \mathbb{R}$ において狭義単調増加, $g(0) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 1$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} g(z) = -\infty$ である. すべての $\alpha > 0$ に対して,

$$g^2(z) \geq g^2(\alpha) \quad \text{for } |z| \geq \alpha \quad (3.10)$$

と

$$|g(z)| \leq |g(-\alpha)| \quad \text{for } |z| \leq \alpha \quad (3.11)$$

である.

Proposition 3.2 の証明

Remark 3.1 で述べたように, Proposition 3.2 を証明するためには, 方程式系 (3.6) のすべての解は最終的に原点に収束することが分かれば済む.

必要性の証明

背理法で

$$\int_0^\infty \frac{\int_0^t e^{H(s)} ds}{e^{H(t)}} dt < \infty$$

の場合に, 方程式系 (3.6) の原点に収束する解が存在しないことを示す. Lemma 3.1 の ρ として c を選んで, 上の不等式から,

$$\int_0^\infty \frac{\int_0^t e^{cH(s)} ds}{e^{cH(t)}} dt < \infty$$

がわかる. 故に,

$$\int_T^\infty \frac{\int_0^t e^{cH(s)} ds}{e^{cH(t)}} dt < \frac{1}{2ac(e-1)} \quad (3.12)$$

であるような十分大きな $T \geq 0$ が存在する. $\delta^* = \delta(1, T)/2$ を選んで, $t = T$ に $(\delta^*, 0)$ を通る方程式系 (3.6) の解 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ について,

$$|\tilde{x}(t)| + |\tilde{y}(t)| < 1 \quad \text{for } t \geq T$$

がわかる. $\tilde{x}'(T) = 0$ と $\tilde{y}'(T) < 0$ であるから, 解 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ は $t = T$ 以降には第四象限

$$Q_4 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$$

に入る. x 軸右辺での方程式系 (3.6) のベクトル場を考慮すれば, t の増加につれて解 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ は Q_4 から直接

$$Q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x > 0 \text{ and } y > 0\}$$

に入れないことがわかる.

解 $(x(t), y(t))$ の x 成分について, $\tilde{x}(T^*) = \delta^*/2$, $T \leq t < T^*$ において $\delta^*/2 <$

$\tilde{x}(t) \leq \delta^*$ であるような $T^* > T$ が存在すると仮定する. 上記の $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ の性質から, $T \leq t < T^*$ において $-1 < \tilde{y}(t) \leq 0$ であることがわかる. また,

$$1 - e^{-x} \leq x \quad \text{for } x \in \mathbb{R}$$

と

$$(e - 1)y \leq 1 - e^{-y} \leq y \quad \text{for } -1 < y \leq 0. \quad (3.13)$$

であるから, $T \leq t < T^*$ において

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(t) + ch(t)\tilde{y}(t) &\geq \tilde{y}'(t) + ch(t)(1 - e^{-\tilde{y}(t)}) = -a(1 - e^{-\tilde{x}(t)}) \\ &\geq -a\tilde{x}(t) \geq -a\delta^*, \end{aligned}$$

$$(e^{cH(t)}\tilde{y}(t))' \geq -a\delta^*e^{cH(t)} \quad \text{for } T \leq t < T^*$$

が得られる. 両辺を T から $t < T^*$ まで積分して,

$$e^{cH(t)}\tilde{y}(t) \geq e^{cH(T)}\tilde{y}(T) - a\delta^* \int_T^t e^{cH(s)} ds = -a\delta^* \int_T^t e^{cH(s)} ds$$

が得られる. したがって, (3.13) より, $T \leq t < T^*$ において

$$\tilde{x}'(t) = c(1 - e^{-\tilde{y}(t)}) \geq c(e - 1)\tilde{y}(t) \geq -ac(e - 1)\delta^* \frac{\int_T^t e^{cH(s)} ds}{e^{cH(t)}}$$

である. この式と (3.12) より,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(T^*) &\geq \tilde{x}(T) - ac(e - 1)\delta^* \int_T^{T^*} \frac{\int_T^t e^{cH(s)} ds}{e^{cH(t)}} dt \\ &\geq \delta^* - ac(e - 1)\delta^* \int_T^\infty \frac{\int_T^t e^{cH(s)} ds}{e^{cH(t)}} dt \\ &\geq \delta^* - ac(e - 1)\delta^* \int_T^\infty \frac{\int_0^t e^{cH(s)} ds}{e^{cH(t)}} dt > \frac{\delta^*}{2}. \end{aligned}$$

になる. これは $\tilde{x}(T^*) = \delta^*/2$ の仮定と矛盾する. したがって, $t \geq T$ に対して $\tilde{x}(t) > \delta^*/2$ とである. この事実から, $t \rightarrow \infty$ と共に (3.6) の解 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ は原点に収束しないことがわかる. 即ち, 方程式系 (3.6) の原点は大域的吸収ではない.

十分性の証明

方程式系 (3.6) の任意の解 $(x(t), y(t))$ に対して, リヤプノフ関数

$$v(t) = af(x(t)) + cf(y(t)) \quad (3.14)$$

を定義する. 方程式系 (3.6) の解に沿っての導関数が

$$v'(t) = ag(x(t))x'(t) + cg(y(t))y'(t) = -c^2h(t)g^2(y(t)) \leq 0$$

であるため, $v(t)$ は非負の極限值 v^* をもつことがわかる. もし $v^* = 0$ であれば, 方程式系 (3.6) のすべての解 $(x(t), y(t))$ が原点に収束するから, $v^* > 0$ の場合が起こらないことを示せばよい.

背理法で $v^* > 0$ を仮定する. よって,

$$0 < v^* \leq v(t) \leq 2v^* \quad \text{for } t \geq T_1. \quad (3.15)$$

が満たされるような $T_1 \geq t_0$ が存在する. 条件 (3.14) により, $t \geq T_1$ に対して,

$$|x(t)| \leq \hat{f}^{-1}(2v^*/a) \quad \text{と} \quad |y(t)| \leq \hat{f}^{-1}(2v^*/c) \quad (3.16)$$

である.

2つのステップで十分性の証明を完了する. まず, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ を示す. したがって, (3.14) により, $x(t)$ の極限值は $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{f}^{-1}(v^*/a) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_1 > 0$ か $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{f}^{-1}(-v^*/a) \stackrel{\text{def}}{=} -\beta_2 < 0$ のどちらになる. 次に, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ を示す. そして, 矛盾が生じる.

変数 $|y(t)|$ は有限であるため, $\liminf_{t \rightarrow \infty} |y(t)|$ と $\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)|$ が存在する.

Step (1): まず $\liminf_{t \rightarrow \infty} |y(t)| > 0$ と仮定する. よって,

$$|y(t)| > \gamma \quad \text{for } t \geq T_2$$

が満たされるような $\gamma > 0$ と $T_2 \geq t_0$ が見つかる. 条件 (3.10) より, $t \geq T_2$ に対して,

$$v'(t) = -c^2h(t)g^2(y(t)) \leq -c^2g^2(\gamma)h(t)$$

である。この不等式を t_0 から t まで積分すれば、

$$v^* - v(t_0) \leq v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t v'(s) ds \leq -c^2 g^2(\gamma) \int_{T_2}^t h(s) ds$$

が得られる。関数 h が [WIP] に属すれば (3.3) が成り立つので、上の式は間違っていることがわかる。したがって、 $\liminf_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$ である。

次に、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| \stackrel{\text{def}}{=} \lambda > 0$ と仮定する。不等式

$$0 < \varepsilon < \min\{\lambda/2, -\hat{f}^{-1}(-v^*/c)/2\}$$

を満たすような十分小さな ε があり、

$$\frac{4\varepsilon}{a\delta_0} + \frac{c(1+2\varepsilon_0)}{a} |g(-2\varepsilon)| < 1 - \exp\left(-f^{-1}\left(\frac{v^* - cf(-2\varepsilon)}{a}\right)\right) \quad (3.17)$$

と

$$\frac{4\varepsilon}{a\delta_0} + \frac{c(1+2\varepsilon_0)}{a} |g(-2\varepsilon)| < \exp\left(-f^{-1}\left(\frac{cf(-2\varepsilon) - v^*}{a}\right)\right) - 1. \quad (3.18)$$

が満たされる。実際は、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$f(-2\varepsilon) > 0, \quad g(-2\varepsilon) < 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(-2\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(-2\varepsilon) = 0$$

である。よって、(3.17) と (3.18) の左右の極限值を見れば、正数 ε が存在することがわかる。

また、 $|y(s_n)| = 2\varepsilon$, $|y(\tau_n)| = |y(\sigma_n)| = \varepsilon$,

$$|y(t)| \geq \varepsilon \quad \text{for } \tau_n < t < \sigma_n, \quad (3.19)$$

$$|y(t)| \leq 2\varepsilon \quad \text{for } \sigma_n < t < \tau_{n+1}, \quad (3.20)$$

$$\varepsilon < |y(t)| < 2\varepsilon \quad \text{for } \tau_n < t < s_n. \quad (3.21)$$

であるようになる三つの数列 $\{s_n\}$, $\{\tau_n\}$ と $\{\sigma_n\}$ を選ぶ。ただし、

$$T_1 < \tau_n < s_n < \sigma_n \leq \tau_{n+1},$$

$$\tau_n \rightarrow \infty \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

のような関係をもつ。実は、 $\liminf_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$ であるから、 $|y(t_*)| < \varepsilon$ であるような $t_* > T_1$ が存在する。また、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \lambda > 2\varepsilon$ であるから、

$$s_1 = \inf\{t > t_* : |y(t)| > 2\varepsilon\}, \quad \tau_1 = \sup\{t < s_1 : |y(t)| < \varepsilon\}$$

と

$$\sigma_1 = \inf\{t > s_1 : |y(t)| < \varepsilon\}$$

であるような定数 s_1 , τ_1 と σ_1 を見つける。明らかに、 $|y(s_1)| = 2\varepsilon$, $|y(\tau_1)| = |y(\sigma_1)| = \varepsilon$, $\tau_1 < t < \sigma_1$ において $|y(t)| \geq \varepsilon$ である。また、上の t_* の代わりに σ_1 を用いたら、同様に、 s_2 , τ_2 と σ_2 を定義できる。この手法を繰り返し、

$$s_n = \inf\{t > \sigma_{n-1} : |y(t)| > 2\varepsilon\}, \quad \tau_n = \sup\{t < s_n : |y(t)| < \varepsilon\}$$

と

$$\sigma_n = \inf\{t > s_n : |y(t)| < \varepsilon\}$$

であるような数列 $\{s_n\}$, $\{\tau_n\}$, $\{\sigma_n\}$ が得られる。もちろん、 $|y(s_n)| = 2\varepsilon$, $|y(\tau_n)| = |y(\sigma_n)| = \varepsilon$,

$$|y(t)| \geq \varepsilon \quad \text{for } \tau_n < t < \sigma_n,$$

$$|y(t)| \leq 2\varepsilon \quad \text{for } \sigma_n < t < \tau_{n+1}$$

と

$$\varepsilon < |y(t)| < 2\varepsilon \quad \text{for } \tau_n < t < s_n$$

である。

次に、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $s_n - \tau_n$ の値を評価する。解の成分 $y(t)$ の連続性と (3.21) から、

$$(i) : y(\tau_n) = \varepsilon < y(t) < 2\varepsilon = y(s_n), \quad \text{for } \tau_n < t < s_n$$

と

$$(ii) : y(s_n) = -2\varepsilon < y(t) < -\varepsilon = y(\tau_n), \quad \text{for } \tau_n < t < s_n$$

二つの場合があると考えられる。ケース (i) において,

$$f(|y(s_n)|) - f(|y(\tau_n)|) = f(y(s_n)) - f(y(\tau_n))$$

は明らかである。ケース (ii) において, (3.7) から

$$\begin{aligned} f(|y(s_n)|) - f(|y(\tau_n)|) &= f(-y(s_n)) - f(-y(\tau_n)) \\ &< f(y(s_n)) - f(y(\tau_n)) \end{aligned}$$

がわかる。したがって, どちらの場合にも

$$\begin{aligned} f(|y(s_n)|) - f(|y(\tau_n)|) &\leq f(y(s_n)) - f(y(\tau_n)) \\ &= \int_{y(\tau_n)}^{y(s_n)} g(\eta) d\eta = \int_{\tau_n}^{s_n} g(y(t)) y'(t) dt \\ &= -a \int_{\tau_n}^{s_n} g(x(t)) g(y(t)) dt - c \int_{\tau_n}^{s_n} h(t) g^2(y(t)) dt \\ &\leq a \int_{\tau_n}^{s_n} |g(x(t))| |g(y(t))| dt \end{aligned}$$

となる。条件 (3.11), (3.16) と (3.21) から, $t \geq T_1$ に対して

$$|g(x(t))| \leq \left| g\left(-\hat{f}^{-1}(2v^*/a)\right) \right| = -g\left(-\hat{f}^{-1}(2v^*/a)\right),$$

$\tau_n \leq t \leq s_n$ 対して

$$|g(y(t))| \leq |g(-2\varepsilon)| = -g(-2\varepsilon)$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} 0 &< f(2\varepsilon) - f(\varepsilon) = f(|y(s_n)|) - f(|y(\tau_n)|) \\ &\leq a \int_{\tau_n}^{s_n} g\left(-\hat{f}^{-1}(2v^*/a)\right) g(-2\varepsilon) dt = a g\left(-\hat{f}^{-1}(2v^*/a)\right) g(-2\varepsilon) (s_n - \tau_n) \end{aligned}$$

となり、即ち、各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$s_n - \tau_n \geq \frac{f(2\varepsilon) - f(\varepsilon)}{a g\left(-\hat{f}^{-1}(2v^*/a)\right) g(-2\varepsilon)} \stackrel{\text{def}}{=} m > 0$$

である。明らかに正数 m は $n \in \mathbb{N}$ に依存していない。 $[\tau_n, s_n] \subsetneq [\tau_n, \sigma_n]$ から、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n - \tau_n) \geq m > 0$ であることがわかる。したがって、 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\tau_n + m < \sigma_n$ である。

Proposition 3.2 の関数 h に関する仮定に従って、

$$|h(t) - h(\sigma_n)| < \varepsilon_0 \quad \text{for } \sigma_n - \delta_0 < t < \sigma_n + \delta_0. \quad (3.22)$$

