島根大学教育学部紀要（教育科学）　第7巻　15—25頁　昭和48年12月

数学教育における記号表現の問題（I）

——乗法の計算形式を例として——

三　野　榮　治

Eiji MINO : Problems in Mathematical Symbolism (I)

—— The Working Form of Multiplication ——

I.　計算の過程は思考の過程——はじめに

数学教育を決定する因子として，その内容（実質）と形式（表記）とが取り上げられなければならない(1)。

算数・数学の指導は，大きなサイクルを踏まえた，しばしば例えば次のような経緯によることが多い。数学概念・その認識——→概念の記号的表現(表記)——→基本性質（実質の保存による実質と表記のかかわり）などなど。したがってこのことから，こども達に「どのような数学概念を与えなければならないか」というような数学内容についての議論が多くなされる。いわゆる“数学教育の現代化”ということばのもとでの論議も，この内容—教材論が大きな位置を占めている。言うまでもなく，このことはゆるがせにできない基本で重要な観点である。しかし，このことに重みをかけるだけでは“現代化”は進展しない。

上の内容—教材論を，たとえば Content proper——Organization of the content に対応させてみるなら，Presentation of the content —— Organization of classroom work とでもいうべき観点からの考察もおろそかにすることはできない。これはこどもに焦点を合わせた立場とでもいえようか。教師の把え方や教師のすっきりとした指導に対して，こども自身の学習は小さなサイクルの，場合によっては出口を見いだせないことすらあるようなもので，記号表現——→その記号内容への復元，または指示された事柄への復元——→問題解決，という状態がしばしば観察される。そういうこども達の立場，あるいは数学的整合さとこどもの認識の間に起こりうるずれに対する考察がもっと望まれる。

一般の数学学習者——とりわけ初期の学習者や，いわゆる“Slow-learner”といわれるようになった者にとっては，数学実体もそうであるが，記号表現も重大な抵抗体となっている。記号表現からその背後にある記号内容への復元が，長い道のりのものであったり，困難さを伴ったりするために，数学学習が発展させられなくなったり，理解さえ不確かなものになることである。数学を学習し，さらにそれを進めるためには，認識の体系(実質)とその記号的表現の体

系（表記）との間に，対応・復元の滑らかさが要請されているのである。

記号面での困難さが生ずる原因の一つに，記号的表現の往々にして恣意的であることや記号的表現の拘束の強さ（意味作用が豊かであれば，いっそうの拘束を受ける）によることがあげられる。表記がその意味内容とつながりをもつ（有縁性）ときは，例えば，記憶を軽くしてくれる，感覚的であるというような特性があって，具体的映像を喚起する働きが強いと考えられるが，それに対して規約性の強い表記は，類似的な混成作用から自分を保持する働きが強いと考えられるから，それだけに心理的負担が大きい。

ここに，記号的表現を通して内容を把えそれを進展させるという学習場面を想定した場合，くりかえしによる“慣れ”を前提としている一般化した学習方法では，解決しえない問題が潜んでいると思われるのである。

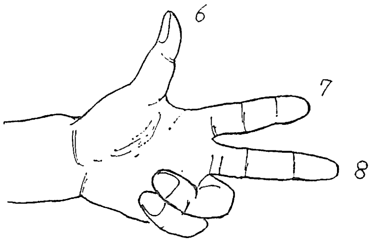
『5という表意記号をみるとき，私は cinq という音による語を読む』という Mounin, G. のことば(2)が意味深い。

小学校算数において「数概念の理解」と「数を表わすしくみの理解」が重視され，質・量ともにひじょうに大きな地位を占めている。そして，『四則演算を能率よく行なうために，記数法の原理などに基づいて形式的な処理の方法，すなわち筆算形式がくふうされている(3)』と。確かに，「能率よく」「処理する方法」として“筆算形式”は従来から扱われている。歴史的にもそうであったといえる。

