島根大学教育学部紀要（自然科学）　第7巻　11—15頁　昭和48年12月

加速度波形の積分について

野坂　彌蔵・林　隆一*

Yazo NOZAKA and Ryuichi HAYASHI : Integral of Acceleration Wave Form

ABSTRACT : In most cases of the measurement of vibration, by reason of the lightness, the simplicity and the cheapness of accelometer, only acceleration is measured and velocity and displacement are obtained by integrating it. At the time when this integral is put into practice, there is the difficulty that the velocity wave form and the displacement one generally diverge with time because the acceleration wave form contains the direct current component. In the present paper, the basic problems in this integral are discussed and also a few integral techniques avoiding the divergence are described.

1　緒　　論

振動の計測に当っては，加速度，速度，変位いずれも大切で，現象を正しく認識するには，これらの量を同時に記録するのが建前であるが，加速度検出器の軽量，堅牢，安価などのため，加速度だけを記録し，後刻これを積分して速度と変位を求めたい場合が多い。加速度が電磁オツシロに記録された時は，曲線読取機によって適当な時間刻みで数値化し，電子計算機で積分する。データレコーダに記録された場合はＡＤ変換器で数値化し，これを紙テープあるいはデイジタル磁気テープに入れて電子計算機へ入力するか，直接にアナログ計算機へ入れて積分するが，いずれの場合でも相当工夫しないと良い結果は得られない。これについては既に２，３の手法が発表されているが[(1), (2)]，積分に当って問題となる点を詳細に述べたものは見当らないので，本論文では加速度に周期性のある場合とない場合に分けて基本的な問題点を検討し，合せて積分の手法について述べる。

2　積分を困難にする原因とその対策

——加速度に周期性のある場合——

加速度に周期性がある場合にもない場合にも適用できる手法が求まれば最良であるが，それは以下に述べる理由によって不可能であるので，先ず周期性のある場合だけを考えよう。

＊ 島根大学教育学部技術科機械研究室

周知のように

$$\int_0^t \sin \omega t \, dt = \frac{1}{\omega} (1 - \mathrm{coc}\, \omega t)$$

である。これは $\sin \omega t$ を積分すると直流分 $\frac{1}{\omega}$ が現われることる意味する。従ってこれをもう一度積分すると $\frac{t}{\omega}$ のために積分値は直線的に増大する。$\cos \omega t$ は，一回の積分では直流分は現われないが，二回目には現われる。普通の加速度波形 $\alpha(t)$ はフーリエ級数

$$\alpha(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

に展開してみれば分るように，直流分 a_0 も sin も cos も含んでいるから，積分すれば時間と共に増大し発散するのは当然である。故に対策としては，

(1) α の平均値 $\overline{\alpha}$（これは a_0 に等しい）を計算し，$(\alpha - \overline{\alpha})$ を積分する。この結果を v とする。

(2) v は発散しないが，積分に由来する直流分を含んでいるから，これを除くために，v の平均 $\overline{v}$ を計算し $(v - \overline{v})$ を速度とする。

(3) $(v - \overline{v})$ を積分しその結果を x とする。x にも積分に由来する直流分が入っているからこれを除くため平均値 $\overline{x}$ を計算し $(x - \overline{x})$ を変位とする。図1はこのようにして求めた周期関数の一例である。

