

Parametrically excited oscillations of
the Mathieu equation and
the Whittaker-Hill equation

(Mathieu 方程式及び Whittaker-Hill 方程式に関する係数励振振動)

平成30年3月

石橋 和葵

島根大学大学院総合理工学研究科

謝辞

本博士論文を作成するにあたり，杉江実郎教授から，丁寧かつ熱心であり，時には厳しく，時には優しい愛情が溢れたご指導を賜りました。深甚なる感謝の意を表明します。また，黒岩大史教授，和田健志教授，山田拓身准教授には本博士論文をご精読頂き，有用なコメントを賜りました。また，岡山理科大学で勤務されている，田中敏教授，鬼塚政一先生，そして大阪府立大学に勤務されている，松永秀章教授，山岡直人准教授，さらに，東北師範大学の呉奮韜教授には研究遂行にあたり有益なご指摘ありがとうございました。この場をお借りして御礼申し上げます。最後に，今まで一緒に頑張ってきた同期の皆様，暖かく見守って下さった後輩の皆様，陰ながら支えて下さった両親家族に厚謝致します。

目次

謝辞	iii
序文	1
準備	5
1 Mathieu 方程式に対する解の振動問題	8
1.1 先行研究と主結果	8
1.2 周期係数をもつ 2 階線形微分方程式	13
1.3 主結果の証明	16
1.4 先行結果と主結果との比較	20
1.5 一般化された Mathieu 型方程式に対する非振動定理	26
2 振動定数をもつ Whittaker-Hill 型方程式	32
2.1 主結果	32
2.2 減衰係数をもつ Hill 方程式の振動及び非振動定理	37
2.3 主結果の証明	44
2.4 数値シミュレーション	51
3 二つの角速度をもつ Mathieu 方程式の解の振動問題	53
3.1 主結果	53
3.2 主結果の証明	56
3.3 パラメータ非振動領域	61
4 半分線形微分方程式の解の振動問題	63
4.1 先行研究と主結果	63
4.2 半分線形微分方程式に関する同値変換	67
4.3 主結果の証明	75
4.4 具体例	78
参考文献	80

序文

遊具のブランコの一人乗りの揺らし方は、いくつかのパラメータを周期的に変化させることによって振幅が拡大する振動現象である。実際に、人間がブランコを漕ぐとき、屈伸運動を繰り返すことで体の重心の移動も繰り返されて振幅が大きくなっていく。これは周期的に支点から重心までの位置を上下に変化させることで、振幅が徐々に成長していくからである。つまり、重心の位置をパラメータとして振動を励起させている訳である。このような現象を係数励振と呼ぶ。係数励振のメカニズムをもつ物理現象はブランコだけではなく、地震時に地盤が揺れることで建物の揺れが勢いづいて増幅する現象も係数励振を引き起こしている。実社会においては、地震時の建物倒壊を防ぐためにも設計技術者は係数励振を避けるように設計しなければならないという課題がある。

係数励振の先駆的研究として、フランスの数学者 Émile Léonard Mathieu [39] は楕円型太鼓膜の振動に関する研究を行い、2階線形微分方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta \cos(2t))x = 0, \quad t \geq 0,$$

を導いた。ここで、パラメータ α と β は任意の実数である。この方程式は後に彼の名前に因んで、Mathieu 方程式と呼ばれている。Mathieu 方程式はインダクタンスが周期的に変化する電気回路やファラデー波の実験、音叉と弦の実験、鉄道車両におけるパンタグラフの架線からの離線現象などにも登場する。また、Mathieu 方程式は偏微分方程式にも重要な関わりがある。例えば、波動方程式や拡散方程式などを変数分離法によって、空間座標のみに依存する関数を取り出すと、電磁波や音響学、地震学などでよく扱われる Helmholtz 方程式が導かれ、Helmholtz 方程式を円柱座標変換すると、Mathieu 方程式と Mathieu 修正微分方程式に分離されることが

