

講座ものの空箱の利用法

新 宮 忠 雄 (数学研究室)

Tadao SINGU

Matching Problem of Book-cases and Books Consisting of Many Parts Taken from Gathered Works.

最近某社の数学講座を買った。全部で12箱にはいっており、各箱には3冊ずつ3つの項目がまじってはいっている。すなわち毎回1箱3冊ずつの配本があるが、1回で完結するとは限らない仕組になっていた。たとえば‘代数学’は2回で、‘三角法’は1回で、‘微分積分学’は4回で完結するといった具合である。そして各冊共厚さはほとんど同じである。さてこのまとめ方としては各項目毎に製本すればよいのではあるが、それは懐具合が許さない。そこで甚だミミッチイ話ながら、製本しないで空箱におさめておくことにした。(そのうち金が出来たら製本することとして)。さてそのおさめ方としては、配本のまゝでは不便なので、なるべく1箱に1項目をまとめたし、その項目名が箱の外に印刷してあると好都合である。このような組合せが可能かどうか、又可能なら何通り考えうるか、不可能ならどうすれば可能になるか、又可能であるための必要条件は、十分条件は、また一般の場合にはどうであろうか等と考えてこの文を書くことにした。

さて現実の問題のデータは次のとおりである。

箱の番号	箱に印刷してある項目名
1	代数学 $\frac{1}{2}$, 行列式 $\frac{1}{2}$, 三角法 $\frac{1}{1}$.
2	代数学 $\frac{2}{2}$, 行列式 $\frac{2}{2}$, 微分方程式 $\frac{1}{4}$
3	解析幾何学 $\frac{1}{2}$, 実用数学 $\frac{1}{2}$, 積分方程式 $\frac{1}{4}$.
4	初等幾何学 $\frac{1}{2}$. 微分積分学 $\frac{1}{4}$, 整数論 $\frac{1}{4}$.
5	実用数学 $\frac{2}{2}$, 集合論 $\frac{1}{2}$, 近代解析 $\frac{1}{4}$.
6	力学 $\frac{1}{2}$, 微分幾何学 $\frac{1}{2}$, 函数論 $\frac{1}{2}$.
7	解析幾何学 $\frac{2}{2}$, 微分積分学 $\frac{2}{4}$, 微分幾何学 $\frac{2}{2}$,
8	初等幾何学 $\frac{2}{2}$, 確率と統計 $\frac{1}{2}$, 数学教授法 $\frac{1}{4}$.
9	微分積分学 $\frac{3}{4}$, 確率と統計 $\frac{1}{2}$, 位相数学 $\frac{1}{2}$.
10	集合論 $\frac{2}{2}$, 積分論 $\frac{1}{4}$, 抽象代数学 $\frac{1}{2}$.
11	力学 $\frac{2}{2}$, 函数論 $\frac{2}{2}$, 位相数学 $\frac{2}{2}$.
12	微分積分学 $\frac{4}{4}$, 数学史 $\frac{1}{4}$, 抽象代数学 $\frac{2}{2}$.

備考：項目名のあとの分数は、分母が全冊数、分子はその何番目をしめす。

解決法の1例を次にしめす。

箱の番号	おさめるべき項目名		
	1項目2冊のもの	1項目1冊のもの	分割されるもの
1	行列式	三角法	力学の1 微分積分学の 1, 2, 3
2	代数学	微分方程式	
3	解析幾何学	積分方程式	
4	初等幾何学	整数論	
5	実用数学	近代解析	
6	微分幾何学		
7			力学の2
8	確率と統計	数学教授法	
9	位相数学		
10	集合論	積分論	微分積分学の4
11	函数論		
12	抽象代数学	数学史	

こゝでは‘力学’と‘微分積分学’が分割されて2箱ずつにはいっている。‘微分積分学’は元来4冊からなるのでやむおえないが、‘力学’は2冊であるから何とかなりそうである。しかしどうさしかえてみても、どれかが分割される運命にある。これを少し理論的に考えてみることにする。1箱には3冊しかはいらないから、どうしても2冊ものと1冊ものにするより仕方がない。(3冊ものはない)。4冊ものには3冊と1冊にわけける仕方Aと、2冊と2冊にする仕方Bとがある。Aのときは1冊ものと3冊もの2項目からなると考えればよいし、Bのときは2冊ものが2項目あると考えればよい。いいかえればAは全体で2冊ものが12と、1冊ものが9、3冊ものが1あることであり；Bの場合は全体で2冊ものが14と、1冊ものが8あることとなっている。従ってAのときは3冊もので1箱をしめるから、あと11箱を2冊もの12と1冊もの9でうめればよい。2冊ものを分割しないでは9箱しかうめられないから、あと2冊もの3だけで2箱をうめねばならな