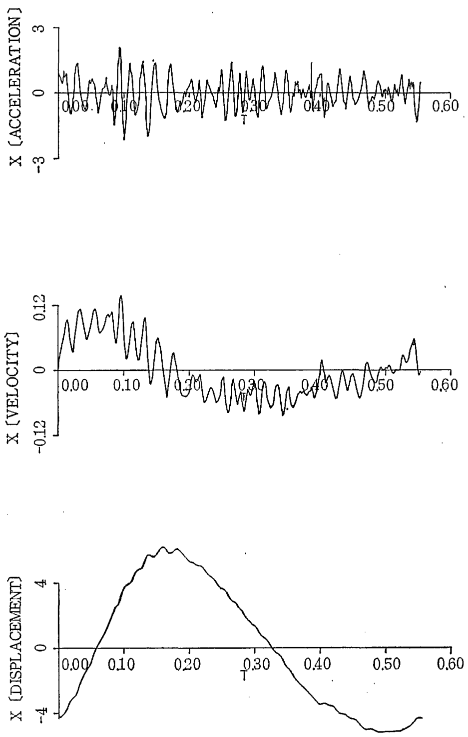

図1

3　積分を困難にする原因

――衝撃的加速度の場合――

旋盤の主軸台に加速度検出器を固定し，ベッドをハンマーで打撃した時に得られる波形のような衝撃的加速度については次のような問題点がある。

(1)　旋盤に加えた打撃力は簡単に δ 関数と考えるけれども，実際には有限な時間幅を持つ矩形波に近いから，加速度波形には打撃方向にゆっくり変化する非振動成分が含まれてくる。

(2)　加速度波形には，打撃によって旋盤中を伝播する振動数の高い波動の他に，旋盤全体が揺動するために現われる低周波成分なども含む。

図2に点線で示したのは，(1)，(2)で述べたゆっくりした成分の合計である。これは過渡的

なものであって，ラプラス変換では $\dfrac{K}{(S+a)(S+b)}$ で表わされ，

$\lim\limits_{S=0}\dfrac{KS}{(S+a)(S+b)}=0$ より分るように時間と共に消滅する。このような衝撃関数を積分すると，次の2つの原因で偏りを生ずる。

(1) 上述のゆっくりした成分が積分され，$\dfrac{A}{S(S+a)(S+b)}$ となる。（図3）

(2) 周期関数の場合と同様に，積分のために直流分を生ずる。例えば減衰波形 $\dfrac{B}{S^2+2hpS+p^2}$ を積分した $\dfrac{B}{S(S^2+2hpS+p^2)}$ の逆変換は

$$\frac{B}{p^2}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}e^{-hpt}\sin(p\sqrt{1-h^2}\cdot t+\phi)\right]$$

但し $\sin\phi=\sqrt{1-h^2}$, $\cos\phi=h$

B は定数，h は減衰係数，p は減衰のないときの固有振動数。

となり，直流分 $\dfrac{B}{p^2}$ を生ずる。（図4）

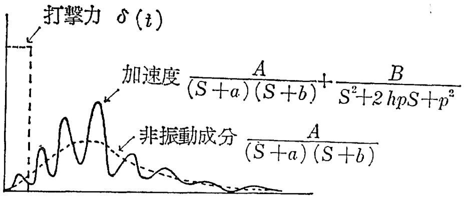

図2

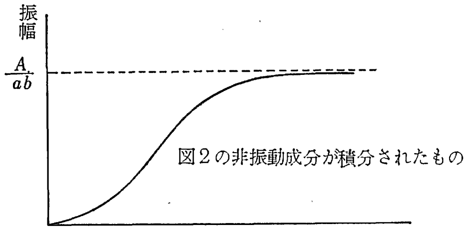

図3 $\dfrac{A}{S(S+a)(S+b)}$

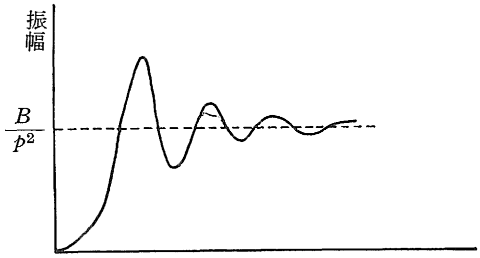

図4 $\dfrac{B}{S(S^2+2hpS+p^2)}$

図3や図4に示した偏りや直流分は積分値を単に平均しただけでは取除くことができない。

4 衝撃関数の積分法 ——近似積分——

図5は非振動成分 $\dfrac{A}{(S+a)(S+b)}$ と振動成分 $\dfrac{B}{S^2+2hpS+p^2}$ を含んだ加速度入力を $\dfrac{T}{TS+1}$ で近似積分することによって非振動成分を減少させ，更にハイパスフイルタ $\dfrac{T_1S}{T_1S+1}$ を通して完全に除去しようとするものである。これを計算機で実行するには，ルンゲ・クッタ・ギル法による微分方程式の解法を二度繰返せばよい。