計算とは，式を，変形規則に従って簡単にすることであるといえるが，変形規則を適用する際，一つの目的的な行為がそこに働く。したがって，計算の過程は思考の過程の反映であり，計算過程の記述は思考過程の顕在化であるとみられる。「計算形式」——計算の過程とその記述——は，したがって，“現代化”における基盤の一つとして位置づけられ得るものである。いわゆる筆算形式は，教育の場では，単に暗算に対する筆算でも，結果を求めるための手段としてだけ用いられるべきものでもない。確かに次の時点では，能率よく形式的に処理するために使えるようになることは要請されるが，計算形式はその前段階の数概念の理解や記数法の理解とも深く結びついているのである。『数概念は，その操作である計算と結びつけて指導することが大切(4)』であるのは言うに及ばないが，計算だけでなく計算形式とも十分に結びつけて指導される必要があるのである。

II. 乗法におけるくふうとその表現

1. 数字やことばを用いなくても，いわば信号として，数および二数の積（ごく限られた範囲ではあるが）を表示することができる。



たとえば，数を手の型に対応させる。そして二数の積は，両手型の組によって表現するという方法——

"Finger counting" がそれである。この方法はフランスにおいて古くから行なわれており，一部地方においては今なお用いられているといわれる(5)。わが国においても市場などで今日みられる手（指）信号は，それと同じ系列のものであろう。

（ア）手指をすべて折り曲げて'握りこぶし'を作った状態から，順次

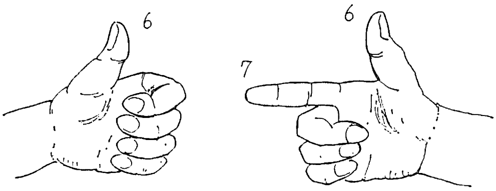
親指だけを伸ばした状態 ―――――― 6

親指と人差指を伸ばした状態 ――――― 7

……………………………………………………

と，6から10までの数を対応させる。

（イ）二数の積，例えば6×7では，6を表わす左手型と，7を表わす右手型とを並べて示す。



6 × 7

なお，5までの数についての二数の積は，いわば基本積とみなして記憶にとどめ，いつでも使える状態のもの（「かけ算九九」にあたる）とする。さらに，7×3のようなものについては，二つの基本積4×3，3×3から導く。

さて，上図が42と読みとれるのはなぜか。

この対応させ方の特徴は，指を伸ばしているか，折り曲げているかであり，両手型の組合せであるから，伸ばしている指の数や折り曲げている指の数を利用すれば，

	左　手	右　手
伸ばしている指の数	1	2
折り曲げている指の数	4	3

左手：$6=10-4$

右手：$7=10-3$

$$\therefore\ 6\times7=(10-4)\times(10-3)$$
$$=10\times\{(5-4)+(5-3)\}+4\times3$$
$$=10(1+2)+4\times3$$

一般に

$$M\times N=(10-F_L)\times(10-F_R)$$
$$=10\{(5-F_L)+(5-F_R)\}+F_L\times F_R$$
$$=10(E_L+E_R)+F_L\times F_R$$

	左　手	右　手
伸ばしている指の数	E_L	E_R
折り曲げている指の数	F_L	F_R

すなわち，　$10\times E_{L+R}+F_{L\times R}$

「伸ばしている指(E)」の数の和と，「折り曲げている指(F)」の数の積（これは基本積）によって，結果が容易に導けるというものである。

この方法は，扱える数が限られていて，その上，積の結果が直接表示されないので，解読の

必要があるが，その手続は容易であり，視覚的あるいは触覚的な特徴あるコミュニケイションである。

なお，明らかなように，親指を伸ばせば6，親指と人差指を伸ばせば7，…………でなくても，5本の指のうち，1本伸ばせば6，2本伸ばせば7，…………でよい。

2.　2倍するという操作は，乗法において基本である。また，日常生活においてもなじみが多く，その結果を求めることも比較的容易といえる。この基本的な2倍するという操作の連鎖，すなわち“倍々(Doubling)計算”を利用して乗法を考えよう，という発想は自然であり数学的でもある。