である。次に、 h の $t = \sigma_n$, $n \in \mathbb{N}$ での値を調べる。

$$S = \{n \in \mathbb{N} : h(\sigma_n) \geq 1 + \varepsilon_0\}$$

を定義し、集合 S の要素数が有限であることを示す。集合 S の基数を $\text{card } S$ とする。条件 (3.19) と (3.22) より、 $\ell = \min\{\delta_0, m\}$ を選んで、

$$|y(t)| \geq \varepsilon \quad \text{for } \sigma_n - \ell \leq t \leq \sigma_n$$

がわかる。また、 $n \in S$ ならば、

$$h(t) \geq 1 \quad \text{for } \sigma_n - \ell \leq t \leq \sigma_n$$

である。したがって、

$$\int_{\sigma_n - \ell}^{\sigma_n} h(t) g^2(y(t)) dt \geq \ell g^2(\varepsilon) \quad \text{if } n \in S$$

となる。この不等式を用いて

$$\begin{aligned} v^* - v(t_0) &= \int_{t_0}^{\infty} v'(t) dt = -c^2 \int_{t_0}^{\infty} h(t) g^2(y(t)) dt \\ &\leq -c^2 \sum_{n \in S} \int_{\sigma_n - \ell}^{\sigma_n} h(t) g^2(y(t)) dt = -c^2 \ell g^2(\varepsilon) \text{card } S = -\infty. \end{aligned}$$

を得るが、矛盾が生じる。だから、集合 S の要素数が有限である。

集合 S の要素数が有限であるため、

$$h(\sigma_n) < 1 + \varepsilon_0 \quad \text{for } n \geq N. \quad (3.23)$$

であるような $N \in \mathbb{N}$ を見つける. 次に, すべての $n \geq N$ に対して, $\tau_{n+1} - \sigma_n \leq \delta_0$ を示す. 背理法を用いるため, $\sigma_{n_0} + \delta_0 < \tau_{n_0+1}$ であるような $n_0 \geq N$ が存在すると仮定する. 条件 (3.8), (3.14), (3.15) と (3.20) より, $\sigma_{n_0} \leq t \leq \tau_{n_0+1}$ に対して

$$af(x(t)) = v(t) - cf(y(t)) \geq v^* - cf(-2\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} w^*$$

となる. $0 < \varepsilon < -\hat{f}^{-1}(-v^*/c)/2$ であるから, w^* は正であることがわかる.

次に, 2つの場合に分けて証明を進める:

$$(a) \ x(t) \geq \hat{f}^{-1}(w^*/a) > 0 \quad \text{for } \sigma_{n_0} \leq t \leq \tau_{n_0+1};$$

$$(b) \ x(t) \leq \hat{f}^{-1}(-w^*/a) < 0 \quad \text{for } \sigma_{n_0} \leq t \leq \tau_{n_0+1}.$$

条件 (3.22) と (3.23) より,

$$h(t) < \varepsilon_0 + h(\sigma_{n_0}) < 1 + 2\varepsilon_0 \quad \text{for } \sigma_{n_0} \leq t \leq \tau_{n_0+1}$$

が得られる. 前者の場合に, (3.6), (3.11), (3.17) と (3.20) により, $\sigma_{n_0} \leq t \leq \sigma_{n_0} + \delta_0$ に対して,

$$\begin{aligned} y'(t) &= -a(1 - e^{-x(t)}) - ch(t)(1 - e^{-y(t)}) \\ &\leq -a\left(1 - \exp\left(-\hat{f}^{-1}(w^*/a)\right)\right) + ch(t)|g(y(t))| \\ &\leq -a\left(1 - \exp\left(-\hat{f}^{-1}(w^*/a)\right)\right) + c(1 + 2\varepsilon_0)|g(-2\varepsilon)| \\ &< -\frac{4\varepsilon}{\delta_0} \end{aligned}$$

である. 後者の場合に, (3.17) の代わりに (3.18) を用いて, $\sigma_{n_0} \leq t \leq \sigma_{n_0} + \delta_0$ に対して,

$$\begin{aligned} y'(t) &= -a(1 - e^{-x(t)}) - ch(t)(1 - e^{-y(t)}) \\ &\geq a\left(\exp\left(-\hat{f}^{-1}(-w^*/a)\right) - 1\right) - ch(t)|g(y(t))| \\ &\geq a\left(\exp\left(-\hat{f}^{-1}(-w^*/a)\right) - 1\right) - c(1 + 2\varepsilon_0)|g(-2\varepsilon)| \\ &> \frac{4\varepsilon}{\delta_0} \end{aligned}$$

である。したがって、いずれの場合にも

$$|y'(t)| > \frac{4\varepsilon}{\delta_0} \quad \text{for } \sigma_{n_0} \leq t \leq \sigma_{n_0} + \delta_0$$

ということになる。この不等式を σ_{n_0} から $\sigma_{n_0} + \delta_0$ まで積分すれば、

$$|y(\sigma_{n_0} + \delta_0)| + |y(\sigma_{n_0})| \geq \left| \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_{n_0} + \delta_0} y'(t) dt \right| = \int_{\sigma_{n_0}}^{\sigma_{n_0} + \delta_0} |y'(t)| dt > 4\varepsilon$$

となる。しかし、(3.20)により、

$$|y(\sigma_{n_0} + \delta_0)| + |y(\sigma_{n_0})| \leq 4\varepsilon$$

であるから、矛盾が生じる。したがって、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\tau_{n+1} - \sigma_n) \leq \delta_0 < \infty$ である。

$\{\tau_n\}$ と $\{\sigma_n\}$ の選ぶ方より、 $\tau_n < \sigma_n < \tau_{n+1}$ が明らかである。また、関数 h が [WIP] に属するため、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n - \tau_n) > 0$ ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\sigma_n} h(t) dt = \infty \quad (3.24)$$

になる。

一方、条件 (3.10) と (3.19) から、

$$g^2(y(t)) \geq g^2(\varepsilon) > 0 \quad \text{for } \tau_n \leq t \leq \sigma_n$$

がわかる。よって、

$$\int_{t_0}^{\infty} v'(t) dt = -c^2 \int_{t_0}^{\infty} h(t) g^2(y(t)) dt \leq -c^2 g^2(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\sigma_n} h(t) dt$$

になる。さらに、

$$\int_{t_0}^{\infty} v'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) - v(t_0) = v^* - v(t_0) < 0$$

であるから、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\sigma_n} h(t) dt \leq \frac{v(t_0) - v^*}{c^2 g^2(\varepsilon)} < \infty$$

がわかる。これは (3.24) と矛盾するから、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$ となる。Step (1) の証明は今や完了した。

Step (2): 上述のように、 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ であるから、 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{f}^{-1}(v^*/a) = \beta_1$ か $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{f}^{-1}(-v^*/a) = -\beta_2$ のどちらになる。極限值 v^* は正であるから、 β_1 と β_2 も正である。したがって、解 $(x(t), y(t))$ は x 軸右辺の $(\beta_1, 0)$ に収束するか、 x 軸左辺の $(-\beta_2, 0)$ に収束することになる。次に、 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ を示す。

$$2y < 1 - e^{-y} < y \quad \text{for } -1 < y < 0 \quad (3.25)$$

と

$$\frac{y}{2} < 1 - e^{-y} < y \quad \text{for } 0 < y < 1. \quad (3.26)$$

のような事実がある。

$$x(t) > \beta_1 \quad \text{and} \quad y(t) < 0 \quad \text{for } t \geq T_3 \quad (3.27)$$

か

$$x(t) < -\beta_2 \quad \text{and} \quad y(t) > 0 \quad \text{for } t \geq T_3. \quad (3.28)$$

のどちらの場合になるような $T_3 \geq t_0$ が存在する。実際は、方程式系 (3.6) のベクトル場を考察すると、 x 軸右辺で $y'(t) < 0$ 、 x 軸左辺で $y'(t) > 0$ であることがわかる。即ち、解 $(x(t), y(t))$ は第四象限 Q_4 (第二象限 Q_2) から第一象限 Q_1 (第三象限 Q_3) に入れない。まず、 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\beta_1, 0)$ の場合を考察する。解 $(x(t), y(t))$ は Q_1 か Q_4 のいずれを通して $(\beta_1, 0)$ に収束する。例えば、 Q_1 を通して $(\beta_1, 0)$ に収束することを仮定する。よって、

$$\frac{\beta_1}{2} \leq x(t) \quad \text{and} \quad y(t) > 0 \quad \text{for } t \geq \tilde{T}_3$$

であるような $\tilde{T}_3 \geq t_0$ が存在する。したがって、 $t \geq \tilde{T}_3$ に対して、

$$y'(t) \leq -a(1 - e^{-x(t)}) \leq -a(1 - e^{-\beta_1/2})$$

である。この不等式を \tilde{T}_3 から t まで積分すれば、

$$y(t) \leq y(\tilde{T}_3) - a(1 - e^{-\beta_1/2})(t - \tilde{T}_3)$$

が得られ、右辺は $-\infty$ に発散する。しかし、 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ と矛盾するから、解 $(x(t), y(t))$ は Q_4 を通して $(\beta_1, 0)$ に収束することがわかる。故に、(3.27) が成り立つ。
 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (-\beta_2, 0)$ の場合に、上記と同様の方法で解 $(x(t), y(t))$ は Q_2 を通して $(-\beta_2, 0)$ に収束することがわかる。そのため、(3.28) が成り立つ。

また、 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ であるから、

$$|y(t)| < 1 \quad \text{for } t \geq T_4 \quad (3.29)$$

になるような $T_4 \geq T_3$ が存在する。以降の証明は (3.27) が成立する場合のみを考慮する。なぜなら、(3.25) と (3.27) の代わりに (3.26) と (3.28) を用いたら、(3.28) が成立する場合も同様に行われる。前者の場合に、(3.25)、(3.27) と (3.29) より、 $t \geq T_4$ に対して、

$$\begin{aligned} y'(t) + 2ch(t)y(t) &\leq y'(t) + ch(t)(1 - e^{-y(t)}) \\ &= -a(1 - e^{-x(t)}) < -a(1 - e^{-\beta_1}) < 0, \end{aligned}$$

$$(e^{2cH(t)}y(t))' < -a(1 - e^{-\beta_1})e^{2cH(t)}, \quad \text{for } t \geq T_4$$

となる。両辺を T_4 から t まで積分して変形すれば、

$$y(t) < y(T_4) - e^{2c(H(T_4)-H(t))}y(T_4) < -a(1 - e^{-\beta_1}) \frac{\int_{T_4}^t e^{2cH(s)} ds}{e^{2cH(t)}}$$

が得られる。よって、(3.25) により、 $t \geq T_4$ に対して

$$x'(t) = c(1 - e^{-y(t)}) \leq cy(t) < -ac(1 - e^{-\beta_1}) \frac{\int_{T_4}^t e^{2cH(s)} ds}{e^{2cH(t)}}$$

がわかる。さらに、この不等式を T_4 から t まで積分して、

$$x(t) < -ac(1 - e^{-\beta_1}) \int_{T_4}^t \frac{\int_{T_4}^s e^{2cH(\tau)} d\tau}{e^{2cH(s)}} ds + x(T_4)$$

を得る。関数 h は非負であるから、

$$\int_0^\infty e^{2cH(t)} dt = \infty$$

は明らかである。したがって、

$$\int_{T_4}^s e^{2cH(\tau)} d\tau > \frac{1}{2} \int_0^s e^{2cH(\tau)} d\tau \quad \text{for } s \geq T_5$$

が満たされるような $T_5 \geq T_4$ が存在する。すべての $t \geq T_5$ に対して

$$\begin{aligned} \beta_1 < x(t) < & -\frac{ac(1 - e^{-\beta_1})}{2} \int_{T_5}^t \frac{\int_0^s e^{2cH(\tau)} d\tau}{e^{2cH(s)}} ds \\ & - ac(1 - e^{-\beta_1}) \int_{T_4}^{T_5} \frac{\int_{T_4}^s e^{2cH(\tau)} d\tau}{e^{2cH(s)}} ds + x(T_4) \end{aligned}$$

である。条件 (3.1) と Lemma 3.2 の $\rho = 2c$ の場合を用いて、

$$\int_0^\infty \frac{\int_0^t e^{2cH(s)} ds}{e^{2cH(t)}} dt = \infty$$

がわかる。しかし、これは上記の評価と矛盾する。今 Step (2) の証明が完了する。
したがって、Proposition 3 は完了する。

3.4 一様大域的漸近安定性の証明

モデル (E) の内部平衡点が大域的漸近安定であるとは、被食者と捕食者の個体密度の初期値が何であっても、時間経過とともに最終的には、両者の個体密度は調和状態である内部平衡点に近づくことを意味する。したがって、初期値と内部平衡点のズレが同じでも、そのズレがいつ生じたかによって、平衡点に近づく速度が違うためそのズレが消滅する時間は異なってもよい。各解は種の密度の変化を表すので、解の到着時間の不確実性は、将来の密度が予測不可能であることを意味する。このような意味で、たとえ内部平衡点が大域的漸近安定であることが判明しても、いつズレがほとんど無くなるのか評価できないようでは、個体密度に関する未来予想は困難となる。別の言い方をすると、この事実は実用にはあまり役立たないと言える。それを可能にするためには、大域的漸近安定性を一段厳密にした一様大域的漸近安定性という概念が必要になる。

内部平衡点が一様大域的漸近安定性であるためには、同じ位置から始まるすべて

の解が初期時間にかかわらず同じ時間内に内部平衡点に近づくことを確認しなければならぬ。換言すれば、初期時間は内部平衡点に対する解の漸近速度に影響しない。したがって、内部平衡点が一様大域的漸近安定である場合、ある解が内部平衡点に近づく到着時間を一度測定すると、同じ場所から出発するすべての解の内部平衡点への到達時間を判断することができる。

一様大域的漸近安定性の研究は、上記のように大きな利点とメリットを有すると考えられるが、それに応じて詳細な分析が必要である。このため、生態系モデルの内部平衡点の一様大域的漸近安定性に関する先行研究は極めて少ない。

本節では、モデル (E) の内部平衡点が一様大域的漸近安定になるための十分条件を解明する。

Theorem 3.3. 関数 h が [IP] に属する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma}^{t+\sigma} \frac{\int_{\sigma}^s e^{\gamma H(\tau)} d\tau}{e^{\gamma H(s)}} ds = \infty \quad (3.30)$$

uniformly with respect to $\sigma \geq 0$.