近似積分　ハイパスフイルタ

$$\text{加速度}\longrightarrow\boxed{\frac{T}{TS+1}}\longrightarrow\boxed{\frac{T_1S}{T_1S+1}}\longrightarrow\text{速　度}$$

図5

加速度：$\underbrace{\dfrac{A}{(S+a)(S+b)}}_{\text{非振動分}}+\underbrace{\dfrac{B}{S^2+2hpS+p^2}}_{\text{振動分}}$

速　度：$\underbrace{\dfrac{ATT_1S}{(S+a)(S+b)(TS+1)(T_1S+1)}}_{\text{非振動分}}+\underbrace{\dfrac{BTT_1S}{(S^2+2hpS+p^2)(TS+1)(T_1S+1)}}_{\text{振動分}}$

この方式の効果を検討するために，簡単な入力 $\dfrac{a}{S(S+a)}$（図6）がフイルタ $\dfrac{T_1S}{T_1S+1}$ に入

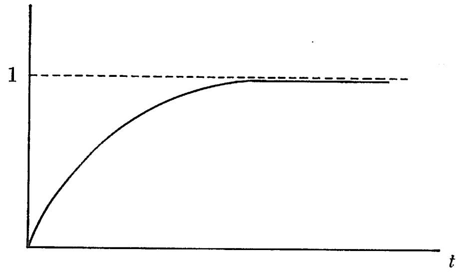

図6　$1-e^{-t}$　即ち $\frac{1}{S(S+1)}$

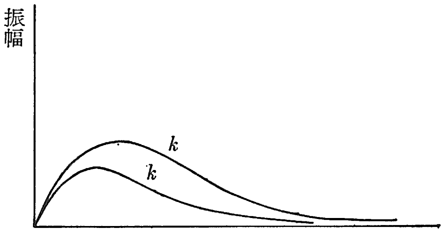

図7　$\frac{1}{k-1}(e^{-t}-e^{-kt})$

力される場合を考えてみよう。$T_1=\dfrac{1}{ka}$ とおくと出力 y は

$$y=\frac{1}{k-1}(e^{-at}-e^{-kat})$$

となり，y は　$t=\dfrac{\log k}{(k-1)a}$ のとき最大値 y_m をとる。

$$y_m=\frac{1}{k-1}(k^{-\frac{1}{k-1}}-k^{-\frac{k}{k-1}})$$

図7は $a=1$ とし，k をパラメータとして y を描いたものである。これと図6を比較して分るように近似積分は非振動成分を減少させる。また k が大きい方（即ち T が小さい方）が有効であるが，非振動成分の完全な除去はできないことが分かる。そこで更にハイパスフイルタを通すのである。フイルタの時定数 T_1 も小さい方がよいが，T も T_1 も余り小さいと低周波振動分を失うことになるから適当な値を見出さねばならない。図8は $T=0.02$, $T_1=0.03$ として衝撃加速度から速度と変位を求めた例である。

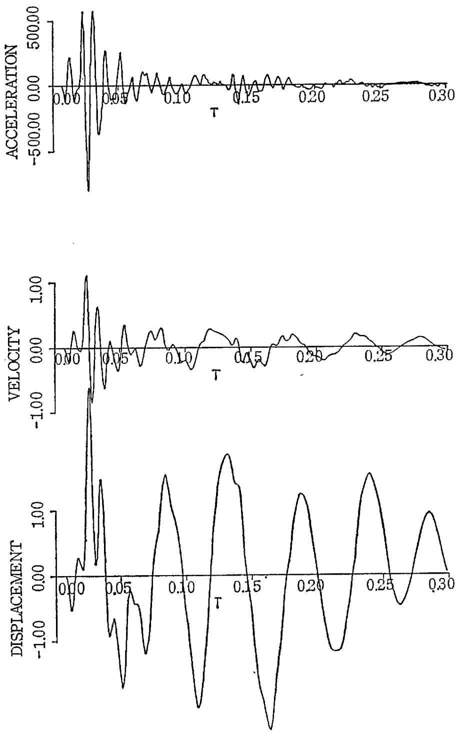

図8

5　衝撃関数の積分法　—移動平均法—

衝撃加速度をそのまゝ積分した未修正速度の移動平均を計算すると，§3で述べたゆっくりした非振動成分や直流分が求まるから，これを差引けば偏りのない速度が求まる筈である。図9，10，11は25点の移動平均を使ったもので，