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{r} 43 \\ +43 \\ \hline \end{array}$$

この考え方——二進法の利用による計算形式は，次例のようにまとめられる。

［例］　19×43

1	43
2	86
~~4~~	~~172~~
~~8~~	~~344~~
16	688
19	817 ：(答)

または

19	1
38	2
~~76~~	~~4~~
152	8
~~304~~	~~16~~
608	32
817	43

なぜなら，19を二進法で表わせば

$19=16+2+1$

$\quad =1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2+1$

$\quad (=10011_{(二)})$

$\therefore\ \ 19\times 43=(1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2+1)\times 43$

$\qquad\qquad =2^4\times 43+0+0+2\times 43+1\times 43$

19	
1	1
2	1
~~4~~	0
~~8~~	0
16	1

43	
1	1
2	1
~~4~~	0
8	1
~~16~~	0
32	1

上例右についても，まったく同様である。

計算手続は，「2の累乗の系列」(1，2，4，8，……)と「それに対応する“倍々計算”」(43，86，172，344，……)を書き下して一覧表にし，その中から「必要な部分と，必要でない部分」を選別し　(1，2，~~4~~，~~8~~，16（＝19）から，43，86，~~172~~，~~344~~，688)，そして必要部分をまとめる(加える)ことによって求めたい結果を導くものである。この計算形式は1，2，4，8，16，………という2の累乗の系列を基準にして，必要な可能性が一覧に表される。その際，この系列のどこまでを書き下さなければならないか，どこまでを書き下せば十分であるか，ということの判断が要請されるから，機械的な扱いができるかどうかという面に限れば，幾分の難があるといえよう。しかし，この二進法の巧みな利用は，何物にも換えがたい面白さを示してくれる。

$19=10011_{(二)}$，$43=101011_{(二)}$などにおける1，0は

1…………ハイ（必要な部分である）

0…………イイエ（必要としない）

と，論理的にも興味があり，実際の計算手続における選別の方法をも示してくれている。2倍ずつの代わりに，3倍ずつ，4倍ずつ，5倍ずつ，………を用いても，このようにはいかない。

この意味において，二進法学習のためのステップとして，この計算形式は固有の位置を占める教材となりうる。

ところで，この計算形式の変形がある。

“倍々計算”において，2の累乗の系列をどこまで書き下すかの判断が要請されると述べたが，その終わりの状態が自動的に判断できる，あるいは機械的に終わりうるような形が求まれば，都合がよい。たとえば，1，2，4，8，16，………と大きくなっていく系列のかわりに，逆に………2，1となれば，一目瞭然である。ここに「$a\times b=(2a)\times(\frac{1}{2}b)$」の利用が考えられる。すなわち“一方を2倍，他方を半分”という考え方である。この考え方に基づいた計算形式を，次に示す。

［例］19×43

19	43
9	86
~~4~~	~~172~~
~~2~~	~~344~~
1	688
	817 ：（答）

または

19	43
38	21
~~76~~	~~10~~
152	5
~~304~~	~~2~~
608	1
817	

なぜなら，

$$
\begin{aligned}
19\times43&=(18+1)\times43\\
&=9\times86+43\\
&=(8+1)\times86+43\\
&=4\times172+86+43\\
&=2\times344+86+43\\
&=1\times688+86+43
\end{aligned}
$$

3. 上述の計算形式は，数内容の性質を巧みにくふうしたものである。それは，現代的とでもいえる『形式として存在するもの[6]』への着目とはいいがたい。

Napier, J. は，もっと一般的・形式的・機械的に乗法を考えたい（と思われる）というねらいでひじょうに興味ある考え方とくふう——“Napier's Rods”——をしている。