を満たすような $\gamma > c$ が存在すれば、モデル (E) の内部平衡点 $(c/d, a/b)$ が一様大域的漸近安定である。

Theorem 3.1 と比べて、Theorem 3.2 では [WIP] を強めた [IP]、 h の急速な増加を制限する役目を果たす条件 (3.1) より一様性を加えた (3.30) を仮定することによって、モデル (E) の平衡点の一様大域的漸近安定性を保証できる結果を導いた。

この研究にも、直接モデル (E) の内部平衡点の一様大域的漸近安定性を証明することではなく、方程式系 (3.6) の原点が一様大域的漸近安定であることを議論する。

Proposition 3.4. 関数 h が [IP] に属する。 (3.30) を満たすような $\gamma > c$ が存在すれば、方程式系 (3.6) の原点が一様大域的漸近安定である。

次の順番で証明する。

- (a) まず、方程式系 (3.6) の原点が一様安定を示す。つまり、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在して、任意の $t_0 \geq 0$ に対して、 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ ならば、すべての $t \geq t_0$ に対して $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ が成り立つ。

(b) 次に、方程式系 (3.6) の原点が一様大域吸取的を示す。つまり、任意の $r \geq 0$ と $\eta > 0$ に対して、 $T(r, \eta) > 0$ が存在して、すべての $\|\mathbf{x}_0\| < r$ を満たす \mathbf{x}_0 とすべての $t \geq t_0 + T$ に対して $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \eta$ が成り立つ。この T を用いて、ある $t^* \in [t_0, t_0 + T]$ に対して $\|\mathbf{x}(t^*; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \delta(\eta)$ である。

(c) 最後に、方程式系 (3.6) のすべての解が一様有界であることを示す。つまり、任意の $r > 0$ に対して、 $B(r) > 0$ が存在して、任意の $t_0 \geq 0$ とに対して、 $\|\mathbf{x}_0\| < r$ ならば、すべての $t \geq t_0$ に対して $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < B$ である。

3つのパートで、初期時刻 t_0 に依存しない δ , T , B を見つけること重要である。

Proof of Proposition 3.4

Part (a) : 定数 $m = \min\{a, c\}$ と $M = \max\{a, c\}$ を定義する。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\delta(\varepsilon) = \sqrt{2} \hat{f}^{-1} \left(\frac{m}{M} f \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

を選ぶ。定数 m と M の定義より、

$$\delta \leq \sqrt{2} \hat{f}^{-1} \left(f \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right) \right) = \varepsilon$$

がわかる。次に、任意の $t_0 \geq 0$ と $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して、 $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ ならば、すべての $t \geq t_0$ に対して $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ を示す。

関数 $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $w(x, y) = f(x) + f(y)$ と定義する。ラグランジュの未定乗数法を用いて、Lagrange 関数として、 $L(x, y, \lambda) = f(x) + f(y) + \lambda(x^2 + y^2 - r^2)$ とする。ただし、 r は正の定数である。したがって、サークル $\{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$ では

$$2f \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right) \leq w(x, y) \leq 2f \left(-\frac{r}{\sqrt{2}} \right)$$

である。故に、

$$\begin{aligned} 2mf \left(\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|/\sqrt{2} \right) &\leq mw(x(t), y(t)) \\ &\leq v(t) \\ &\leq Mw(x(t), y(t)) \leq 2Mf \left(-\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|/\sqrt{2} \right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

が得られる。さらに、 \hat{f}^{-1} の性質から、 $t \geq t_0$ に対して

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| &\leq \sqrt{2} \hat{f}^{-1} \left(\frac{v(t)}{2m} \right) \leq \sqrt{2} \hat{f}^{-1} \left(\frac{v(t_0)}{2m} \right) \\ &\leq \sqrt{2} \hat{f}^{-1} \left(\frac{M}{m} f \left(-\frac{\|\mathbf{x}_0\|}{\sqrt{2}} \right) \right) \leq \|\mathbf{x}_0\| < \delta \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (3.32)$$

がわかる。つまり、方程式系 (3.6) の原点が δ 一様安定である。

Part (b) : 関数 h が [IP] に属するから、

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+d} h(s) ds > 0 \quad \text{for every } d > 0 \quad (3.33)$$

である。ここの d として、1 を選ぶ。

$$\int_t^{t+1} h(s) ds \geq \ell \quad \text{for } t \geq \hat{t}. \quad (3.34)$$

が満たされるような $\ell > 0$ と $\hat{t} > 0$ が存在する。任意の $\eta > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \mu(\eta) = \min \left\{ -\hat{f}^{-1} \left(-\frac{m^2}{cM} f \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right), \right. \\ \left. ag \left(\hat{f}^{-1} \left(\frac{m^2}{aM} f \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right) \right), -ag \left(\hat{f}^{-1} \left(-\frac{m^2}{aM} f \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \right\} \end{aligned}$$

のような $\mu > 0$ 、任意の $r > 0$ に対して

$$\tau_1(r, \eta) = \hat{t} + \left\lceil \frac{2Mf(-r/\sqrt{2})}{\ell c^2 g^2(\mu/2)} \right\rceil + 1$$

を選ぶ。ここの $\lceil \cdot \rceil$ は実数 (\cdot) に超えない最大の整数を意味する。条件 (3.30) より、すべての $t \geq \tau_2 - 1$ に対して、

$$\int_\sigma^{t+\sigma} \frac{\int_\sigma^s e^{\gamma H(\tau)} d\tau}{e^{\gamma H(s)}} ds \geq \max \left\{ \frac{\hat{f}^{-1} \left(\frac{2M}{a} f \left(-r/\sqrt{2} \right) \right)}{acg \left(\hat{f}^{-1} \left(\frac{m^2}{aM} f \left(\eta/\sqrt{2} \right) \right) \right)}, \frac{\mu \hat{f}^{-1} \left(-\frac{2M}{a} f \left(-r/\sqrt{2} \right) \right)}{acg(\mu)g \left(\hat{f}^{-1} \left(-\frac{m^2}{aM} f \left(\eta/\sqrt{2} \right) \right) \right)} \right\} \quad (3.35)$$

が成り立つような $\tau_2(r, \eta) > 0$ が存在する. 一般性を失うことなく, $\tau_2 > 1$ を仮定する. 上述の r と η に依存する実数 ω を

$$\omega(r, \eta) = \frac{f(\mu) - f(\mu/2)}{ag\left(-\hat{f}^{-1}\left(2Mf(-r/\sqrt{2})/a\right)\right)g(-\mu)}$$

と定義する. 関数 f, g, \hat{f}^{-1} の性質と $\mu > 0$ のことより, ω は正であることがわかる. 条件 (3.33) の d として, ω と選んで, r と η だけに依存する正数

$$\rho = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{c^2 g^2(\mu/2)}{4Mf(-r/\sqrt{2})} \int_t^{t+\omega} h(s) ds$$

を定義する. よって,

$$\int_t^{t+\omega} h(s) ds \geq \frac{2\rho Mf(-r/\sqrt{2})}{c^2 g^2(\mu/2)} \quad \text{for } t \geq \tau_3. \quad (3.36)$$

になるような $\tau_3(r, \eta) > 0$ が見つかる. したがって, r と η だけに依存する τ_1, τ_2 と τ_3 を用いて,

$$T(r, \eta) = \tau_3 + \left(\left[\frac{1}{\rho} \right] + 1 \right) (\tau_1 + \tau_2)$$

を定義する.

方程式系 (3.6) の原点は一様大域吸取的であることを証明するためには, $\|\mathbf{x}_0\| < r$ ならば,

$$\|\mathbf{x}(t^*; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \delta(\eta). \quad (3.37)$$

になるような $t^* \in [t_0, t_0 + T(r, \eta)]$ が存在することを示すだけで済む. 実際は, $\mathbf{x}(t^*; t_0, \mathbf{x}_0)$ を \mathbf{x}^* とし, part (a) の結論と不等式 (3.37) より,

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{x}(t; t^*, \mathbf{x}^*)\| < \eta \quad \text{for } t \geq t^*$$

が導かれる.

背理法を用いて, (3.37) が成り立つことを示す. 任意の $t \in [t_0, t_0 + T]$ に対して,

$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \geq \delta(\eta)$ を仮定すると, (3.31) より

$$\begin{aligned} \frac{2m^2}{M} f\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) &= 2mf\left(\frac{\delta(\eta)}{\sqrt{2}}\right) \leq 2mf\left(\frac{\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|}{\sqrt{2}}\right) \\ &\leq v(t) \\ &\leq v(t_0) \leq 2Mf\left(-\frac{\|\mathbf{x}_0\|}{\sqrt{2}}\right) < 2Mf\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

がわかる. この後, 3つのステップに分けて, 解 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ の成分 $y(t)$ の挙動を調べる.

Step 1. 任意の $t \in [\alpha, \beta] \subset [t_0, t_0 + T]$ に対して, $|y(t)| \geq \mu/2$ ならば, 区間の長さは $\beta - \alpha < \tau_1$ である. 実際は, もし $\beta_1 - \alpha_1 \geq \tau_1$, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ において $|y(t)| \geq \mu/2$ であるような $[\alpha_1, \beta_1] \subset [t_0, t_0 + T]$ が存在すれば, (3.10) と (3.38) を用いて, $v'(t) = -c^2 h(t) g^2(y(t)) \leq 0$ を α_1 から β_1 まで積分すると,

$$\begin{aligned} c^2 g^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \int_{\alpha_1}^{\beta_1} h(t) dt &\leq c^2 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} h(t) g^2(y(t)) dt \\ &= - \int_{\alpha_1}^{\beta_1} v'(t) dt = v(\alpha_1) - v(\beta_1) < 2Mf\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

が得られる. 一方, (3.34) と τ_1 の定義から,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} h(t) dt &\geq \int_{\alpha_1 + \hat{t}}^{\alpha_1 + \tau_1} h(t) dt = \sum_{i=0}^{\left[\frac{2Mf(-r/\sqrt{2})}{\ell c^2 g^2(\mu/2)}\right]} \int_{\alpha_1 + \hat{t} + i}^{\alpha_1 + \hat{t} + i + 1} h(t) dt \\ &\geq \left(\left[\frac{2Mf(-r/\sqrt{2})}{\ell c^2 g^2(\mu/2)} \right] + 1 \right) \ell \geq \frac{2M}{c^2} f\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right) g^{-2}\left(\frac{\mu}{2}\right) \end{aligned}$$

がわかる. これは (3.39) と矛盾するから, 冒頭に述べたことは正しいである.

Step 2. 任意の $t \in [\alpha, \beta] \subset [t_0, t_0 + T]$ に対して, $|y(t)| \leq \mu$ ならば, 区間の長さは $\beta - \alpha < \tau_2$ である. 実際は, $\mu \leq -\hat{f}^{-1}\left(-m^2 f(\eta/\sqrt{2}) / (cM)\right)$ であるため, (3.8) と

(3.38) を用いて, $t \in [\alpha, \beta]$ に対して,

$$\begin{aligned} af(x(t)) = v(t) - cf(y(t)) &\geq \frac{2m^2}{M} f\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) - cf(-\mu) \\ &\geq \frac{2m^2}{M} f\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) - \frac{m^2}{M} f\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) = \frac{m^2}{M} f\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

である. よって,

$$x(t) \geq \hat{f}^{-1}\left(m^2 f\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) / (aM)\right) \quad \text{for } t \in [\alpha, \beta]$$

か

$$x(t) \leq \hat{f}^{-1}\left(-m^2 f\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) / (aM)\right) \quad \text{for } t \in [\alpha, \beta]$$

であるような2つ場合がある. 後者の場合は前者と同じ方法で証明できるので, 前者の場合のみを考慮する.

$$k_1 = \frac{1 - e^{-\mu}}{\mu}, \quad k_2 = \min\left\{\frac{\gamma}{c}, \frac{e^\mu - 1}{\mu}\right\}$$

とすると, $0 < k_1 < 1 < k_2$ であることが明らかである. 方程式系 (3.6) のベクトル場を考察する上で, 解曲線が x 軸の右辺と交差するならば, x 軸を上から下へ垂直に1回だけ通過する. したがって, 次の3つのケースを考える:

(i) 次のようになる $\tilde{t} \in (\alpha, \beta)$ が存在する: $y(\tilde{t}) = 0$, $t \in [\alpha, \tilde{t}]$ において $0 < y(t) \leq \mu$, $t \in (\tilde{t}, \beta]$ において $-\mu \leq y(t) < 0$ である;

(ii) $t \in [\alpha, \beta]$ において $0 < y(t) \leq \mu$ である;

(iii) $t \in [\alpha, \beta]$ において $-\mu \leq y(t) < 0$ である.

Case (i). 区間 $[\alpha, \tilde{t}]$ において,

$$\begin{aligned} (y(t)e^{ck_1 H(t)})' &= (y'(t) + ck_1 h(t)y(t))e^{ck_1 H(t)} \leq (y'(t) + ch(t)g(y(t)))e^{ck_1 H(t)} \\ &= -ag(x(t))e^{ck_1 H(t)} \leq -ag\left(\hat{f}^{-1}\left(m^2 f\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) / (aM)\right)\right) e^{ck_1 H(t)} \end{aligned}$$

であるから,

$$0 = y(\tilde{t}) \leq -ag \left(\hat{f}^{-1} \left(\frac{m^2}{aM} f \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \frac{\int_{\alpha}^{\tilde{t}} e^{ck_1 H(s)} ds}{e^{ck_1 H(\tilde{t})}} + y(\alpha) \frac{e^{ck_1 H(\alpha)}}{e^{ck_1 H(\tilde{t})}}$$

が得られる. 関数 H は単調増加かつ $y(\alpha) \leq \mu \leq ag \left(\hat{f}^{-1} \left(m^2 f(\eta/\sqrt{2}) / (aM) \right) \right)$ であることより,

$$\begin{aligned} 0 &\leq -ag \left(\hat{f}^{-1} \left(\frac{m^2}{aM} f \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) (\tilde{t} - \alpha) \frac{e^{ck_1 H(\alpha)}}{e^{ck_1 H(\tilde{t})}} + \mu \frac{e^{ck_1 H(\alpha)}}{e^{ck_1 H(\tilde{t})}} \\ &\leq -a(\tilde{t} - \alpha - 1)g \left(\hat{f}^{-1} \left(\frac{m^2}{aM} f \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \frac{e^{ck_1 H(\alpha)}}{e^{ck_1 H(\tilde{t})}} \end{aligned}$$

がわかる. したがって, $\tilde{t} - \alpha < 1$ になる.

