

氏名	瀬戸 和希		
学位の種類	博士（理学）		
学位記番号	総博甲第125号		
学位授与年月日	平成30年3月23日		
学位授与の要件	学位規則第4条第1項		
文部科学省報告番号	甲第621号		
専攻名	総合理工学専攻		
学位論文題目	A convergence property of Picard iteration, a fixed set theorem, and Crouzeix characterization in set-valued convex analysis (集合値凸解析における Picard iteration の収束性, 不動集合定理, および Crouzeix の特徴付け)		
論文審査委員	主査	島根大学教授	黒岩 大史
		島根大学教授	杉江 実郎
		島根大学教授	中西 敏浩

論文内容の要旨

集合値写像の凸性や準凸性、および不動点の概念は、凸解析学および集合値解析学のいずれにおいても重要である。例えば、凸関数の劣微分は集合値写像であり、凸最適化問題の最小解は劣微分のリゾルベントの不動点として特徴付けられる。またゲーム理論の均衡点は集合値写像を用いて表現され、均衡点の存在性定理の証明には凸性の仮定と角谷の不動点定理が用いられる。本論文においては、凸解析および集合値解析の理論に基づき、集合値写像の準凸性の概念と不動点定理について研究を行うものである。

集合値写像の凸性や準凸性の概念は、集合値解析における問題を考察する際には重要な動きをしており、先行研究において、様々な概念がそれぞれの著者によって別々に導入されている。しかしながら、これらの準凸性の概念は適切には分類されておらず、どれくらいの数があるのかについても正確には分かっていなかった。また Crouzeix による凸関数の準凸性からの特徴付け (1977, [1]) は、集合値写像についても観察がなされている (Kuroiwa, Popovici, Roca, 2015, [2]) もの、どの準凸性の概念までがこの特徴付けが可能なのかは、これまで観察されていなかった。

不動点定理の研究は、主に完備距離空間上の不動点定理と、コンパクト凸集合上の連続関数に対する不動点定理の二つが主流である。完備距離空間上の不動点定理は、(T1) から (T4) までの4種類に分類されている (Suzuki, 2008, [3])。先行研究において、収束性は Picard iteration という力学系でも用いられる反復法によって生成された点列について考察されており、縮小写像の不動点定理 (Banach, 1922, [4]) を含む (T1) の研究が多くの研究者によってなされている。しかしながら複数の不動点を持つクラスである (T3) に関する先行研究は少なく、実用上用いることができる十分条件の研究は、我々が知る限り Subramanyam (1974, [5]) によるもののみであ

る。一方で、コンパクト凸集合上の連続関数に対する不動点定理は、Brouwer の不動点定理 (1910, [6, 7]) が最も古く、その後さまざまな拡張がなされ、ハウスドルフ線形位相空間のコンパクト凸集合上の連続関数が不動点を持つという Schauder の不動点定理 (Schauder, 2001, [8]) が有名である。また Brouwer の不動点定理を集合値写像へと拡張した角谷の不動点定理 (1941, [9]) は有名であり、ジョン・ナッシュによってゲーム理論の均衡点定理を証明するために用いられている。しかしながら、集合族上の写像に関する先行研究は少なく、Schauder の不動点定理の拡張にあたるものは我々の知る限り見つけられていない。

このような先行研究の状況を鑑み、博士論文においては主として次のことを述べる：

- 集合値写像の準凸性について、1 型と u 型の二項関係での分類を行い、Crouzeix の特徴付けが可能となる概念を全て調べる。
- (T3) に属し、Subramanyam が述べたものとは別の不動点定理、すなわち複数の不動点を持つ写像の Picard iteration で生成される点列の収束性に対する十分条件を与える。
- コンパクト凸集合族上で定義されているハウスドルフ連続な写像に対する不動集合定理を述べ、Schauder の不動点定理の拡張となっていることを示す。

本論文の構成は次の通りである。第 1 章では、主定理を導出するために必要である凸解析学の基本的概念について述べる。第 2 章では、集合値写像の準凸性の概念を考察する。集合上で定義されている二項関係のうち、実用上最も意味があると考えられている 1 型と u 型の二項関係に絞って準凸性を分類し、結果として 1 型と u 型の準凸性が、それぞれ 5 種類および 7 種類となることを示す。その分類をもとにして Crouzeix の特徴付けを考察し、結果として凸関数の拡張で Jahn の準凸性に含まれる全ての準凸性のクラスについて Crouzeix の特徴付けが成立することを示す。第 3 章では、完備距離空間上の写像とコンパクト凸集合族上の写像に関する不動点定理を考察する。まずは完備距離空間上の不動点定理のうち、主として (T1) と (T3) に属する先行研究を述べ、Subramanyam とは異なる (T3) に属する不動点定理、すなわち複数の不動点を持つ写像の Picard iteration で生成される点列の収束性について、(T1) の研究の流れに沿って Meir-Keeler 型の不動点定理として導出する。この結果を用いて完備距離空間上の集合値写像における不動点定理を考察する。また、コンパクト凸集合族上で定義されているハウスドルフ連続な写像に対する不動集合定理を考察し、証明を与える。証明にはコンパクト凸集合族の埋め込み手法を用いる。またこの定理が Schauder の不動点定理の拡張となっていることを示し、不動集合が一点集合とはならない状況について観察する。