これは，次に述べる“Lattice form”によって整えられるが，数と数字のかかわり・形式性などを十分に示唆してくれている。記号表現への着目において操作を考え，基本コードといえるものを抽出し，それらの自由な組み立てによって適用の広がりと手続の機械化が得られた。

その背景には,これらコードの組み立て方それぞれに,実体が1対1に対応していることがある。

この思想は，現在の算数教科書等にみられる計算形式の思想に相通じるものがある。本質的に lattice form に含めて考えることができるので，次で考える。

III. 乗法の計算形式

1. 9×9までの「かけ算九九」を，基本積として扱う。その重要さと使用の便を考えて呈示されるのが，格子模様 (lattice) の「かけ算九九」表である。

この「かけ算九九」表において，積の表示を，『位』の観点を顕在化させるために，一位の表わす数字・十位の表わす数字の表示位置をとくに指定する。このことは，十進位取り記数法の二つの面

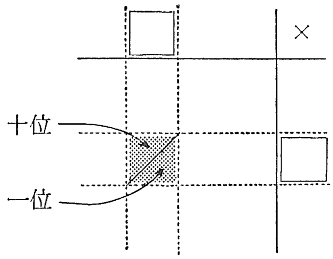
- 0，1，2，……，9の十個の数字だけを使う⟷「かけ算九九」表（図形化）
- 位置記数による位の原理⟷数表示の図形化

に対応する。

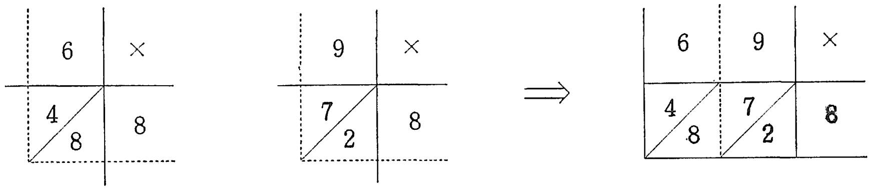
次のコードAを，まず定める。

さらに，これらのコードの結合規則を，導入する。

次に例示する。

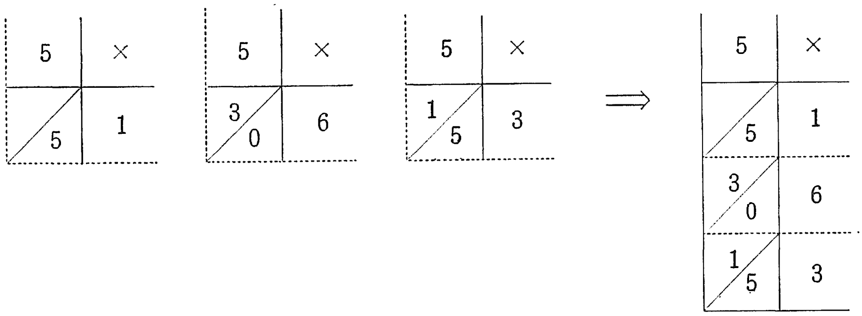


［例］ 69×8



二つのコード（6×8，9×8の図形化）と，その結合規則（図形的組合せ）を利用する。この配置のしかたが，きわめて重要であって，順序性をもつ。

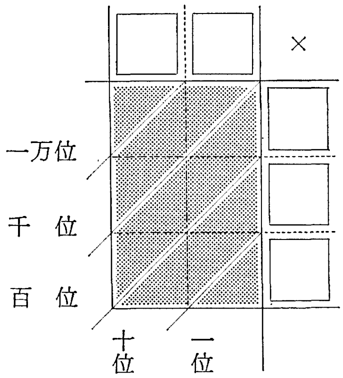
［例］ 5×163



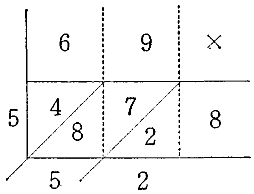
ところで，初めの例69×8では，

$$
\begin{aligned}
69\times 8 &= (60+9)\times 8\\
&= (6\times 8)\times 10+9\times 8\\
&= 48\times 10+72\\
&= 4\times 10^2+(8+7)\times 10+2\\
&= 4\times 10^2+(10+5)\times 10+2\\
&= 552
\end{aligned}
$$