同様に, $[\tilde{t}, \beta]$ において

$$y(t) \leq -ag \left(\hat{f}^{-1} \left(\frac{m^2}{aM} f \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \frac{\int_{\tilde{t}}^t e^{ck_2 H(s)} ds}{e^{ck_2 H(t)}}$$

であるから, (3.38) より, $x(\tilde{t}) < \hat{f}^{-1} \left(2Mf(-r/\sqrt{2}) / a \right)$ が得られる. 背理法を用いるため, $\beta - \tilde{t} \geq \tau_2 - 1$ と仮定する. よって,

$$x(\tilde{t} + \tau_2 - 1) \geq \hat{f}^{-1} \left(m^2 f(\eta/\sqrt{2}) / (aM) \right) > 0$$

になり,

$$\begin{aligned} -\hat{f}^{-1} \left(\frac{2M}{a} f \left(-\frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right) &< -x(\tilde{t}) < x(\tilde{t} + \tau_2 - 1) - x(\tilde{t}) \\ &= \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \tau_2 - 1} x'(t) dt = \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \tau_2 - 1} c(1 - e^{-y(t)}) dt \leq \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \tau_2 - 1} cy(t) dt \\ &\leq -acg \left(\hat{f}^{-1} \left(\frac{m^2}{aM} f \left(\frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right) \right) \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \tau_2 - 1} \frac{\int_{\tilde{t}}^t e^{ck_2 H(s)} ds}{e^{ck_2 H(t)}} dt. \end{aligned}$$

である. また, $ck_2 \leq \gamma$ であるから,

$$\int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \tau_2 - 1} \frac{\int_{\tilde{t}}^t e^{ck_2 H(s)} ds}{e^{ck_2 H(t)}} dt \geq \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \tau_2 - 1} \frac{\int_{\tilde{t}}^t e^{\gamma H(s)} ds}{e^{\gamma H(t)}} dt$$

がわかる。条件 (3.35) の $\sigma = \tilde{t}$ と $t = \tau_2 - 1$ の場合を用いて,

$$\begin{aligned} & -\hat{f}^{-1}\left(\frac{2M}{a}f\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right) \\ & < -acg\left(\hat{f}^{-1}\left(\frac{m^2}{aM}f\left(\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)\frac{\hat{f}^{-1}\left(2Mf(-r/\sqrt{2})/a\right)}{acg\left(\hat{f}^{-1}\left(m^2f(\eta/\sqrt{2})/(aM)\right)\right)} \\ & = -\hat{f}^{-1}\left(\frac{2M}{a}f\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{aligned}$$

が導かれるが、矛盾である。故に、 $\beta - \tilde{t} < \tau_2 - 1$ となる。したがって、 $\beta - \alpha = \tilde{t} - \alpha + \beta - \tilde{t} < 1 + \tau_2 - 1 = \tau_2$ と結論付ける。

Case (ii). Case (i) と同様な過程を繰り返すと、 $\beta - \alpha < 1 < \tau_2$ がわかる。

Case (iii). Case (i) と同様な過程を繰り返すと、 $\beta - \alpha < \tau_2 - 1 < \tau_2$ がわかる。

Step 3. 区間 $[t_0 + \tau_3, t_0 + T]$ を

$$[t_0 + \tau_3, t_0 + T] = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_{[1/\rho]+1}$$

のように分ける。ただし、 $1 \leq i \leq [1/\rho] + 1$ に対して、 $J_i = [t_0 + \tau_3 + (i-1)(\tau_1 + \tau_2), t_0 + \tau_3 + i(\tau_1 + \tau_2)]$ である。区間 J_1 で $|y(t)|$ の挙動をより詳細に調べるため、まず J_1 を $[t_0 + \tau_3, t_0 + \tau_1 + \tau_3]$ と $[t_0 + \tau_1 + \tau_3, t_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3]$ に分ける。この二つの区間の長さはそれぞれ τ_1 と τ_2 であるため、Step 1 と Step 2 の主張より、 $|y(\underline{t})| < \mu/2$ と $|y(\bar{t})| > \mu$ になるような $\underline{t} \in [t_0 + \tau_3, t_0 + \tau_1 + \tau_3]$ と $\bar{t} \in [t_0 + \tau_1 + \tau_3, t_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3]$ が見つかる。さらに、 $|y(t)|$ は連続であるから、 $\underline{t} \leq t_1 < t_2 \leq \bar{t}$ 、 $|y(t_1)| = \mu/2$ 、 $|y(t_2)| = \mu$ 、

$$\frac{\mu}{2} < |y(t)| < \mu, \quad t \in (t_1, t_2) \quad (3.40)$$

であるような t_1, t_2 が見つかる。明らかに、 $y(t_1)$ と $y(t_2)$ が同符号である。条件 (3.38) より、 $[t_0, t_0 + T]$ において、 $0 < x(t) < \hat{f}^{-1}\left(2Mf(-r/\sqrt{2})/a\right)$ である。したがって、(3.11) により、 (t_1, t_2) において $|g(y(t))| < |g(-\mu)|$ 、 $[t_0, t_0 + T]$ において $|g(x(t))| <$

$\left|g\left(-\hat{f}^{-1}\left(2Mf(-r/\sqrt{2})/a\right)\right)\right|$ である。さらに, (3.7) を用いて,

$$\begin{aligned} f(\mu) - f(\mu/2) &= f(|y(t_2)|) - f(|y(t_1)|) \leq f(y(t_2)) - f(y(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} f'(y(t)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (-ag(x(t))g(y(t)) - ch(t)g^2(y(t))) dt \leq a \int_{t_1}^{t_2} |g(x(t))||g(y(t))| dt \\ &< ag\left(-\hat{f}^{-1}\left(\frac{2M}{a}f\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right)\right)g(-\mu)(t_2 - t_1), \end{aligned}$$

が得られる。すなわち, $\omega < t_2 - t_1$ になる。条件 (3.10), (3.36) と (3.40) より,

$$\begin{aligned} v(t_2) - v(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} v'(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} c^2 h(t) g^2(y(t)) dt \\ &\leq -c^2 g^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \int_{t_1}^{t_1+\omega} h(t) dt \leq -2\rho M f\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

が得られる。すべての $t \geq t_0$ に対して, $v'(t) = -c^2 h(t) g^2(y(t)) \leq 0$ であるため,

$$v(t_1) - v(t_0 + \tau_3) \leq 0 \quad \text{と} \quad v(t_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - v(t_2) \leq 0$$

は明らかである。これらの v の評価を合わせると,

$$\begin{aligned} \int_{J_1} v'(t) dt &= v(t_0 + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - v(t_2) + v(t_2) - v(t_1) + v(t_1) - v(t_0 + \tau_3) \\ &\leq -2\rho M f\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

がわかる。すべての $i = 2, 3, \dots, [1/\nu] + 1$ に対して, 区間 J_i で同じプロセスを繰り返すと, $\int_{J_i} v'(t) dt \leq -2\rho M f(-r/\sqrt{2})$ と結論付ける。したがって, 各区間 J_i における総エネルギー v の損失は少なくとも $2\rho M f(-r/\sqrt{2})$ となるから,

$$\begin{aligned} v(t_0 + T) &= v(t_0 + \tau_3) + \sum_{i=1}^{[1/\rho]+1} \int_{J_i} v'(t) dt < v(t_0 + \tau_3) - 2\rho \left(\left[\frac{1}{\rho}\right] + 1\right) M f\left(-r/\sqrt{2}\right) \\ &\leq v(t_0 + \tau_3) - 2M f\left(-r/\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

になる。しかし, (3.38) から,

$$0 < v(t_0 + T) < v(t_0 + \tau_3) - 2Mf\left(-r/\sqrt{2}\right) < 0$$

がわかる。矛盾が生じるため, 不等式 (3.37) が成り立つ。

Part (c) : 任意の $r > 0$ に対して,

$$B(r) = \sqrt{2}\hat{f}^{-1}\left(\frac{M}{m}f\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

とする。関数 f は $(-\infty, 0)$ において狭義単調減少, \hat{f}^{-1} は \mathbb{R} で狭義単調増加であるから, (3.32) より, $\|\mathbf{x}_0\| < r$ ならば, すべての $t \geq t_0$ に対して,

$$\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leq \sqrt{2}\hat{f}^{-1}\left(\frac{M}{m}f\left(-\frac{\|\mathbf{x}_0\|}{\sqrt{2}}\right)\right) < \sqrt{2}\hat{f}^{-1}\left(\frac{M}{m}f\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right) = B$$

である。故に, 方程式系 (3.6) の解は一様有界である。

今, 方程式系 (3.6) の原点は一様大域的漸近安定であることが分かる。 □

Chapter 4

三次元生態系モデル

4.1 プランクトン及び小型魚類の食物連鎖網

食物連鎖による海洋生物の個体密度に関する理論的および実験的研究は、海洋科学および環境保護にとって重要なテーマとなっている ([13, 19, 29])。とりわけ、海洋生物の育成を支える植物プランクトン、動物プランクトン及び小型魚類の捕食・被食関係の研究は重要である。植物プランクトンは陸から供給される栄養素や光合成によって増殖し、動物プランクトンの被食者となっている。捕食者である動物プランクトンは小型魚類の餌でもあるので、中位捕食者と呼ばれている。また、この3種の頂点に位置する小型魚類は上位捕食者と呼ばれている。海洋生物間の食物連鎖は、この3種間相互作用に留まることなく、小型魚が大型魚に食われ、大型魚がより大きな海洋生物に捕食されるなどする複雑なシステムであると考えられる。ただし、そのような複雑な海洋生物の個体密度変化に多大な影響を及ぼしているのが、植物プランクトン・動物プランクトン・小型魚類の捕食・被食関係であるとも言える。

温帯水生生態系の調査によって、気温・水温や日照時間などにより栄養分の季節的変化が植物プランクトンの個体密度に大きな影響を与えることが明らかになってきた。そのため、本研究で対象とする植物プランクトン・動物プランクトン・小魚の個体密度変化を記述する生態系モデルに、季節的影響を考慮する。すなわち、生態系システム内の成長関数や損失関数などは一定不変ではなく、時間変化するものと仮定する。一般に、時間変化する係数には周期性を仮定して議論することが多いが、ここでは、環境の変化は不安定であると考え、これらの時間変化する係数は必ずし

も周期的であることを仮定しない。もちろん、係数が周期性を有する場合も拒むものではない。また、動物プランクトンは人間や貝など魚以外の生物によって収穫されていることも知られている。さらに、動物プランクトンは植物プランクトン以外の微生物から栄養を吸収できることも報告されている ([1, 16])。このため、これらの収穫効果や栄養補給も考慮して、

$$\begin{cases} P' = \gamma(t)P - \frac{h(t)}{K}P^2 - g(t)PZ, \\ Z' = aZ + f(t)PZ - bZF - j(t)Z, \\ F' = -cF + dZF \end{cases}$$

を考える。ただし、 P 、 Z と F はそれぞれ植物プランクトン、動物プランクトン、小型魚類の個体密度を表す。時刻 t での個体密度は $P(t)$ 、 $Z(t)$ と $F(t)$ と表し、通常は1ミリリットル当たり乾燥重量のミリグラムで測定される。そして、時刻 t の単位を日 (day) とし、 P 、 Z と F の単位を $\text{mg}\cdot\text{ml}^{-1}$ とする。すべてのパラメータ a 、 b 、 c 、 d と K は正の定数であり、すべての関数 f 、 g 、 h 、 γ と j は $[0, \infty)$ で定義されている非負の関数である。また、 a は微生物の食物連鎖網からの栄養素によって支えられている動物プランクトンの成長率、 b は動物プランクトンの魚に被食される率、 c は魚の死亡率、 d は動物プランクトンを摂食することによる魚の増殖率である。したがって、 $d < b$ と仮定するのが妥当である。さらに、 K は植物プランクトンの環境収容力である。パラメーター a と c の単位は day^{-1} 、 b と d の単位は $\text{ml}\cdot\text{mg}^{-1}\cdot\text{day}^{-1}$ 、 K の単位は $\text{mg}\cdot\text{ml}^{-1}$ である。関数 f は植物プランクトンを摂食することによる動物プランクトンの成長率、関数 g は動物プランクトンの摂食による植物プランクトンの減少率、関数 h は植物プランクトンの種内競争による植物プランクトンの密度制限率である。関数 γ は植物プランクトンの固有成長率、関数 j は人間の収穫効果と魚以外の他の海洋生物の摂取による動物プランクトンの死亡率である。関数 f と g の単位を $\text{ml}\cdot\text{mg}^{-1}\cdot\text{day}^{-1}$ とし、 h 、 γ と j の単位を day^{-1} とする。したがって、システムの両辺の単位は $\text{ml}\cdot\text{mg}^{-1}\cdot\text{day}^{-1}$ である。

通常、植物プランクトンの成長率はその個体密度と栄養摂取量によって決定され、植物プランクトン、動物プランクトン、小型魚類が捕食・被食活動することによって遣り取りされる栄養素（またはエネルギー量）には相関関係がある。そのた

め、本章では、 $\gamma(t) = h(t) + \frac{c}{d}g(t)$ と $j(t) = Kf(t)$ であることを仮定し

$$\begin{cases} P' = \left(h(t) + \frac{c}{d}g(t)\right)P - \frac{h(t)}{K}P^2 - g(t)PZ, \\ Z' = aZ + f(t)PZ - bZF - Kf(t)Z, \\ F' = -cF + dZF. \end{cases} \quad (C)$$

を研究対象とする。生態系モデルであるため、モデル (C) を

$$O = \{(P, Z, F) \in \mathbb{R}^3 : P > 0, Z > 0, F > 0\}$$

で考えればよい。

任意の関数 $q: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、

$$q_-(t) = \max\{0, -q(t)\}, \quad q_+(t) = \max\{0, q(t)\}$$

とする。生物学において、比率 f/g は植物プランクトンの個体から動物プランクトンの個体への変換率を意味する。よって、すべての $t \geq 0$ に対して $f(t) \leq g(t)$ を仮定する。この比率は $[0, \infty)$ で微分可能と仮定する。関数 $\ell: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\ell(t) = \left(\ln \frac{f(t)}{g(t)}\right)'$$

と定義する。

Theorem 4.1. 正の \underline{f} , \bar{g} と \bar{h} が存在して、すべて $t \geq 0$ に対して、

$$\underline{f} \leq f(t) \leq g(t) \leq \bar{g}, \quad 0 \leq h(t) \leq \bar{h} \quad (4.1)$$

が満たされる。もし

$$\int_0^\infty \ell_+(t) dt < \infty \quad (4.2)$$

と

$$h \in \mathcal{F}_{[\text{WIP}]} \quad (4.3)$$

が成り立つならば、モデル (C) の内部平衡点 $\mathbf{x}^* = (K, c/d, a/b)$ が一様安定かつ大域吸収的である。

条件 (4.1) より,

$$k_1 \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq k_2 \quad \text{for } t \geq 0 \quad (4.4)$$

になるような k_1 と k_2 が存在する. ただし, $k_1 \geq \underline{f}/\bar{g}$, $k_2 \leq 1$ である. 関数 $\psi_\rho : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\psi_\rho(t) = \ell(t) - \frac{(1 - e^{-\rho})^2}{\rho - 1 + e^{-\rho}} h(t)$$

と定義して, ここの $\rho > 0$ は任意の定数である. もし

$$\int_0^\infty (\psi_\rho)_+(t) dt < \infty \quad (4.5)$$

はある $\rho > 0$ に対して成り立つならば,

$$0 \leq \int_0^\infty (\psi_\rho)_+(t) dt \leq L$$

になるような $L \geq 0$ が見つかる.

