微分法の1基本公式の証明の教授法について

新 宮 忠 雄 (数学研究室)

Tadao SINGU :

On the Method of Teaching How to Prove a Fundamental Formula of Differentiation

従来x^nの導函数をもとめる方法としては，

$$x_2^n - x_1^n = (x^2 - x^1)\ (x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_1 + \cdots\cdots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1})$$

の公式を既知としてつかつたもの(1)と，2項定理によつて，

$$(x_1 + \Delta x)^n - x_1^n = \Delta x\ ({}_nC_1 x_1^{n-1} + {}_nC_2 x_1^{n-2} \Delta x + \cdots\cdots)$$

としたもの(2)のいずれかが用いられてきたことは衆知のことである。しかしながら，前者の場合この先験的な因数分解の公式を証明してある本は，筆者の知る限りにおいてはみかけられない。それには数学的帰納法の利用が考えられるが，この場合あまり容易ではなく，結局2項定理を利用して証明する方がはやくなる程であろう。さて後者の場合，当然2項定理を前もつて証明しておかねばならない。所が2項定理を自然数でないnにたいする一般の場合について証明することは，やゝ高等であるので，初歩の間は省かれているのが現状である。例えば，高等学校の解析Ⅱの課程でもそうであるし，大学の一般教育の課程でも函数の *Taylor* 展開をやるまではふれられていない。しかもnが自然数の場合だけの2項定理の証明のためにでも，どうしても順列，組合せの理論の導入が必要である。高等学校の生徒や卒業生達の感想としては，“解析Ⅱは順列，組合せの所がなければよくわかるし，面白いのだが……”というのが通例のようである。元来数学教育者の最も注意しなければならない点は，如何にして学生，生徒等をして数学をすきにするかにあるといつても過言ではない，その主旨をいかすために，おもいきつて順列，組合せにかんする事柄を解析Ⅱの課程からとりさつてはどうであろうか。勿論これらの事柄は数学的にはきわめて興味ふかく，数理統計学等への応用範囲も大きいし，物事を厳密に考えるという数学的な生活態度の養成には好適であるとされている。しかしながら，これらをはぶくことにより，解析Ⅱ乃至大学の一般教育の数学（特に文科系の）学習者をして，数学とは面白くわかりやすいものであり，微積分学とは応用性も広いものであると感じさせうるとしたら，その効果はこれらをふくませておくことによる利益よりはるかに大きいと確信するものである。

ところで，それではx^nの導函数をみちびくことが出来ないのではないかという問題が生じてくる。しかしそのためには，2函数の和，積の微分法の公式をさきに導入すれば，数学的帰納法の適用によつて，nが正の整数の場合は次に示すように容易に証明ができる。さらにすすんで2函数の商の微分法の公式を導けばnが負の整数のときにも拡張されるし，合成函数の微分法の公式を証明した後にはnが有理数の場合にまで拡張出来る。筆者の経験からすると，2項定理の導入なしで微分学を教えうる利点があるので，特に大学の一般教育課程においては，学生達によく理解され，かつ時間も短くてすむ等の長所があつた。尚現在の高等学校の解析Ⅱの課程には，和，積（商，合成函数）等の微分法の公式はふくまれていないが，近く行われる教授内容の改革において採用されれば好都合である。順列，組合せ等の代りとして此等を教えることは，教師，生徒の両方にとつてどれだけ喜ばれるかわからないと信ずる。

定　理　$f(x) = x^n$

ならば

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

こゝにnは有理数とする。

証　明　（Ⅰ）　nが正の整数の場合

1°. $n=1$の場合：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

故にこのとき本命題はあきらかになりたつ。

2°. $x=k$のとき本命題の成立を仮定すると，$n=k+1$の場合は，

$$f(x)=x^{k+1}=x\cdot x^k$$

であるから，２函数の積の微分法の定理によつて

$$f'(x)=1\cdot x^k+(kx^{k+1})\cdot x=(k+1)x^k$$

即ちこのときも本命題は成立するから，数学的帰納法によつて，一般に n が正の整数のときには定理は正しい。

(Ⅱ)　<u>n が負の整数の場合</u>

$$n=-m,\quad m>0$$

とおけば，

$$f(x)=\frac{1}{x^m}$$

となるから，これに２函数の商の微分法の公式と(Ⅰ)の結果を適用すれば，

$$f'(x)=\frac{-mx^{m-1}}{(x^m)^2}=-\frac{nx^{-n-1}}{x^{-2n}}=n\,x^{n-1}$$

がえられるから，本命題はなりたつ。

(Ⅲ)　<u>n が正の分数（既約）の場合</u>

$$n=\frac{q}{p};\quad p,\ q>0;\quad x^q=t$$

とおけば，

$$\{f(x)\}^p=t$$

$$\therefore\quad \frac{dt}{df}=pf^{p-1}\qquad〔fはf(x)の略〕$$

$$\frac{df}{dt}=\frac{1}{pf^{p-1}}=\frac{1}{px^{\frac{q}{p}(p-1)}}=\frac{1}{p}x^{n-q}$$

$$\frac{dt}{dx}=qx^{q-1}$$

合成函数の微分法の定理により，

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{p}x^{n-q}\ qx^{q-1}$$

$$=\frac{q}{p}\ x^{n-q+q-1}=nx^{n-1}$$

となつて，本命題の成立がいえる。

(Ⅲ)　<u>n が負の既約分数の場合</u>

$$n=-m,\quad m>0$$

とおけば

$$f(x)=\frac{1}{x^m}\ .$$

(Ⅲ)の結果と，２函数の商の微分法の公式とによつて，

$$f'(x)=\frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}$$

となるから，(Ⅱ)と同様にして定理は成立する。

以上（Ⅰ）～（Ⅲ）により証明を終る。

n が無理数の場合は，高等学校ではもとより，大学の一般教育の課程でも省いて差支えないと考えるので，こゝでは論じない。（これは函数の展開の学習後の内容である）。

文　献

（手許にある数冊を代表としてかゝげておく）

(1)　掛谷宗一：微分学（岩波全書）．64，91；1947．
中等学校教科書株式会社（編）：高等学校数学教科書 解析編 Ⅱ．83；1948．

(2)　辻正次，田中明雄：高等数学通論 Ⅱ（共立全書）．33；1953．
高須鶴三郎：微積分学深義Ⅰ微分学．127；1930．
大学教育数学研究会(編)：大学教育数学．123；1954．

SUMMARY

Almost every book of differential calculus treats the proof of the fundamental formula

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

as follows :

(1) Using the formula

$$x_2^n-x_1^n=(x_2-x_1)(x_2^{n-1}+x_2^{n-2}x_1+\cdots\cdots+x_1^{n-1})$$

(without any proof of this formula), or

(2) Usiug the binomial formula.

The former method has a defeat, that is, the used formula has no proof in the book, generally.

The latter method is quite complete but it needs the binomial formula to be proved. For this purpose we have to teach 'permutation and combination' throughly, although it takes much time and it decreases ordiuary students' interest in mathematics and let them feel weary. To avoid these I advise to use the following method :

First derive the formulae of differentiation of the sum, the product, and the quotient of two functions and of the composite function.※ Then with the mathematical induction and these formulae the derivative of x^n would be obtained easily without the use of the binomial theorem.

※ If n is limited to be an integer, this is not necessary.