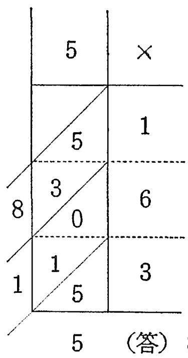
したがって，次のコードBをさらに付け加える。これは，すでに学習ずみの「たて書き加法」そのものである。



[例]



（答） 552

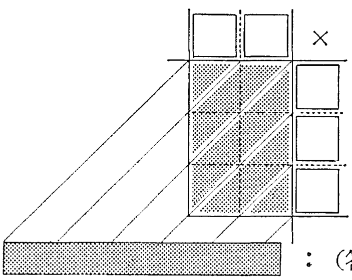


（答） 815

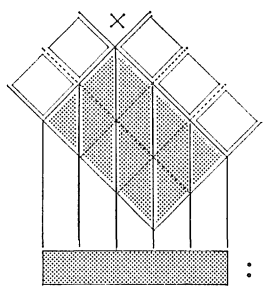
この二種のコードによって，いいかえれば図形的な特性の縦・横・斜めという方向性の利用によるこの計算形式――これを "Lattice form" と呼ぶことにする。

この計算形式は分節的（低次）で，構造化しており，体系性は強くはない。その上，この形態と意味との関わりは，いわば外在的であって，有縁性の要求にもいくらか従っているといえる。その観点からも，初期の数学学習者などにとっては取り組みやすい教材になりうる。

なお指導上，形態の面で次のようなくふうも考えられよう。



：（答）

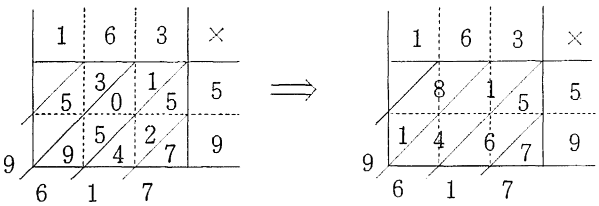


：（答）

さて，しばしば経験するように，計算手続に対して“思考の経済性”とか“思考の能率化”とか言われる意識が芽生え，安定さまたは最適さを求めようとするのは自然の勢いであるとみることができる。ここに数学学習進展の手がかりがつかめる。大切なステップである。これは「縮合」概念の一つの面として把えうる。上述の意味の縮合は，主観的・個人的な安定さを求めることであって，それは数学的な安定さとは必ずしも一致しない。しかし，授業においては大事に扱いたい観点である。ややもすれば，教師は教科書にかかれている立場（それは数学的な観点から整合されたもので，数学的には無駄がない）の中へと，こどもを早急に引き入れがちである。急がなければならないという事情はあるにしても，簡単なようにみえる数学も整合された姿になるまでにはいかに多くの時間と人間が介在しているか，ということを考えてみる必要があろう。

たとえば，次例のような「表記の短縮」は，教科書においてもすでに出発点となっている。数学的にも，心理的にも「表記の短縮」は基本であると考えることはできる。しかし，原表記のほうが自分にとってより安定しているとなれば，それをまず生かすべきである。

〔例〕　表記の短縮の一例：163×59



……………　163 × 5（163 × 50）
……………　163 × 9（163 × 9）

上例で，原表記における計算過程と，短縮表記における計算過程との関係は次のようになる。

原表記：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \longrightarrow \begin{matrix} x_1,\ x_2,\ x_3 \\ x_4,\ x_5,\ x_6 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1,\ x_2,\ x_3 \\ x_4,\ x_5,\ x_6 \end{pmatrix}$$

