分散分析における1公式について

新　宮　忠　雄（統計学研究室）

Tadao SINGU :

On a Formula in the Analysis of Variance.

2通りの分類が考えられ，しかも各ます (*cell*) に2回以上の測定が行なわれた場合の分散分析の公式についてのべたい．この種の実験は実際にしばしばおこなわれるものであるが，これを取扱っていない本が多いし，又取扱っている本の中にもいろいろ異った公式が掲げてあるので，実験者をまよわせることが多いようである．この一文がこのようなときの助けともなれば幸である．

今各ますについて m 回ずつ測定し ($m \geqq 2$ とする)，縦に k 列 (*column*)，横に l 行(*row*) があるものとする．この場合は当然縦の分類と横の分類の間の交互作用 (*interaction*) の有無を検定することができる．所がこの交互作用が有意であるときと，そうでないときとで，公式に区別のある本と区別のない本が見受けられるので，これを検討したい．これから使う記号を次にかゝげる：

出　所	2 乗和 (*sum of squares*)	自由度	不偏分散（2乗の平均 *mean square*）
行	$S_R \equiv km\sum_{j=1}^{l}(\overline{X}_{\cdot j\cdot}-\overline{X}_{\cdots})^2=\frac{1}{km}\sum_{j=1}^{l}T^2_{\cdot j\cdot}-\frac{T^2_{\cdots}}{N}$	$l-1$	$M_R \equiv \frac{S_R}{l-1}$
列	$S_C \equiv lm\sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_{i\cdot\cdot}-\overline{X}_{\cdots})^2=\frac{1}{lm}\sum_{i=1}^{k}T^2_{i\cdot\cdot}-\frac{T^2_{\cdots}}{N}$	$k-1$	$M_C \equiv \frac{S_C}{k-1}$
交互作用	$S_I \equiv \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(\overline{X}_{ij\cdot}-\overline{X}_{i\cdot\cdot}-\overline{X}_{\cdot j\cdot}+\overline{X}_{\cdots})^2$	$(k-1)(l-1)$	$M_I \equiv \frac{S_I}{(k-1)(l-1)}$
	$=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}T^2_{ij\cdot}-\frac{T^2_{\cdots}}{N}$		
群内 (*within-groups*) (誤差としたものもある)	$S_W \equiv S_T-S_R-S_C-S_I$ $=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\sum_{p=1}^{m}(X_{ijp}-\overline{X}_{ij\cdot})^2$	$kl(m-1)$ $=N-kl$	$M_W \equiv \frac{S_W}{N-k}$
合　計	$S_T \equiv \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\sum_{p=1}^{m}X^2_{ijp}-\frac{T^2_{\cdots}}{N}$	$N-1$	

こゝに X_{ijp} は各測定値をあらわし，i は列の番号，j は行の番号，p はくりかえしの番号をあらわす．また

$$T_{\cdots} \equiv \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\sum_{p=1}^{m}X_{ijp};$$

$$T_{i\cdot\cdot} \equiv \sum_{j=1}^{l}\sum_{p=1}^{m}X_{ijp},\quad \overline{X}_{i\cdot\cdot} \equiv \frac{T_{i\cdot\cdot}}{lm},\quad i=1,2,\cdots,k;$$

$$T_{\cdot j\cdot} \equiv \sum_{i=1}^{k}\sum_{p-1}^{m}X_{ijp},\quad \overline{X}_{\cdot j\cdot} \equiv \frac{T_{\cdot i\cdot}}{km},\quad j=1,2,\cdots,l;$$

$$T_{ij\cdot} \equiv \sum_{p=1}^{m}X_{ijp},\quad \overline{X}_{ij\cdot} \equiv \frac{T_{ij\cdot}}{m},\quad \left\{\begin{matrix} i=1,2,\cdots,k \\ j=1,2,\cdots,l \end{matrix}\right\};$$

$$N=klm$$

である．なお今は m が各ますについて等しい場合 (*orthogonal case*) だけを取扱う．一般の場合 (*nonorthogonal case*) については，(2)，(3)，(6)，(14)，(18)をみられたい．

仮　定：標本は正規母集団から不作為に抽出された相互に独立なものとし，行の効果 (*effect*) との列の効果は加法的であるとする．即ち各ます毎の母平均 μ_{ij} は $\mu+c_i+r_j+I_{ij}$ の形にあらわされるものとする．ここに μ は各ますにつき共通な値で，c_i は第 i 列の効果による値，r_j は第 j 行の効果による値，I_{ij} は第 i 列と第 j 行の交互作用による値である．又母分散は各ますにつき等しいものとしておく．