すでに節 3.3 で紹介した関数 f と g を再び利用したいが, モデル (C) の関数と間違いないように, ここからは Φ と ϕ

$$\Phi(w) = w - 1 + e^{-w}, \quad \phi(w) = 1 - e^{-w}$$

より表す. もちろん, 条件 (3.7)~(3.11) も成り立つから, それなりに書き換えられる. 任意の $\rho > 0$ に対して, ρ_0 を

$$\Phi(-\rho_0) = \frac{m}{M} e^{-L} \Phi(\rho)$$

になるような正数とする. ただし,

$$m = \min \left\{ \frac{a}{dK}, \frac{c}{dK}, k_1 \right\}, \quad M = \max \left\{ \frac{a}{dK}, \frac{c}{dK}, k_2 \right\}$$

である. 関数 $\Phi(\rho)$ が $\rho \geq 0$ において狭義単調増加, $\rho \leq 0$ において狭義単調減少であるから, ρ が ∞ になる場合 ρ_0 も ∞ になることがわかる. 次に, モデル (C) の内部平衡点 $\mathbf{x}^* = (K, c/d, a/b)$ が同程度漸近安定になるための条件を与える.

Theorem 4.2. 条件 (4.1) が満たされるとする. 条件 (4.5) と

$$(\psi_\rho)_- \in \mathcal{F}_{[\text{WIP}]}. \quad (4.6)$$

が満たされるような $\rho > 0$ が存在すれば, モデル (C) の内部平衡点 $\mathbf{x}^* = (K, c/d, a/b)$ が

$$S_{\rho_0} = \left\{ (P, Z, F) \in \mathbb{R}^3 : \left(\ln \frac{P}{K} \right)^2 + \left(\ln \frac{dZ}{c} \right)^2 + \left(\ln \frac{bF}{a} \right)^2 < \rho_0^2 \right\}$$

において, 一様安定かつ同程度吸収的である.

4.2 変数変換と相平面解析

変数変換

$$x = -\ln(bF/a), \quad y = -\ln(dZ/c), \quad z = -\ln(P/K)$$

を行い, モデル (C) を三次元非線形微分方程式系

$$\begin{cases} x' = c(1 - e^{-y}), \\ y' = -a(1 - e^{-x}) + Kf(t)(1 - e^{-z}), \\ z' = -\frac{c}{d}g(t)(1 - e^{-y}) - h(t)(1 - e^{-z}). \end{cases} \quad (4.7)$$

に書き換える. この変数変換により, モデル (C) の第一象限 O が方程式系 (4.7) の全空間 \mathbb{R}^3 へ一対一に変換される. モデル (C) の内部平衡点 $(K, c/d, a/b)$ は方程式系 (4.7) の原点 $(0, 0, 0)$ に移され, 空間 S_{ρ_0} は球体領域

$$B_{\rho_0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < \rho_0^2\}$$

に対応する. モデル (C) の内部平衡点 $(K, c/d, a/b)$ の性質を調べることで, (4.7) の原点 $(0, 0, 0)$ について考察すればよいと考え, Theorem 4.1 と Theorem 4.2 を以下のように書き換える.

Proposition 4.3. 条件 (4.1)–(4.3) が満たされるとする。したがって、(4.7) の原点 $(0, 0, 0)$ が一様安定かつ大域吸取的である。

Proposition 4.4. 条件 (4.1), (4.5) と (4.6) を満たすならば、(4.7) の原点 $(0, 0, 0)$ が B_{ρ_0} において、一様安定かつ同程度吸取的である。

次に、Proposition 4.3 と Proposition 4.4 の関係を示す。まず、 $w \neq 0$ の場合の $\phi^2(w)/\Phi(w)$ を考察する。

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{\phi^2(w)}{\Phi(w)} = 0 \quad \text{と} \quad \lim_{w \rightarrow -\infty} \frac{\phi^2(w)}{\Phi(w)} = \infty$$

のことは明らかである。ロピタルの定理 (L'Hôpital's rule) を使って

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\phi^2(w)}{\Phi(w)} = \lim_{w \rightarrow 0} 2\phi'(w) = 2$$

を得る。関数 ϕ^2/Φ が非負かつ狭義単調減少である。実際は、 $w \neq 0$ での導関数は

$$\begin{aligned} \frac{d(\phi^2(w)/\Phi(w))}{dw} &= \frac{\phi(w)}{\Phi^2(w)} (-1 + 2we^{-w} + e^{-2w}) \\ &= \frac{\phi(w) e^{-w}}{\Phi^2(w)} (-e^w + 2w + e^{-w}) \\ &= -\frac{\phi(w) e^{-w}}{\Phi^2(w)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2w^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) < 0 \end{aligned}$$

であるから、次の関係

$$\frac{\phi^2(w)}{\Phi(w)} > \frac{\phi^2(\rho)}{\Phi(\rho)} \quad \text{for } |w| < \rho \quad (4.8)$$

がわかる。関数 $\psi_\rho(t)$ を

$$\psi_\rho(t) = \ell(t) - \frac{\phi^2(\rho)}{\Phi(\rho)} h(t)$$

ように書き換える。関数 ϕ^2/Φ の性質と関数 h の非負性により、 $0 < \rho_1 < \rho_2$ を満たすような任意の ρ_1 と ρ_2 に対して、

$$(\psi_{\rho_1})_+(t) \leq (\psi_{\rho_2})_+(t) \leq \ell_+(t)$$

が分かる。したがって、条件 (4.2) が成立ならば、任意の $\rho > 0$ に対して、条件 (4.5)

も成り立つ.

条件 (4.1) を前提として, 条件 (4.2) から

$$\int_0^\infty \ell_-(t) dt < \infty$$

を導くことができる. 実際は,

$$\int_0^\infty \ell_+(t) dt < \infty \quad \text{と} \quad \int_0^\infty \ell_-(t) dt = \infty$$

であれば,

$$\int_0^\infty \ell(t) dt = \int_0^\infty (\ell_+(t) - \ell_-(t)) dt = -\infty$$

になる. しかし,

$$\int_0^t \ell(s) ds = \ln \frac{f(t)}{g(t)} - \ln \frac{f(0)}{g(0)} = \ln \frac{g(0)f(t)}{f(0)g(t)}$$

であるから, 条件 (4.1) より, $\ln \frac{g(0)f(t)}{f(0)g(t)}$ は t とともに $-\infty$ に発散しないことがわかる. 矛盾が生じる.

また, $t \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{\phi^2(\rho)}{\Phi(\rho)} h(t) - \ell_+(t) &\leq \frac{\phi^2(\rho)}{\Phi(\rho)} h(t) - \ell_+(t) + \ell_-(t) = -\psi_\rho(t) \\ &\leq (\psi_\rho)_-(t) \leq \frac{\phi^2(\rho)}{\Phi(\rho)} h(t) + \ell_-(t) \end{aligned}$$

である. 故に, (4.1) と (4.2) が成立ならば, $h \in [\text{WIP}]$ と $(\psi_\rho)_- \in [\text{WIP}]$ が同値である. したがって, (4.3) が成立する場合にのみ, すべての $\rho > 0$ に対して, (4.6) が成り立つ.

さらに,

$$\bigcup_{\rho_0 > 0} B_{\rho_0} = \mathbb{R}^3$$

ということは明らかである. したがって, (4.1), (4.2) と (4.3) が成り立つならば, (4.7) の原点 $(0, 0, 0)$ が大域同程度吸収的である. もちろん, (4.7) の原点 $(0, 0, 0)$ が大域吸収的でもある. Proposition 4.3 を Proposition 4.4 の特別な場合と見てもよい

ため, Proposition 4.4 の証明のみを与える.

連続的微分可能かつ狭義単調減少な関数 $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ と $\beta: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ を

$$\alpha(w) = \begin{cases} \frac{\Phi(w)}{w^2} & \text{if } w \neq 0, \\ 1/2 & \text{if } w = 0 \end{cases} \quad \text{と} \quad \beta(w) = \begin{cases} \frac{\phi(w)}{w} & \text{if } w \neq 0, \\ 1 & \text{if } w = 0. \end{cases}$$

のように定義する. 実際は, ロピタルの定理を用いて,

$$\lim_{w \rightarrow 0} \alpha(w) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \lim_{w \rightarrow 0} \beta(w) = 1$$

がわかる. また, $w \neq 0$ のとき

$$\alpha'(w) = \frac{w\phi(w) - 2\Phi(w)}{w^3} \quad \text{and} \quad \beta'(w) = \frac{w\phi'(w) - \phi(w)}{w^2}$$

である. よって,

$$\alpha'(w) = \begin{cases} -\frac{e^{-w}}{w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n w^n}{(n+2)!} < 0 & \text{if } w \geq 0, \\ \frac{1}{w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (-w)^n}{(n+2)!} < 0 & \text{if } w < 0 \end{cases}$$

と

$$\beta'(w) = \begin{cases} -\frac{e^{-w}}{w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{(n+1)!} < 0 & \text{if } w \geq 0, \\ \frac{1}{w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (-w)^n}{(n+1)!} < 0 & \text{if } w < 0 \end{cases}$$

である. したがって,

$$\alpha(\varepsilon)w^2 \leq \Phi(w) \leq \alpha(-\varepsilon)w^2 \quad \text{for } w \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad (4.9)$$

と

$$\beta(\rho)w^2 \leq w\phi(w) \leq \beta(-\rho)w^2 \quad \text{for } w \in (-\rho, \rho) \quad (4.10)$$

が得られる.

4.3 主結果の証明

Proposition 4.2 の証明

一様安定性の証明

任意の $0 < \varepsilon \leq \rho$ に対して,

$$\Phi(-\delta(\varepsilon)) = \frac{m}{M} e^{-L} \Phi(\varepsilon)$$

とする. ただし, m , M と L は章 4.1 で定義した定数である. また, $m \leq M$, $L \geq 0$,

$$\Phi(-\varepsilon) - \Phi(\varepsilon) = -2\varepsilon + e^\varepsilon - e^{-\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0$$

であるから,

$$\Phi(-\delta(\varepsilon)) < \Phi(\varepsilon) < \Phi(-\varepsilon)$$

が分かる. 関数 Φ は $(-\infty, 0]$ において狭義単調減少であるから, $\delta(\varepsilon) < \varepsilon$ は明らかである.