短縮表記：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \longrightarrow \begin{matrix} x_1,\ x_2,\ x_3 \longrightarrow (x_1,\ x_2,\ x_3) \\ x_4\ \ x_5,\ x_6 \longrightarrow (x_4,\ x_5,\ x_6) \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_{123} \\ x_{456} \end{pmatrix}$$ （注１）

《註》 1．記号・x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6（コードA）
・括弧（　）　　　　（コードB）
・x_{12}，x_{123}，………（誘導記号）――短縮表記におけるコードとみることができる。

2．構成・x_1，x_2，………，x_6を長方形に並べたものは，また記号である。
・記号を（　）でくくったものは式（数値）である。
・x_{12}は（x_1，x_2）を記号におきなおしたものである。(x_{12}) ＝ (x_1，x_2) 等。

2． 現在の算数教科書で用いられている乗法の計算形式，いわゆる「筆算形式」――これを“Working form”と呼ぶことにする――はどういう特性をもっているか。

〔例〕　163×59

(ア)

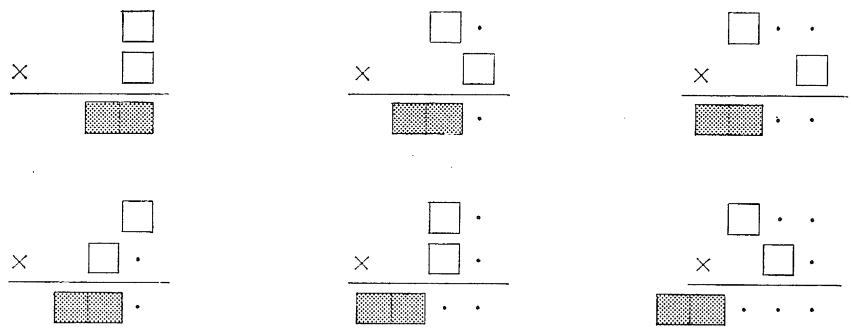
163			
× 59			実質
27	…………………	3×9	(3×9)
54・	…………………	6×9	(60×9)
9・・	…………………	1×9	(100×9)
15・	…………………	3×5	(3×5)
30・・	…………………	6×5	(60×5)
5・・・	…………………	1×5	(100×9)
9617			

(イ)

163		163		
× 59	⟹	× 59		
27, 54, 9		1467	…………………	163×9 (163×9)
15, 30, 5		815	…………………	163×5 (163×50)
		9617		

(ア)は lattice form の原表記に，(イ)は短縮表記に対応する。算数教科書では(イ)でもって定式化されている。

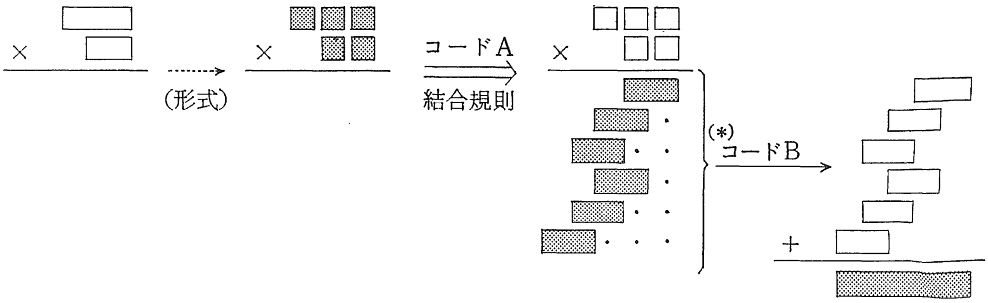
この計算形式では，次のものがコードであることは，直ちにわかるであろう。それぞれが別の働きをする（与えられた位置の認識による）固有な六つのコードからなるコードA。



これらを結合する規則は強くはない。lattice form では結合規則の適用によってはじめてコードが生きてくる。それに対して working form ではコード段階で固有の意味をもちすでに生きている。ここに，二つの計算形式の大きな違いがみとめられる。言いかえれば，前者はコードの段階では実体をとらえることができず，コードの結合の結果全体の把握ができてはじめて各コードが実体と対応する。それに対して後者は，コードの段階ですでに実体と対応しており，この形態と意味との関わりは，すでにこの段階から外在的である。したがって，この計算形式