い。故に少くともどれか1つの2冊ものを2箱にわけ
 必要がおこる。Bのときは2冊ものを分割しないでは8
 箱しかうめられないから、あと4箱を2冊もの6だけ
 うめねばならない。故に少くともどれか2つの2冊も
 を分割しなければならない。

今示した例はAによっているから分割される2冊もの
 の対象として‘力学’がなったのであって、これより良
 い案はないことがわかる。又1冊ものの方が2冊もの
 より少ない今としては、B案は明らかにA案より劣るから、
 今後は主としてA案について考えよう。

箱の総数を N とし、 i 冊ものの項目数を

$$x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

とする。

$$i \equiv 0 \pmod{3}$$

のときはその項目だけで独占できる箱を除けばよい。な

おその箱数は $\frac{1}{3} \sum_i x_i$ 。故に

$$i \equiv 1 \pmod{3}$$

の項目数と

$$i \equiv 2 \pmod{3}$$

の項目数が丁度一致すれば、残りの箱に2冊もの、5冊もの、
 8冊もの、……等と1冊もの、4冊もの、7冊もの、
 ……等の組合せられたものが丁度おさまることになる。
 このときもし

$$i \equiv 1 \pmod{3}$$

の項目数があまれば、あまったものは合計して

$$i \equiv 2 \pmod{3}$$

又は

$$i \equiv 0 \pmod{3}$$

の代用をすることになるから差支えない。しかしもし

$$i \equiv 2 \pmod{3}$$

の方があまれば、はじめの例にしめたような2冊もの
 の分割が必要となってくる。その分割の最小限の回数は
 次のようにしてまとめられる。

$$i \equiv 1 \pmod{3}$$

の項目数を P 、

$$i \equiv 2 \pmod{3}$$

の項目数を Q とする。 P からこのグループ単独で1箱を
 しめるもの (例えば4冊ものうちの3冊) を除いた残りを
 P とし、同じく Q からこのグループ単独で1箱をしめる
 もの (例えば5冊ものうちの3冊) を除いた残りを
 q とする。 $q > p$ であると

$$q - p \equiv 0 \pmod{3}$$

であるから、 $\frac{2}{3}(q-p)$ がのこりの箱の数である。3項目
 毎に1項目を分割しなければならないから、もとめる

分割回数は $\frac{1}{3}(q-p)$ である。

ただし以上の理論はどのようにして分割を最も少なく
 して空箱におさめられるかというだけで、実際には各箱
 に印刷してある項目名と中味をあわせる問題がからんで
 くるので更に複雑となる。つまり前述の理論は分割を最
 小限にとどめるための必要条件であつて、十分条件とは
 ならない。しかし十分条件の方は項目名の印刷の仕方
 によつていろいろな場合ができて、*matching problem* の
 より一般化された場合となり、一般的な理論はうちたて
 られないように思われる。今の具体例について考えてみ
 ると、例えば第1の箱と第2の箱のように、それら自身
 の中で分配が完了し、他の箱との交換を行えぬものもあ
 るので、こんなときは結局10個の箱しかなかったと考
 えてもよいことになり、相当たやすくなる。又必ず分割の
 いる‘微分積分学’の属していた箱は4, 7, 9, 12であ
 るが、そのうち4, 12には別に1冊ものがあるので、そ
 こへ‘微分積分学’の3冊や1冊をいれることはできない。
 従つて‘微分積分学’のはいりうる箱は7と9に限られる。
 又当然のことながら、1冊ものは初めからそのはいるべき
 箱が固定していることになる。もし1冊ものを2項目同
 時に配本されていると、此等は2冊もの1つと取扱えば
 よい。このような定石をまず考えにいれると、実際問題は相
 当たやすくなるが、一般的な理論には程遠いようである。

次に何通りの方法があるかであるが、まず第1と第2の
 箱の中でどちらに‘代数学’をいれるかによつて、2通りあ
 る。第3の箱から第12までの箱については‘微分積分学’を
 第7の箱に3冊いれるか、第9の箱に3冊いれるかにより、
 又他のどの項目を分割するかによつて、……と考
 えていけばよいわけである。ひまつぶしにいろいろや
 ってみれば面白いとは思ふが、これにも一般的な数学的
 法則がみつからないのでいささか物足りない。皆様の御
 知恵をおかりしたいと思ふ。

Summary

The gathered works of mathematics were published. In each book-case three parts were contained. Some book consists of one part, of two parts, of three parts, or of four parts. The best way is to bind these parts into one volume according to the name of the book, but my budget is not enough to do so. Therefore I decided to keep each book in one case (if possible) which should have its name on it. Of course those which have more than three parts may be sepatated into two or three cases. This theory is how to think about the method of combining the parts and cases.