背理法を用いるため, $\|\mathbf{x}(t_1)\| = \varepsilon$ と

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)} < \varepsilon \quad \text{for } t_0 \leq t < t_1. \quad (4.11)$$

になるような $t_1 > t_0$ が存在すると仮定する. 関数 $v: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ を

$$v(t) = \frac{a}{dK} \Phi(x(t)) + \frac{c}{dK} \Phi(y(t)) + \frac{f(t)}{g(t)} \Phi(z(t))$$

のように定義する. 条件 (4.4), (4.9) と (4.11) から, $t_0 \leq t \leq t_1$ において

$$\begin{aligned} m\alpha(\varepsilon)\|\mathbf{x}(t)\|^2 &\leq m\left(\Phi(x(t)) + \Phi(y(t)) + \Phi(z(t))\right) \\ &\leq v(t) \leq M\left(\Phi(x(t)) + \Phi(y(t)) + \Phi(z(t))\right) \\ &\leq M\alpha(-\varepsilon)\|\mathbf{x}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

が成り立つ。関数 v の導関数が

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{a}{dK} \phi(x(t))x'(t) + \frac{c}{dK} \phi(y(t))y'(t) + \left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' \Phi(z(t)) + \frac{f(t)}{g(t)} \phi(z(t))z'(t) \\ &= \left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' \Phi(z(t)) - \frac{f(t)h(t)}{g(t)} \phi^2(z(t)) \end{aligned}$$

である。条件 (4.8) と (4.11) から、 $t_0 \leq t \leq t_1$ において

$$\begin{aligned} v'(t) &< \left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' \Phi(z(t)) - \frac{\phi^2(\rho)}{\Phi(\rho)} \frac{f(t)h(t)}{g(t)} \Phi(z(t)) \\ &= \left\{ \left(\ln \frac{f(t)}{g(t)}\right)' - \frac{\phi^2(\rho)}{\Phi(\rho)} h(t) \right\} \frac{f(t)}{g(t)} \Phi(z(t)) \\ &= \psi_\rho(t) \frac{f(t)}{g(t)} \Phi(z(t)) \leq (\psi_\rho)_+(t) \frac{f(t)}{g(t)} \Phi(z(t)) \leq (\psi_\rho)_+(t) v(t) \end{aligned}$$

が満たされる。また、(4.5) と (4.12) を加えて、 $t_0 \leq t < t_1$ において、

$$v(t_0) \leq M \left(\Phi(x(t_0)) + \Phi(y(t_0)) + \Phi(z(t_0)) \right) \leq M\alpha(-\delta) \|\mathbf{x}_0\|^2 e^L$$

と

$$\begin{aligned} m\alpha(\varepsilon) \|\mathbf{x}(t)\|^2 &\leq v(t) \leq v(t_0) e^L \leq M\alpha(-\delta) \|\mathbf{x}_0\|^2 e^L \\ &< M \frac{\Phi(-\delta)}{\delta^2} \delta^2 e^L = M\Phi(-\delta) e^L \\ &= m\Phi(\varepsilon) = m\alpha(\varepsilon) \varepsilon^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、 $t_0 \leq t \leq t_1$ において $\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$ である。しかし、これは $\|\mathbf{x}(t_1)\| = \varepsilon$ と矛盾するから、

$$\|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{for } t \geq t_0$$

を導く。すなわち、(4.7) の原点が一様安定になる。

領域 B_{ρ_0} での同程度収束性の証明

関数 $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|$ が $t \rightarrow \infty$ と共に零に収束することを示す。

すでに説明したように、 $\mathbf{x}_0 \in B_{\rho_0}$ であれば、すべての $t \geq t_0$ に対して、 $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \in B_\rho$ である。ただし、

$$B_\rho = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < \rho^2\}$$

である。一様安定性の証明のように、 $t \geq t_0$ に対して、

$$m\alpha(\rho)\|\mathbf{x}(t)\|^2 \leq v(t) \leq M\alpha(-\rho)\|\mathbf{x}(t)\|^2 \quad (4.13)$$

と

$$v'(t) < \psi_\rho(t) \frac{f(t)}{g(t)} \Phi(z(t)) \leq (\psi_\rho)_+(t)v(t) \quad (4.14)$$

が得られる。条件 (4.5) と (4.14) より、 $t \geq t_0$ に対して、 $v(t) < v(t_0)e^L$ である。したがって、

$$v'(t) < v(t_0)e^L(\psi_\rho)_+(t) \quad \text{for } t \geq t_0$$

である。この不等式の右辺は非負であるから、

$$(v')_+(t) \leq v(t_0)e^L(\psi_\rho)_+(t) \quad \text{for } t \geq t_0$$

がわかる。これを t_0 から ∞ まで積分して、条件 (4.5) を使って、

$$\int_{t_0}^{\infty} (v')_+(t) dt \leq v(t_0)e^L L < \infty$$

を得る。一方、 $v(t) \geq 0$ であるため、

$$\int_{t_0}^{\infty} (v')_-(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} (v')_+(t) dt - \int_{t_0}^{\infty} v'(t) dt < \infty$$

を得る。したがって、

$$\int_{t_0}^{\infty} |v'(t)| dt = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ (v')_+(t) + (v')_-(t) \right\} dt < \infty$$

がわかる。即ち、 v' は $[t_0, \infty)$ で絶対可積分 (absolutely integrable) である。したがって、関数 v は極限值 $v^* \geq 0$ をもつ。

もし $v^* = 0$ であれば、(4.13) より、 $\|\mathbf{x}(t)\|$ は原点に収束することがわかる。だから、 $v^* > 0$ の場合が起こらないことを示せばよい。

背理法を用いるため、 v^* が正であると仮定する。よって、

$$0 < \frac{1}{2}v^* < v(t) < \frac{3}{2}v^* \quad \text{for } t \geq T. \quad (4.15)$$

になるような $T \geq t_0$ が存在する. すべての $t \geq T$ に対して,

$$u(t) = \frac{f(t)}{g(t)} \Phi(z(t))$$

と定義する. 関数 u は関数 v より大きくないから, $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t)$ と $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t)$ が存在する. 次に, $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ と $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ を示す.

先に $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) > 0$ と仮定する. よって, $t \geq T_1$ に対して $u(t) > \varepsilon_1$ になる $\varepsilon_1 > 0$ と $T_1 \geq T$ が存在する. 条件 (4.14) と (4.15) を使って,

$$\begin{aligned} v'(t) &< \psi_\rho(t)u(t) = (\psi_\rho)_+(t)u(t) - (\psi_\rho)_-(t)u(t) \\ &\leq (\psi_\rho)_+(t)v(t) - (\psi_\rho)_-(t)u(t) < \frac{3}{2}v^*(\psi_\rho)_+(t) - \varepsilon_1(\psi_\rho)_-(t) \end{aligned}$$

を得る. したがって, (4.15) より

$$\begin{aligned} -\infty &< \frac{1}{2}v^* - v(T_1) \leq v(t) - v(T_1) = \int_{T_1}^t v'(s) ds \\ &\leq \frac{3}{2}v^* \int_{T_1}^t (\psi_\rho)_+(s) ds - \varepsilon_1 \int_{T_1}^t (\psi_\rho)_-(s) ds \end{aligned}$$

は $t \geq T_1$ に対して成り立つ. これは (4.6) と矛盾するから, $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ になる.

次に $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) > 0$ と仮定する.

$$0 < \varepsilon_2 < \min \left\{ \sqrt{v^*}/2, \lambda/2 \right\}$$

と

$$\begin{aligned} &-\sqrt{\frac{2M\alpha(-\rho)}{v^* - 4\varepsilon_2}} \phi \left(-\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} \right) \\ &\leq \beta(\rho) \min \left\{ \frac{dm}{2\bar{g}}, \frac{cf}{\sqrt{2}d\bar{h}} - \frac{3d^2mMK^2\beta(-\rho)}{\pi\omega\bar{h}} \sqrt{\frac{4M\alpha(-\rho)\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)(v^* - 4\varepsilon_2)}} \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

を満たすような十分小さな ε_2 が存在する. 実際は, ε_2 は 0 に収束するとき, (4.16) の右辺はある正数, (4.16) の左辺は 0 に収束する.

すでに $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ がわかったから, $x(T_2) < \varepsilon_2$ になるような $T_2 \geq T_1$ が

見つかる。また、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lambda > 2\varepsilon_2$ の仮定より、関数 u はときに $2\varepsilon_2$ を超えることがわかる。時刻

$$s_1 = \inf \{t > T_2 : u(t) \geq 2\varepsilon_2\}$$

を定義する。明らかに、 $u(s_1) = 2\varepsilon_2$ 、関数 u は時刻 s_1 まで $2\varepsilon_2$ にならない。したがって、 $T_2 < s_1$ と $x(T_2) < \varepsilon_2$ であるから、集合 $\{t < s_1 : u(t) \leq \varepsilon_2\}$ は空集合ではない。時刻

$$\tau_1 = \sup \{t < s_1 : u(t) \leq \varepsilon_2\}$$

を定義する。よって、 $u(\tau_1) = \varepsilon_2$ 、区間 (τ_1, s_1) において $\varepsilon_2 < u(t) < 2\varepsilon_2$ である。また、 $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ であるから、関数 u が ε_2 より小さくなる時刻はある。よって、

$$\sigma_1 = \inf \{t > s_1 : u(t) < \varepsilon_2\}$$

を選ぶ。したがって、 $u(\sigma_1) = \varepsilon_2$ 、区間 (τ_1, σ_1) において $u(t) \geq \varepsilon_2$ である。同様に、

$$s_2 = \inf \{t > \sigma_1 : u(t) \geq 2\varepsilon_2\},$$

$$\tau_2 = \sup \{t < s_2 : u(t) \leq \varepsilon_2\},$$

$$\sigma_2 = \inf \{t > s_2 : u(t) < \varepsilon_2\}$$

を選ぶ。したがって、 $u(s_2) = 2\varepsilon_2$ 、 $u(\tau_2) = u(\sigma_2) = \varepsilon_2$ 、 $\sigma_1 < t < \tau_2$ において $u(t) < 2\varepsilon_2$ 、 $\tau_2 < t < s_2$ において $\varepsilon_2 < u(t) < 2\varepsilon_2$ である。この過程を繰り返すと、 $T_2 < \tau_n < s_n < \sigma_n \leq \tau_{n+1}$ 、 $u(s_n) = 2\varepsilon_2$ 、 $u(\tau_n) = u(\sigma_n) = \varepsilon_2$ 、

$$\varepsilon_2 < u(t) < 2\varepsilon_2 \quad \text{for } \tau_n < t < s_n, \tag{4.17}$$

$$u(t) \geq \varepsilon_2 \quad \text{for } \tau_n < t < \sigma_n, \tag{4.18}$$

$$u(t) < 2\varepsilon_2 \quad \text{for } \sigma_n < t < \tau_{n+1} \tag{4.19}$$

のような三つの発散数列 $\{s_n\}$ 、 $\{\tau_n\}$ と $\{\sigma_n\}$ が得られる。

関数 α は \mathbb{R} において狭義単調減少、 $t \geq t_0$ において $|z(t)| \leq \|x(t)\| < \rho$ であ

るため、 $t \geq t_0$ に対して、 $\Phi(z(t)) = \alpha(z(t))z^2(t) \geq \alpha(\rho)z^2(t)$ である。したがって、(4.4) より、

$$u(t) = \frac{f(t)}{g(t)}\Phi(z(t)) \geq k_1\Phi(z(t)) \geq k_1\alpha(\rho)z^2(t) \quad \text{for } t \geq t_0$$

である。さらに、(4.19) を加えて、

$$|z(t)| \leq \sqrt{\frac{u(t)}{k_1\alpha(\rho)}} \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} \quad \text{for } \sigma_n \leq t \leq \tau_{n+1} \quad (4.20)$$

が得られる。

極座標変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

を行い、方程式 (4.7) を

$$\begin{cases} r' = c\phi(y)\cos\theta - a\phi(x)\sin\theta + Kf(t)\phi(z)\sin\theta, \\ \theta' = \frac{Kf(t)\phi(z)}{r}\cos\theta - \frac{1}{r^2}(ax\phi(x) + cy\phi(y)), \\ z' = -\frac{c}{d}g(t)\phi(y) - h(t)\phi(z). \end{cases} \quad (4.21)$$

に書き換える。 $(r(\cdot), \theta(\cdot), z(\cdot))$ を $\mathbf{x}(\cdot)$ に対応する方程式系 (4.21) の解とする。すべての $t \geq t_0$ に対して、 $|x(t)| \leq \|\mathbf{x}(t)\| < \rho$ 、 $|y(t)| \leq \|\mathbf{x}(t)\| < \rho$ であるから、(4.9) より、

$$\Phi(x(t)) \leq \alpha(-\rho)x^2(t), \quad \Phi(y(t)) \leq \alpha(-\rho)y^2(t)$$

がわかる。したがって、(4.15) と (4.19) より、 $\sigma_n \leq t \leq \tau_{n+1}$ において、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v^* - 2\varepsilon_2 < v(t) - u(t) &= \frac{a}{dK}\Phi(x(t)) + \frac{c}{dK}\Phi(y(t)) \\ &\leq M\alpha(-\rho)(x^2(t) + y^2(t)) = M\alpha(-\rho)r(t) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\sqrt{\frac{v^* - 4\varepsilon_2}{2M\alpha(-\rho)}} < r(t) \leq \|\mathbf{x}(t)\| < \rho \quad \text{for } \sigma_n \leq t \leq \tau_{n+1} \quad (4.22)$$

を得る。条件 (4.20) と (4.22) から、 $\sigma_n \leq t \leq \tau_{n+1}$ のとき、 $(r(t), \theta(t), z(t))$ は直方体

$$R = \left\{ (r, \theta, z) : \sqrt{\frac{v^* - 4\varepsilon_2}{2M\alpha(-\varepsilon)}} < r < \rho, -\pi < \theta < \pi \text{ and } |z| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} \right\}$$

にある。条件 (4.10) より、 $t \geq t_0$ に対して

$$a\beta(\rho)x^2(t) + c\beta(\rho)y^2(t) \leq ax(t)\phi(x(t)) + cy(t)\phi(y(t)) \leq a\beta(-\rho)x^2(t) + c\beta(-\rho)y^2(t)$$

が導かれる。また、

$$m = \min \left\{ \frac{a}{dK}, \frac{c}{dK}, k_1 \right\}, \quad M = \max \left\{ \frac{a}{dK}, \frac{c}{dK}, k_2 \right\}$$

であるから、 $t \geq t_0$ に対して

$$dmK\beta(\rho)(x^2(t) + y^2(t)) \leq ax(t)\phi(x(t)) + cy(t)\phi(y(t)) \leq dMK\beta(-\rho)(x^2(t) + y^2(t))$$

である。したがって、(4.1), (4.21) と (4.22) より、 $\sigma_n \leq t \leq \tau_{n+1}$ において、

$$\begin{aligned} -K\bar{g}\sqrt{\frac{2M\alpha(-\rho)}{v^* - 4\varepsilon_2}}|\phi(z(t))| - dMK\beta(-\rho) &< -\frac{Kf(t)|\phi(z(t))|}{r(t)} - dMK\beta(-\rho) \\ &\leq \theta'(t) \leq \frac{Kf(t)|\phi(z(t))|}{r(t)} - dmK\beta(\rho) \\ &< K\bar{g}\sqrt{\frac{2M\alpha(-\rho)}{v^* - 4\varepsilon_2}}|\phi(z(t))| - dmK\beta(\rho) \end{aligned}$$

である。よって、(4.20) から、 $\sigma_n \leq t \leq \tau_{n+1}$ において

$$-\omega - dMK\beta(-\rho) < \theta'(t) < \omega - dmK\beta(\rho) \quad (4.23)$$

である。ただし、

$$\omega = -K\bar{g}\sqrt{\frac{2M\alpha(-\rho)}{v^* - 4\varepsilon_2}}\phi\left(-\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}}\right) > 0$$

である。関数 β は狭義単調減少であるから、(4.16) より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}dmK\beta(\rho) &\leq dmK\beta(\rho) - \omega < dmK\beta(\rho) \\ &< dMK\beta(-\rho) < \omega + dMK\beta(-\rho) \\ &\leq \frac{1}{2}dmK\beta(\rho) + dMK\beta(-\rho) < \frac{3}{2}dMK\beta(-\rho) \end{aligned} \quad (4.24)$$