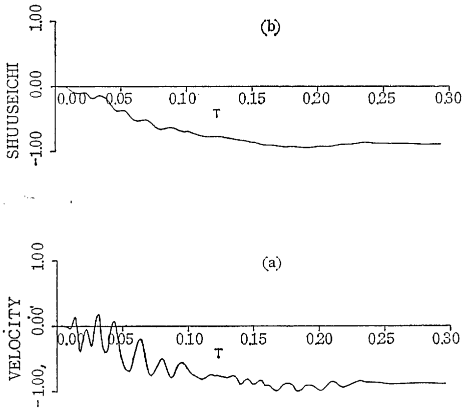

図9

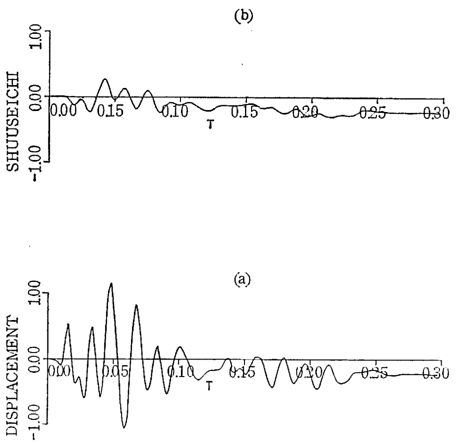

図10

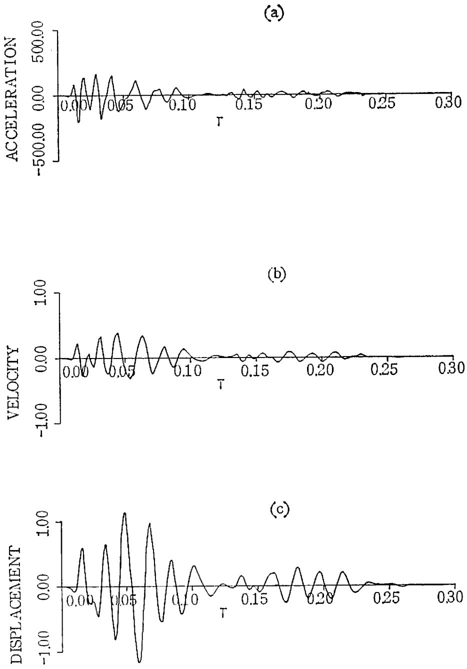

図11

図9(a)は未修正速度，(b)は移動平均である。図11(b)は図9(a)から(b)を引いた修正速度であり，図10の(a)(b)と図11の(c)は，それぞれ未修正変位，変位の移動平均，修正変位である。

移動平均で問題になるのは何点の平均をとるかを定めることと，波形の始まりと終りの処置であって，多分に試行錯誤的である。

6　結　　論

加速度波形を積分して速度を求める場合，直流分や偏りの生ずる原因を，周期関数の場合と，衝撃関数の場合に分けて明らかにし，それぞれの場合について積分法を紹介した。周期関数では平均値を差引けばよいので積分は比較的容易であるが，衝撃関数ではそれほど簡単ではない。加速度波形に含まれている情報を失うことなく，位相も含めて正しい速度や変位を算出するためのより確実普遍的手法の探求は今後に俟たねばならない。

東大生研の佐藤寿芳教授から多くの文献をいただき，また東大工の藤井澄二教授から貴重な示唆をいただいたことを厚く感謝いたします。

なお，ＦＦＴによる沪波を利用して積分する方法も検討したが，良い結果は得られなかった。

参　考　文　献

(1)　H. Sato and K. Suzuki : Response of Structure Model Subjected to Two Seismic Motions with Certain Time-Lag Interval, Jour. I. I. S. 21-3, 1969-3

(2)　Kohei Suzuki and Hisayoshi Sato : On A Method To Obtain Displacement Wave Form From The Record of Earthquake Acceleration　生産研究vol. 22, No. 1