仮 説：H_R：行の効果はない，即ち　$r_j=0$

$(j=1, 2, \cdots, l)$．

H_C：列の効果はない，即ち　$c_i=0$

$(i=1, 2, \cdots, k)$．

H_I：交互作用はない，即ち　$I_{ij}=0$

$\begin{pmatrix} i=1, 2, \cdots, k \\ j=1, 2, \cdots, l \end{pmatrix}$．

第１種の誤の確率をαとしておく．

H_I の検定法：

第１法：$\dfrac{\dfrac{S_I-S_R-S_C}{(k-1)(l-1)}}{\dfrac{S_T-S_I}{N-kl}}$ とFの表値

$F_{1-\alpha}\{(k-1)(l-1),\ N-kl\}$ をくらべ，前者が大きいときはH_Iをすて，そうでないときはH_Iをうけいれるものである．　例：(1)．

第２法：$\dfrac{M_I}{M_W}$ とFの表値　$F_{1-\alpha}\{(k-1)(l-1),\ N-kl\}$ をくらべ，前者が大きいときはH_Iをすて，そうでないときはH_Iをうけいれるもので，大体どの本でもこれによっている．例：(2)，(3)，(6)，(7)，(9)，(11)．

H_R，H_Cの検定法：これについては次にのべるように，本によって相当なちがいがみられる．

1°．交互作用が有意でない場合：

第１法：$\dfrac{M_R}{\dfrac{S_I+S_W}{N-k-l+1}}$ とFの表値　$F_{1-\alpha}(l-1,\ N-k-l+1)$ をくらべ，前者が大きいとH_Rをすて，そうでないときはH_Rをうけいれる．又 $\dfrac{M_C}{\dfrac{S_I+S_W}{N-k-l+1}}$ とFの表値　$F_{1-\alpha}(k-1,\ N-k-l+1)$ をくらべて上と同様にしてH_Cの検定をする．例：(1)．

第２法：$\dfrac{M_R}{M_W}$ とFの表値　$F_{1-\alpha}(l-1,\ N-kl)$ をくらべてH_Rの検定をし，$\dfrac{M_C}{M_W}$ とFの表値$F_{1-\alpha}(k-1,\ N-kl)$ くらべてH_Cの検定をする．例：(2)，(3)，(6)，(7)，(9)，(10)，(11)，(13)，(14)，(15)，(16)．

2°．交互作用が有意な場合：

第１法：$\dfrac{M_R}{\dfrac{S_I-S_R-S_C}{(k-1)(l-1)}}$ とFの表値

$F_{1-\alpha}\{l-1, (k-1)(l-1)\}$をくらべて$H_R$の検定をし，$\dfrac{M_C}{\dfrac{S_I-S_R-S_C}{(k-1)(l-1)}}$ とFの表値$F_{1-\alpha}\{k-1,\ (k-1)(l-1)\}$ をくらべてH_Cの検定をするもの．例：(1)．

第２法：$\dfrac{M_R}{M_I}$ とFの表値　$F_{1-\alpha}\{l-1,\ (k-1)(l-1)\}$ をくらべてH_Rの検定をし，$\dfrac{M_C}{M_I}$ とFの表値 $F_{1-\alpha}\{k-1, (k-1)(l-1)\}$をくらべて$H_C$の検定をするもの．例：(2)，(3)，(6)，(7)，(9)，(10)，(11)，(14)．

第３法：1°の第２法と同じもの．例：(13)，(15)，(16)．

以上のように種々の検定公式がある（特にH_R，H_Cに）ので，これらを比較研究してみたい．

まず目につく点は第１法〔(1)の方法〕が他とは特に異っていることである．即ちH_Iの検定においても其の他の場合でもM_R，M_Cだけは他と共通であるが，M_I又はM_Wに相当するものは全く異っている．これは同書による方法が次のような考え方に基づくからである．

各ますにm回行われた測定をます毎に平均した値の表をつくり，その値をもって各ますに１回ずつの測定が行われたと考えて得られる総計の値をもとめ，これをS_S（小計，*subtotal*）と名づける．従ってこれの自由度は$kl-1$となるが，この２乗和の求め方は前述のS_Iと同じである．次に同書における交互作用に対する２乗和をS'_Iとすると，

$$S'_I=S_S-S_R-S_C=S_I-S_R-S_C$$

である．従ってこれの自由度は $(k-1)(l-1)$ である．又同書における群内２乗和をS'_Wとすると，

$$S'_W=S_T-S_S=S_T-S_I$$

となり，これの自由度は$N-kl$となる．なお同書では，H_R，H_C の検定法の1°の場合に限つて剰余項(*residual*)を用いている．この２乗和をS_rとすると

$$S_r=S_T-S_R-S_C=S'_I+S'_W=S_I+S_W$$

となり，これの自由度は$N-k-l+1$である．この考え方から第１法の主旨が明らかになると思う．この方法は見かけは他と相異るように思われるが，実質的には第２法とほとんど差異はないから，今の論から省くことにする．