は，前者より規約的・論理的・代数的であるといえよう。

なお，コードA，結合規則の他に，さらにコードBが要請されるが，それは加法で，lattice form の場合と同じものである。



(*) 配置における順序性は要請されない。

IV. 結　　び

計算形式のそれぞれの特性について，すでに断片的にではあるが，各場面で述べた。ここでは，lattice form と working form の際立った特徴についてだけまとめておこう。

(1) 計算に対する考え，したがって数に対する考えは，ともに記数法の形式性を巧みに利用したものである。「かけ算九九」という基本積と，位を定めるくふうを，ともに用いた。歴史の重みを感じさせられる計算形式である。

(2) その形式化に特性が表われている。配置，方向性といった幾何学的特性を十二分に利用しようとする立場と，そうではないもの。この形態の違いは，心理的・視覚的感覚と結びつくものである。

(3) とくに，コードAとその結合規則にそれぞれの特徴がみられる。すでに述べたように，前者はコードの段階では実体をとらえることができない。この意味は，たとえば3×4のコードを考えるとき，その内容は12という一つの実体だけに対応するのではなく，12 ones, 12 tens, 12 hundreds, …………のどれをも内在させているということである。全体の結合が出来上がってどれか一つの「位」に決定するのである。それに対して，後者はコードの一つ一つが固有の働きをする。そして「位」はすでに外在して決定的である。

(4) 思考過程は，ともに視覚化されているが，前者は言わば同時共存的な形式である。それに対して後者は，思考の経過が読みとれる形式である。

参考文献および注

(1)　戸田清ほか：数学教育学論究VI, p. 25, (1963)

(2)　G.ムーナン／福井ほか訳：記号学入門 (Mounin, G.: Introduction à la sémiologie), 大修館書店, p. 29, (1973)

(3)　文部省：小学校指導書　算数編, p. 18, (1969)

(4)　文部省：小学校指導書　算数編, p. 19, (1969)

(5)　Mueller, F. J.: ARITHMETIC Its Structure and Concepts, Prentice-Hall, p. 91～92, (1956)

(6)　戸田清ほか：数学教育学論究VI, p. 25, (1963)

○　Napier's Rods については，次の書物にくわしい。
Land, F. : The Language of Mathematics, John Murray, p. 5～6, (1964)
Mueller, F. J.: ARITHMETIC Its Structure and Concepts, Prentice-Hall, p. 90～91, (1956)

（注１）　$\left(\begin{matrix}(x_{123})\\(x_{456})\end{matrix}\right)$でないことに注意。

Abstract

For the studies of some linguistic aspect of mathematical symbols in current arithmetic text-books, I will consider "the working form of calculating" (e. g. multiplication) as to an example in mathematical symbols. Because "the working form of calculating" is principal in school mathematics of primary school.

The working form of calculating is to be combined with process of calculating and its descriptive form.

In order to understand some characters of the working form, we should research into aspects of mathematics, semantic, and semiology of the working form.

For beginners and slow-learners of mathematics "the lattice form" of multiplication is familiar and comprehensive, still more easy to deal with it.

Therefore I wish "the lattice form" should be used in classroom.

If students understand principle of multiplication through the lattice form, they may take an interest in the advanced working form of calculating.

I point out some characteristic of the lattice form.

(1) The lattice form has an effect on geometric ideas, that is, this form is regulated by vertical, horizontal and diagonal.

(2) In a mental process, the above stated shape perhaps makes someone of them to feel suppression.

(3) But the form indicates simultaneously the process of thinking.

(4) Code A is simple and unitary. On the other side, the product (e. g. 3×4) by code A means 12 ones, 12 tens, 12 hundreds, ………as well as 12.