を判断できる。

長方形 Ω を

$$\Omega = \left\{ (r, \theta) : \sqrt{\frac{v^* - 4\varepsilon_2}{2M\alpha(-\rho)}} < r < \rho, \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\omega}{dmK\beta(\rho)}\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\omega}{dmK\beta(\rho)}\right) \right\}$$

と定義する。長方形 Ω は (x, y) 平面のある扇形に対応する。条件 (4.16) より、

$$\frac{1}{4}\pi < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\omega}{dmK\beta(\rho)}\right) < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\omega}{dmK\beta(\rho)}\right) < \frac{3}{4}\pi \quad (4.25)$$

となるから、この扇形の中心角は $\pi/2$ より小さいことがわかる。次に、

$$\tau_{n+1} - \sigma_n \leq \frac{2\pi}{dmK\beta(\rho) - \omega} \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \quad (4.26)$$

を示す。もしそうでなければ、 $\tau_{n_0+1} - \sigma_{n_0} > 2\pi/(dmK\beta(\rho) - \omega)$ になるような $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在する。組 $(r(t), \theta(t))$ の挙動を詳細に考察する。すでに説明したように、 $\sigma_{n_0} \leq t \leq \tau_{n_0+1}$ において、 $(r(t), \theta(t))$ は長方形 R の射影である長方形

$$\Lambda = \left\{ (r, \theta) : \sqrt{\frac{v^* - 4\varepsilon_2}{2M\alpha(-\rho)}} < r < \rho, -\pi < \theta < \pi \right\} \supset \Omega \pmod{2\pi}$$

にある。条件 (4.16) と (4.23) から、 $(r(t), \theta(t))$ は時計回りに回転することがわかる。

式 (4.23) を σ_{n_0} から τ_{n_0+1} まで積分して,

$$\theta(\sigma_{n_0}) - \theta(\tau_{n_0+1}) = - \int_{\sigma_{n_0}}^{\tau_{n_0+1}} \theta'(t) dt > (dmK\beta(\rho) - \omega)(\tau_{n_0+1} - \sigma_{n_0}) > 2\pi$$

を得る. 故に, $(r(t), \theta(t))$ は長方形 Ω にとどまらない. したがって, $\sigma_{n_0} \leq t_2 < t_3 \leq \tau_{n_0+1}$,

$$\theta(t_2) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{\omega}{dmK\beta(\rho)} \right) \quad \text{and} \quad \theta(t_3) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\omega}{dmK\beta(\rho)} \right),$$

$$(r(t), \theta(t)) \in \Omega \quad \text{for } t_2 < t < t_3 \quad (4.27)$$

を満たすような定数 t_2 と t_3 が見つかる. 条件 (4.23) と (4.24) より,

$$\theta(t_2) - \theta(t_3) < (\omega + dMK\beta(-\rho))(t_3 - t_2) < \frac{3}{2}dMK\beta(-\rho)(t_3 - t_2)$$

が得られる. よって,

$$t_3 - t_2 > \frac{2(\theta(t_2) - \theta(t_3))}{3dMK\beta(-\rho)} = \frac{2\pi\omega}{3d^2mMK^2\beta(\rho)\beta(-\rho)} \quad (4.28)$$

である. また, (4.25) と (4.27) から, $t_2 \leq t \leq t_3$ において

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |r(t)| |\sin \theta(t)| > \sqrt{\frac{v^* - 4\varepsilon_2}{2M\alpha(-\rho)}} \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\omega}{dmK\beta(\rho)} \right) \right) \\ &> \sqrt{\frac{v^* - 4\varepsilon_2}{2M\alpha(-\rho)}} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{v^* - 4\varepsilon_2}{4M\alpha(-\rho)}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

である. 方程式系 (4.7) の三番目の方程式について, $t \geq t_0$ において

$$|z'(t)| \geq \frac{c}{d}g(t)|\phi(y(t))| - h(t)|\phi(z(t))| = \frac{c}{d}g(t) \left| \frac{\phi(y(t))}{y(t)} \right| |\phi(y(t))| - h(t)|\phi(z(t))|$$

である. さらに, (4.1) と (4.10) より,

$$|z'(t)| \geq \frac{c}{d}\underline{f}\beta(\rho)|y(t)| - \bar{h}|\phi(z(t))| \quad \text{for } t_2 \leq t \leq t_3$$

が得られる。条件 (4.16), (4.20) と (4.29) を加えて, $t_2 \leq t \leq t_3$ において

$$\begin{aligned} |z'(t)| &> \frac{c}{d^-} f \beta(\rho) \sqrt{\frac{v^* - 4\varepsilon_2}{4M\alpha(-\rho)}} + \bar{h} \phi \left(-\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} \right) \\ &\geq \frac{3d^2 m M K^2 \beta(\rho) \beta(-\rho)}{\pi \omega} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} > 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

が成り立つ。導関数 $z'(\cdot)$ は $[t_0, \infty)$ において連続であるから, 区間 $[t_2, t_3]$ では符号は変わらない。即ち,

$$\left| \int_{t_2}^{t_3} z'(t) dt \right| = \int_{t_2}^{t_3} |z'(s)| ds$$

である。したがって, (4.20), (4.28) と (4.30) より,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} &\geq |z(t_2)| + |z(t_3)| \geq \int_{t_2}^{t_3} |z'(t)| dt \\ &> \left(\frac{3d^2 m M K^2 \beta(\rho) \beta(-\rho)}{\pi \omega} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} \right) (t_3 - t_2) > 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}}. \end{aligned}$$

を得る。矛盾が生じるから, (4.26) が成り立つ。

また, (4.14), (4.15) と上の方法を使って, $t \geq T_2$ において,

$$v'(t) < \psi_\rho(t)u(t) \leq (\psi_\rho)_+(t)v(t) - (\psi_\rho)_-(t)u(t) < \frac{3}{2}v^*(\psi_\rho)_+(t) - (\psi_\rho)_-(t)u(t)$$

がわかる。条件 (4.15) と (4.18) から, $t \geq T_2$ において

$$\begin{aligned} -\infty &< \frac{1}{2}v^* - v(T_2) < v(t) - v(T_2) = \int_{T_2}^t v'(s) ds \\ &< \frac{3}{2}v^* \int_{T_2}^t (\psi_\rho)_+(s) ds - \int_{T_2}^t (\psi_\rho)_-(s) ds \\ &\leq \frac{3}{2}v^* \int_{T_2}^t (\psi_\rho)_+(s) ds - \varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\sigma_n} (\psi_\rho)_-(s) ds \end{aligned}$$

である。もし $\liminf_{t \rightarrow \infty} (\sigma_n - \tau_n) > 0$ であれば, (4.5), (4.6) と (4.26) より,

$$\frac{3}{2}v^* \int_{T_2}^t (\psi_\rho)_+(s) ds - \varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\sigma_n} (\psi_\rho)_-(s) ds \rightarrow -\infty \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

を得るが、矛盾になる。したがって、 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (\sigma_n - \tau_n) = 0$ である。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $[\tau_n, s_n] \subset [\tau_n, \sigma_n]$ の故に、

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (s_n - \tau_n) = 0 \quad (4.31)$$

である。また、 $|y(t)| < \rho$ と $|z(t)| < \rho$ であるため、 $t \geq t_0$ に対して、

$$\begin{aligned} u'(t) &= \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right)' \Phi(z(t)) + \frac{f(t)}{g(t)} \phi(z(t)) z'(t) \\ &= \left(\frac{f(t)}{g(t)} \right)' \Phi(z(t)) - \frac{f(t)h(t)}{g(t)} \phi^2(z(t)) - \frac{c}{d} f(t) \phi(y(t)) \phi(z(t)) \\ &= v'(t) - \frac{c}{d} f(t) \phi(y(t)) \phi(z(t)) \leq |v'(t)| + \frac{c\bar{g}}{d} \phi^2(-\rho) \end{aligned}$$

を判断できる。この不等式を τ_n から s_n まで積分して、

$$\varepsilon_2 = u(s_n) - u(\tau_n) \leq \int_{\tau_n}^{s_n} |v'(t)| dt + \frac{c\bar{g}}{d} \phi^2(-\rho) (s_n - \tau_n)$$

を得る。しかし、(4.31) より、この不等式の右辺は $n \rightarrow \infty$ と共に零に収束する。矛盾が生じる。したがって、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ である。

要約すると、 $u(t)$ は $t \rightarrow \infty$ と共に零に収束する。よって、

$$u(t) < 2\varepsilon_2 \quad \text{for } t \geq T_3$$

になるような $T_3 \geq t_0$ が存在する。条件 (4.19) の代わりにこの不等式を用いて、上述の過程を繰り返すと、

$$\begin{aligned} t_5 - t_4 &> \frac{2\pi\omega}{3d^2mMK^2\beta(\rho)\beta(-\rho)}, \\ |z'(t)| &> \frac{3d^2mMK^2\beta(\rho)\beta(-\rho)}{\pi\omega} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} > 0 \quad \text{for } t_4 \leq t \leq t_5 \end{aligned}$$

を満たすような $T_3 < t_4 < t_5$ が存在する。したがって、

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} &\geq |z(t_4)| + |z(t_5)| \geq \int_{t_4}^{t_5} |z'(t)| dt \\ &> \left\{ \frac{3d^2mMK^2\beta(\rho)\beta(-\rho)}{\pi\omega} \sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} \right\} (t_5 - t_4) > 2\sqrt{\frac{2\varepsilon_2}{k_1\alpha(\rho)}} \end{aligned}$$

になり、矛盾が生じる。故に、 $v_0 > 0$ はありえない。

したがって、方程式系 (4.7) の原点は B_{ρ_0} で同程度吸取的である。 \square

4.4 総括と具体例

本章では、動物プランクトンと微生物が組み立てた栄養リンクや、動物プランクトンの収穫効果を考慮して、時変の植物プランクトン・動物プランクトン・小魚システム (C) を考察した。方程式系 (C) の内部平衡点は大域漸近安定、同程度漸近安定であるそれぞれの定理を与えた。

Theorem 4.1 と Theorem 4.2 には関数 f , g , h の有界性を仮定した。この仮定により、植物プランクトンの固有成長率 γ と収穫効果 j が有界な関数になる。即ち、

$$\frac{c}{d}f < \gamma(t) < \bar{h} + \frac{c}{d}\bar{g} \quad \text{と} \quad K\underline{f} < j(t) < K\bar{g}$$

である。前者の場合は、植物プランクトンには増殖に必要な栄養素が供給されるが、過度の栄養素による爆発的な増殖は起こらないことを意味する。後者の場合は、魚以外の他の海洋生物や人間による動物プランクトンの摂取はあるが、過量摂取にならないことを意味する。一般的に、適切な栄養供給が生態系を持続させると考えることは妥当である。

関数

$$\ell(t) = \left(\ln \frac{f(t)}{g(t)} \right)'$$

を考える。ここの比率 f/g は植物プランクトンの個体から動物プランクトンの個体への変換率である。本章では、関数 ℓ を2つのケースに分けて考察した：(i) 関数 ℓ は絶対可積分、(ii) 関数 ℓ は絶対可積分ではない。上述のように、条件 (4.1) と (4.2)

は l が絶対可積分であることを示せる。したがって、積分

$$\int_0^t \ell(s) ds$$

は t の増加とともにある値に収束する。即ち、 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)/g(t) = C$ を満たすような定数 C が存在する。これは変換率 f/g が将来的定常状態に近づくことを意味する。条件 (4.1) と (4.2) の上で、さらに条件 (4.3) が満たされれば、Theorem 4.1 より、モデル (C) の内部平衡点は大域的漸近安定であることがわかる。一方、関数 l が絶対可積分ではない場合に、Theorem 4.1 を応用できないが、Theorem 4.2 を応用する可能性がある。条件 (4.1) の仮定の下で、(4.5) と (4.6) を満たすような正の ρ が存在すれば、モデル (C) の内部平衡点は同程度漸近安定である。

言うまでもなく、 l は同じであっても、 ρ が存在するかどうかは h に依存する。例えば、

$$f(t) = \exp\left(\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) \quad \text{と} \quad g(t) = \exp(\sin t + 1)$$

の場合を考えよう。すべての $t \geq 0$ に対して、

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \exp(\cos t - 2) < 1 \quad \text{と} \quad \ell(t) = \left(\ln \frac{f(t)}{g(t)}\right)' = -\sin t$$

である。したがって、 l は絶対可積分ではないかつ

$$\underline{f} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{e^{1+\sqrt{2}}} \leq f(t) < g(t) \leq e^2 \stackrel{\text{def}}{=} \bar{g}$$

のような関係がある。

もし $h(t) = (2+t)/(1+t)$ であれば、 \bar{h} として、2 を選ぶ。また、 $2.7 < e < 2.8$ であるから、 $\frac{\phi^2(1)}{\Phi(1)} = \frac{(e-1)^2}{e} > \frac{(2.7-1)^2}{2.8} > 1$ である。パラメーター ρ として、1 を選ぶと、

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \ell(t) - \frac{(1-e^{-1})^2}{1-1+e^{-1}} h(t) = -\sin t - \frac{\phi^2(1)}{\Phi(1)} \left(1 + \frac{1}{1+t}\right) \\ &< -\sin t - 1 - \frac{1}{1+t} \leq -\frac{1}{1+t} \end{aligned}$$

になる。すべての $t \geq 0$ に対して、 $(\psi_1)_+(t) \equiv 0$ 、 $(\psi_1)_-(t) > 1/(1+t)$ である。した

がって、 $\rho = 1$ に対して、条件 (4.5) と (4.6) は成り立つ。

もし $h(t) = 1/(1+t)$ であれば、 \bar{h} として、1 を選ぶ。任意の $\rho > 0$ に対して、 $\phi^2(\rho)/\Phi(\rho) < 2$ であるから、

$$\begin{aligned}\psi_\rho(t) &= \ell(t) - \frac{(1 - e^{-\rho})^2}{\rho - 1 + e^{-\rho}} h(t) = -\sin t - \frac{\phi^2(\rho)}{\Phi(\rho)} \frac{1}{1+t} \\ &> -\sin t - \frac{2}{1+t}\end{aligned}$$