次に2°の第２法と第３法のちがいをしらべる．これは構造模型が同じでも，確率模型が母数模型（*systematic set-vp*）であるか，変量模型（*random set-up*）であるかによって決まる問題であって，結果に重大な差をもたらす．模型についての詳細は(4)，(5)，(6)，(7)，(8)，(12)，(17)を参照されたい．母数模型のときは特別な制限 $\sum_i I_{ij}=0$，$\sum_j I_{ij}=0$があるが，この条件が一方でもみたされないときにM_Wを分母にして検定すると，母数に偏りを生ずるので好ましくない．2°はこのような条件のなりたゝないときで，したがって変量模型と考えられるから，第２法によらねばならない．(4)，(6)，(7)，(8)参照．これは次のような具体的な例について考えるとよくわかると思う．

ある種の機械をA，B，C，D，E　５人が使ってその生産量をきそうとする．機械にはW，X，Y，Zの４つの型がある．各人が各機械について３回ずつ作業したとすると今の場合の好例が得られる．この結果，個人別の

効果，機械別の効果，交互作用の3つが検定される．このとき交互作用が特に有意であったとすると，この事は例えば次のような事をあらわしている：

AはWを使うと能率が上るが，X，Yでは上らない；BはXを使うと能率が上るが，Wでは上らない；CはW，Xでは上らないが，Yでは上る；等々．

すると機械別の効果，個人別の効果は交互作用に比べては問題にならないことになる．なぜならこの工場としては，たとえ機械Yに対する標本平均が最大を示したとしても，必ずしもYばかりをそなえるのが有利とは限らない．Aのような人を使うときはWをそなえるのが有利であるし，Bを使うときにはXをそなえた方がとくになる．又たとえEの標本平均が最大であっても，必ずしもEが最も能率をあげる人とは限らない．5種の機械全体としてはそうであっても，特定の機械たとえばZに対して能率的であるとはいゝきれない．故にこの場合交互作用が有意でないときと同様の推定法をすると，交互作用の強い存在が無視されることになって不合理である．従って第2法が推せんされる．

文　　献

(1) Dixon, Wilfred J.—Massey, Frank J. Jr.: Introduction to Statistical Analysis, 136—139, Mc Graw-Hill, 1951.

(2) Kendall, Maurice G.: The Advanced Theory of Statistics, II, 218—233, Charles Griffin, 1951.

(3) Kenney, J. F.—Keeping, E. S.: Mathematics of Statistics, II, 265—274, D. van Nostrand, 1951.

(4) 北川敏男：実験計画法の統計理論への序説，11—25 克試堂，1951.（日本応用力学会編：応用統計学第5章）.

(5) Kitagawa, T.: Successive process of statistical inferences, V, *Mem. Fac. Sci.* Kyushu Univ. Ser. A, 7, 81—106, 1953.

(6) 北川敏男，三留三千男：実験計画要因配置表，12—33，培風館，1953.

(7) 増山元三郎：工場技術者のための実験計画法の話，検定編 25—45，日本規格協会，1951.

(8) 増山元三郎：推計紙の使い方，63—72，日本規格協会，1951.

(9) 増山元三郎：小数例のまとめ方と実験計画のたて方，165—168，河出，1951.

(10) 増山元三郎：実験計画法大要，15—25，学術図書，1950.

(11) Mood, Alexander McFarlane: Introduction to the Theory of Statistics, 334—337, McGraw-Hill, 1950.

(12) 中山伊知郎（編）：統計学辞典；272，248—286；東洋経済新報，1951.

(13) Paterson, D. D.: Statistical Technique in Agricultural Research, 52—58, McGraw-Hill, 1939.

(14) Snedecor, George W.: Statistical Methods Applied to Experiments in Agriculture and Biology, 275—301, Iowa State College, 1946.

(14)' 畑村又好，津村善郎，奥野忠一，田中祐輔(訳)：スネデカー統計的方法II，271—273，岩波，1953.

(15) 淡中忠郎：統計学の理論と応用，155—158，養賢堂，1954.

(16) 寺田一彦：推測統計法，193—194，朝倉，1952.

(17) 山口 襄，石田保士：企業に応用される統計学，322—323，共立社，1953.

(18) Yule, G. Udny—Kendall, Maurice G.: An Introduction to the Theory of Statistics, 522—523, Griffin, 1953.

SUMMARY

The formula for the analysis of variance in the case of two variables of classification with repeated measurements in each cell is not unique. According to the probability-model, some formulas are right but some are wrong. Namely, when the interaction exists, even in the orthogonal case, the formula for the variance-ratio (F-ratio) may be written in two ways; one has the interaction mean-square as its denominator while the other has the within-groups mean-square as its denominator. In this study I have discussed which method would be more reasonable in ordinary experiments. The conclusion is as follows:

Only in the model I (systematic set-up) the former is usable, but in the model II (random set-up) the latter should be used.