- [1]Crouzeix J-P. Contribution a l'`etude des fonctions quasiconvexes`, University of Clermont-Ferrand II ; 1977.
- [2]Kuroiwa D, Popovici N, Rocca M. A characterization of coneconvexity for set-valued functions by cone-quasiconvexity. Set-Valued Var. Anal. 2015;23(2):295-304.
- [3]Suzuki T. A sufficient and necessary condition for convergence of the successive approximations to a unique fixed point. Proc. Amer. Math. Soc. 2008;136:4089-4093.
- [4]Banach S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales. Fund. Math. 1922;3:133-181.
- [5]Subrahmanyam PV. Remarks on some fixed point theorems related to Banach's contraction. J. Math. Phys. Sci. 1974 ; 8:445-457.
- [6]Brouwer L. E. J. Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten Mathematische Annalen 1911;71:97-115.
- [7]Hadamard J. Note sur quelques applications de l'indice de Kronecker in Jules

Tannery: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable (Volume 2), A. Hermann & Fils, Paris 1910: 437-477.

[8] Cauty R. Solution du problème de point fixe de Schauder, Fund. Math. 2001 ; 170 : 231-246.

[9] Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Mathematical Journal 1941; 8(3): 457-459.

論文審査結果の要旨

集合値解析学および凸解析学において、写像の凸性・準凸性と不動点の概念は相互に関連しており、重要な研究テーマである。例えば凸関数の劣微分は集合値写像であり、凸最適化問題の最小解は劣微分のリゾルベントの不動点として特徴付けられ、またゲーム理論の均衡点は集合値写像を用いて表現され、均衡点の存在性定理の証明には凸性の仮定と角谷の不動点定理が用いられる。本提出論文では、集合値解析学および凸解析学の観点から集合値写像の準凸性の概念と不動点定理に関する研究を行うものである。

先行研究において、集合値写像の凸性や準凸性については、それぞれの著者の観点から様々な概念が別々に導入されているが、これらの概念は適切には分類されておらず、また **Crouzeix** の特徴付けがどの準凸性の概念までが可能かについても知られていない。完備距離空間上の不動点定理は、一般には **Picard iteration** という反復法によって生成された点列を考慮するが、複数の不動点を持つ自己写像についての不動点定理についての研究はほとんどされておらず、我々が知る限り **Subramanyam** によるもののみである。またコンパクト凸集合上の連続関数に対する不動点定理は、**Brouwer** の不動点定理が最も有名であるが、集合族上で定義された自己写像に対する不動点定理についてもほとんど観察がなされていない。申請者はこのような先行研究の状況を鑑み、主として、1型・u型と呼ばれる二項関係での集合値写像の準凸性の分類、**Crouzeix** の特徴付けが可能となる概念の列挙、複数の不動点を持つ写像の **Picard iteration** で生成される点列の収束性に対する十分条件、およびコンパクト凸集合族上で定義されているハウスドルフ連続な写像に対する不動集合定理、について研究を行った。

本提出論文は、レフリー制度の整った国際誌に掲載済みあるいは掲載決定の3編の関連論文を元にして構成されている。第1章では、主定理を導出するために必要である凸解析学の基本的概念について述べており、第2章では、集合値写像の準凸性の概念を考察しており、集合上で定義され、実用上最も意味があると考えられている1型とu型の二項関係に絞って準凸性を分類し、結果として1型とu型の準凸性が、それぞれ5種類および7種類となることを示している。その分類をもとにして **Crouzeix** の特徴付けを考察し、結果として凸関数の拡張で **Jahn** の準凸性に含まれる全ての準凸性のクラスについて **Crouzeix** の特徴付けが成立することを示した。第3章では、完備距離空間上の写像とコンパクト凸集合族上の写像に関する不動点定理を考察し、**Picard iteration** で生成される点列の収束性について、**Subramanyam** とは異なる複数不動点を持つ自己写像に対する不動点定理を導いた。また、コンパクト凸集合族上で定義されているハウスドルフ連続な写像に対する不動集合定理を述べ、埋め込み空間のアイデアを用いて証明を与えた。

このように、本提出論文には十分に価値のある研究結果が含まれている。これらの結果は集合

値解析学、凸解析学における既存の結果を発展させたものであり、申請者による研究の価値は十分に大きい。以上の理由により、本提出論文は本研究科の課程博士の学位授与に値するものと判断する。