がわかる。よって、すべての $\rho > 0$ に対して、

$$\int_0^\infty (\psi_\rho)_+(t) dt = \infty, \quad (\psi_\rho)_- \notin \mathcal{F}_{[\text{WIP}]}$$

である。この場合に、(4.5) と (4.6) が満たされるような ψ_ρ の ρ はない。関数 ℓ は絶対可積分ではない場合に、 h は [WIP] に属しても $(\psi_\rho)_-$ は [WIP] に属しない可能性がある。故に、条件 (4.2) と (4.3) の代わりに、Theorem 4.2 では条件 (4.5) と (4.6) が必要である。

次に、Theorem 4.1 と Theorem 4.2 に応じて、それぞれの例を与える。二つの例とも、モデル (C) のパラメータを $a = 0.4$, $b = 0.1$, $c = 0.3$, $d = 0.2$, $K = 3$ とする。よって、モデル (C) の内部平衡点は $(K, c/d, a/b) = (3, 3/2, 4)$ である。

Example 4.1. モデル (C) の $f(t)$, $h(t)$, $g(t)$ として、それぞれ

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right), \quad h(t) = \frac{5}{1+t}, \\ g(t) &= \frac{3+2t}{1+t} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)\end{aligned}\tag{4.32}$$

とする。Theorem 4.1 より、内部平衡点 $(K, c/d, a/b) = (3, 3/2, 4)$ は一様安定かつ大域的漸近安定である。

Example 4.1 での関数 f , g と h が正かつ有界であるから、すべての $t \geq 0$ に対して、

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{1+t}{3+2t} < \frac{1}{2}$$

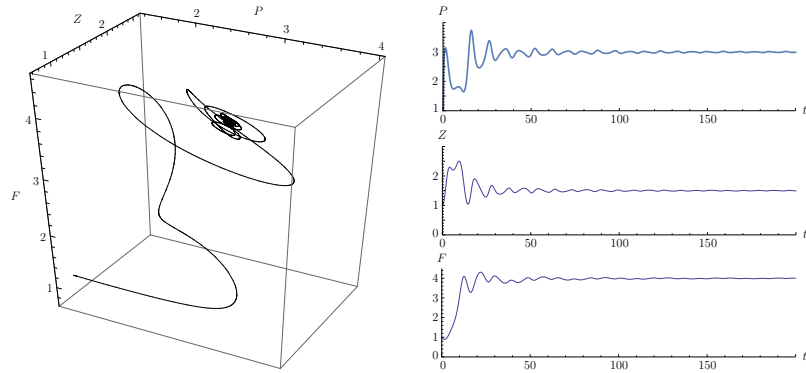
である。また、

$$\ell(t) = \left(\ln \frac{f(t)}{g(t)}\right)' = \frac{1}{(1+t)(3+2t)} > 0$$

であるから、関数 l_+ と関数 l_- は $l_+(t) \equiv \ell(t)$, $l_-(t) \equiv 0$ になる。故に、

$$\int_0^t l_+(s) ds = \ln \frac{1+t}{3+2t} < \ln \frac{1}{2} \quad \text{for } t \geq 0$$

である。関数 h は [IP] に属することが確かめられる。条件 (4.1)–(4.3) が全部満たされているため、Theorem 4.1 により、モデル (C) の内部平衡点 $(K, c/d, a/b) = (3, 3/2, 4)$ は一様安定かつ大域的漸近安定である。



左図には (4.32) の場合のモデル (C) の解曲線を描いた。この解曲線は初期時刻 $t_0 = 0$ に $(P_0, Z_0, F_0) = (1, 1, 1)$ から出発して、 t の増加と共に $(P(t), Z(t), F(t))$ は内部平衡点 $(3, 3/2, 4)$ に近づく。右の3つの図は、それぞれ P , Z と F の挙動を示した。解の成分 P , Z と F はそれぞれ 3, 3/2, 4 の上下に振動して、最終的にそれぞれ 3, 3/2, 4 に収束する。

Example 4.2. モデル (C) の $f(t)$, $h(t)$, $g(t)$ として、それぞれ

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{4} \exp \left(\sin \left(\frac{\pi t}{6} + 1 \right) \right), \\ h(t) &= \frac{3}{5}, \quad g(t) = \frac{1}{2} \exp \left(\sin \left(\frac{\pi t}{6} + \frac{3}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

とする。Theorem 4.2 より、内部平衡点 $(K, c/d, a/b) = (3, 3/2, 4)$ は S_1 において一様安定かつ同程度漸近安定である。

条件 (4.1) が満たされるような $\underline{f} = 1/(4e)$, $\bar{g} = e/2$ と $\bar{h} = 3/5$ が存在する。すべ

ての $t \geq 0$ に対して,

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{1}{2} \exp \left(\sin \left(\frac{\pi t}{6} + 1 \right) - \sin \left(\frac{\pi t}{6} + \frac{3}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \exp \left(-2 \sin \frac{1}{4} \cos \left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5}{4} \right) \right)$$

であるから,

$$0.304 < \frac{1}{2} \exp \left(-2 \sin \frac{1}{4} \right) \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{1}{2} \exp \left(2 \sin \frac{1}{4} \right) < 0.821$$

になる. よって, 式 (4.4) での k_1 と k_2 をそれぞれ $k_1 = 0.304$, $k_2 = 0.821$ とする. 故に, m と M として, それぞれ

$$m = \min \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 0.304 \right\} = 0.304, \quad M = \max \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 0.821 \right\} = 0.821$$

を選ぶ. また,

$$\ell(t) = \left(\ln \frac{f(t)}{g(t)} \right)' = \frac{\pi}{3} \sin \frac{1}{4} \sin \left(\frac{\pi t}{6} + \frac{5}{4} \right)$$

より, 関数 ℓ は周期が 12 の非自明の周期関数であることがわかる. 関数 ℓ は絶対可積分ではないため, Theorem 4.1 が適用されない. しかし, この例には Theorem 4.2 が適用される. 例えば, $\rho = 3$ を選んで, すべての $t \geq 0$ に対して,

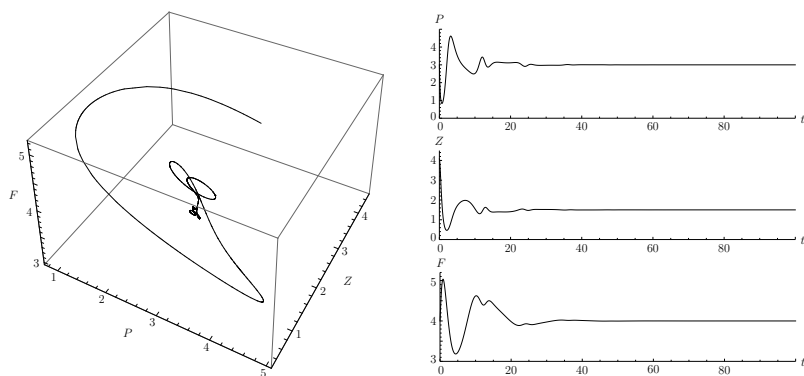
$$\begin{aligned} \psi_3(t) &= \ell(t) - \frac{\phi^2(3)}{\Phi(3)} h(t) \leq \frac{\pi}{3} \sin \frac{1}{4} - \frac{3 \phi^2(3)}{5 \Phi(3)} \\ &< 0.260 - 0.6 \times 0.44 = -0.004 < 0 \end{aligned}$$

である. よって, $(\psi_3)_+(t) = 0$ と $(\psi_3)_-(t) > 0.004$ となる. したがって, 条件 (4.5) と (4.6) が $\rho = 3$ の場合に満たされる. したがって, L として, 0 を選んで,

$$0.755 < \frac{0.304}{0.821} \times 2.04 < \frac{m}{M} e^{-L} \Phi(3) < \frac{0.304}{0.821} \times 2.05 < 0.760,$$

$$\Phi(-1.02) < 0.754, \quad \Phi(-1.03) > 0.771$$

であるから, $1.02 < \rho_0 < 1.03$ がわかる. Theorem 4.2 により, すべての $S_1 \subset S_{\rho_0}$ から出発する (C) の解は漸近的に内部平衡点 $(K, c/d, a/b) = (3, 3/2, 4)$ に収束する. 左



図にはモデル (4.33) の場合の (C) の解曲線を描いた. この解曲線は初期時刻 $t_0 = 0$ に S_1 にある $(P_0, Z_0, F_0) = (3, 3e/2, 4)$ から出発して, t の増加と共に $(P(t), Z(t), F(t))$ は内部平衡点 $(3, 3/2, 4)$ に近づく. 右の3つの図は, それぞれ P , Z と F の挙動を示した. 解の成分 P , Z と F は最終的にそれぞれ 3 , $3/2$, 4 に近づく. Example 4.1 の図と比べて, Example 4.1 の解軌道はより速い速度で内部平衡点 $(3, 3/2, 4)$ に近づく.

参考文献

- [1] F. Azam, T. Fenchel, J.G. Field, J.S. Gray, L.A. Meyer-Reil, F. Thingstad, The ecological role of water-column microbes in the sea, *Mar. Ecol. Prog. Ser.* 10 (1983) 257–262.
- [2] M.J. Behrenfeld, R.T. O'Malley, D.A. Siegel, C.R. McClain, J.L. Sarmiento, G.C. Feldman, A.J. Milligan, P.G. Falkowski, R.M. Letelier, E.S. Boss, Climate-driven trends in contemporary ocean productivity, *Nature* 444 (2006) 752–755.
- [3] W.A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, Heath, Boston, 1965
- [4] Došlý, O., Half-linear Differential Equations, in: Cañada, A., Drábek, P., and Fonda, A. (Eds.), *Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations*, vol. I, Elsevier, Amsterdam, 2004, pp. 161–357.
- [5] Došlý, O., Özbekler, A., and Šimon Hilscher, R., Oscillation Criterion for Half-linear Differential Equations with Periodic Coefficients, *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 393, no. 2, pp. 360–366.
- [6] Došlý, O. and Řehák, P., *Half-linear Differential Equations*, North-Holland Math. Stud., vol. 202, Amsterdam, 2005.
- [7] M.R. Garvie, C. Trenchea, Optimal control of a nutrient-phytoplankton-zooplankton-fish system, *SIAM J. Control Optim.* 46 (2007) 775–791.
- [8] L. Hatvani, A generalization of the Barbashin-Krasovskij theorems to the partial stability in nonautonomous systems, in: M. Farkas (Ed.), *Qualitative The-*

- ory of Differential Equations, vol. I, Szeged, 1979, in: Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 30, North-Holland, Amsterdam, New York, 1981, pp. 381–409.
- [9] Hatvani, L., On the Asymptotic Stability for a Two-dimensional Linear Nonautonomous Differential System, *Nonlinear Anal.*, 1995, vol. 25, no. ?, pp. 991–1002.
- [10] L. Hatvani, Integral conditions on the asymptotic stability for the damped linear oscillator with small damping, *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996) 415–422.
- [11] L. Hatvani, T. Krisztin, V. Totik, A Necessary and Sufficient Condition for the Asymptotic Stability of the Damped Oscillator, *J. Differential Equations* 119 (1995) 209–223.
- [12] Y. Lv, Y. Pei, S. Gao, C. Li, Harvesting of a phytoplankton-zooplankton model, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 11 (2010) 3608–3619.
- [13] A.B. Medvinsky, S.V. Petrovskii, I.A. Tikhonova, H. Malchow, B.L. Li, Spatiotemporal complexity of plankton and fish dynamics, *SIAM Rev.* 44 (2002) 311–370.
- [14] Matrosov, V.M., On the Stability of Motion, *Prikl. Mat. Meh.*, 1962, vol. 26, no. 6, pp. 885–895; translated as *J. Appl. Math. Mech.*, 1962, vol. 26, no. 6, pp. 1337–1353.
- [15] A.N. Michel, L. Hou, D. Liu, *Stability Dynamical Systems: Continuous, Discontinuous, and Discrete Systems*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2008.
- [16] L.R. Pomeroy, The ocean’s food web, a changing paradigm, *BioScience* 24 (1974) 499–504.
- [17] Řehák, P., De Haan Type Increasing Solutions of Half-linear Differential Equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, vol. 412, no. 1, pp. 236–243.

- [18] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, Stability Theory by Liapunov's Direct Method, Applied Mathematical Sciences 22, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.
- [19] M. Scheffer, S. Rinaldi, Y.A. Kuznetsov, Effects of fish on plankton dynamics: a theoretical analysis, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 57 (2000) 1208–1219.
- [20] R.A. Smith, Asymptotic stability of $x'' + a(t)x' + x = 0$, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 12 (1961) 123–126.
- [21] J. Sugie, Two-parameter bifurcation in a predator-prey system of Ivlev type, *J. Math. Anal. Appl.* 217 (1998) 349–371.
- [22] J. Sugie, Uniqueness of limit cycles in a predator-prey system of Holling-type functional response, *Quart. Appl. Math.* 58 (2000) 577–590.
- [23] J. Sugie, Global asymptotic stability for damped half-linear oscillators, *Nonlinear Anal.* 74 (2011) 7151–7167.
- [24] J. Sugie, S. Hata, M. Onitsuka, Global asymptotic stability for half-linear differential systems with periodic coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* 371 (2010) 95–112.
- [25] J. Sugie and M. Katayama, Global asymptotic stability of a predator-prey system of Holling type, *Nonlinear Anal.* 38 (1999) 105–121.
- [26] Sugie, J. and Hata, S., Global Asymptotic Stability for Half-linear Differential Systems with Generalized Almost Periodic Coefficients, *Monatsh. Math.*, 2012, vol. 166, no. ?, pp. 255–280.
- [27] Sugie, J. and Matsumura, K., A Nonoscillation Theorem for Half-linear Differential Equations with Periodic Coefficients, *Appl. Math. Comput.*, 2008, vol. 199, no. 2, pp. 447–455.

- [28] J. Sugie, Y. Saito, M. Fan, Global asymptotic stability for predator-prey systems whose prey receives time-variation of the environment, *Proc. Amer. Math. Soc.* 139 (2011) 3475–3483.
- [29] P. Wang, M. Zhao, H. Yu, C. Dai, N. Wang, B. Wang, Nonlinear dynamics of a marine phytoplankton-zooplankton system, *Adv. Difference Equ.* 2016, Paper No. 212, 16 pp.
- [30] T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1966.