知られている。このように、Mathieu 方程式は、物理学や工学分野に深い関係を有している。

Mathieu 方程式は過去 150 年以上にわたって研究され続けてきた。ただし、その中心となってきたのは解の安定性理論であり、具体的にパラメータ α と β を決めた Mathieu 方程式の解を数値解法によって近似的に求めるような研究が大部分であった。しかし、Mathieu 方程式の解構造を探るためには、解の安定性だけではなく、振動性や有界性、周期解の存在性などの定性的理論の構築が不可欠である。

本論文の目的は、Mathieu 方程式の解の振動性に関する判定法を与えることである。恒等的に零である関数は Mathieu 方程式の一つの解である。これは自明解と呼ぶ。Mathieu 方程式は、2 階線形微分方程式であるから、初期値を与えるとそれに依存する唯一の解が未来永劫存在すること（初期値に関する解の一意性と大域的存在性）は保証されている。したがって、Mathieu 方程式の任意の大域解を次の二つに大別できる。

Definition 1. Mathieu 方程式の非自明解 $x(t)$ が

$$x(t_n) = 0 \quad \text{and} \quad t_n \rightarrow \infty \quad \text{as} \quad n \rightarrow \infty$$

を満たす数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するとき、その解は振動するという。

Definition 2. Mathieu 方程式の非自明解 $x(t)$ が十分大きな時刻 t^* に対して

$$x(t) \neq 0 \quad (t \geq t^*)$$

を満たすとき、その解は振動しないという。

上述した二つの定義を簡単に述べると、Mathieu 方程式の非自明解 $x(t)$ が無限個の零点をもつとき、その解は振動するという。一方、Mathieu 方程式の非自明解 $x(t)$ が高々有限個の零点しか持たないとき、その解は振動しないという。この定義は、Mathieu 方程式のみならず、一般的な 2 階線形微分方程式の解構造を探るときに利用される。このように、振動・非振動の観点から、方程式の解構造を探るのが振動理論である。既に、Leighton [36], El-Sayed [16], Sun, Ou and Wong [55] らによって、

Mathieu 方程式の解が振動するための十分条件は得られていた。特に, Leighton [36] は, Mathieu 方程式のすべての非自明解が振動するためにパラメータ α と β が満たすべき条件を, 漸化式を用いて与えた。しかし, 具体的な α (または β) の値から対応する β (または α) の厳密な値を手計算で与えることは一般には不可能であり, 計算機を用いて得られる近似値で我慢しなければならない。しかも, α (または β) の値を変えれば, また同じプロセスを経なければならず, Mathieu 方程式の解構造全体を見通すことは困難である。したがって, 計算機を用いずとも手計算によって, 非自明解の振動・非振動を容易に判定できる条件を与えることは, 極めて有意義であると言える。本研究では, このような判定法の導出を目指した。

本論文は4章からなり, 以下に各章の概要を記す。

第1章では, Mathieu 方程式の解の振動問題を考察する。特に, Mathieu 方程式の係数の角速度 2 から任意の正の実数 ω に一般化した 2 階線形微分方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta \cos(\omega t))x = 0, \quad t \geq 0,$$

を考える。この一般化された Mathieu 方程式のすべての非自明解が振動する (または振動しない) ことを保証する各パラメータ (α, β, ω) に関する十分条件を導出する。得られた条件が満たされるか否かは手計算でも容易に判別できる。また, Leighton [36], El-Sayed [16], Sun, Ou and Wong [55] による先行結果と比較する。

第2章では, Mathieu 方程式の係数項をより一般化した 2 階線形微分方程式

$$y'' + (\lambda + 4mq \cos(2t) + 2q^2 \cos(4t))y = 0, \quad t \geq 0,$$

の解の振動性を考察する。ただし, λ と q は実数であり, m は自然数である。この方程式は, Whittaker-Hill 方程式と呼ばれている。Magnus and Winkler [38] によれば, Mathieu 方程式や Ince 方程式などの周期係数をもつ線形微分方程式のみならず, 合流型超幾何微分方程式など様々な方程式と深い関係をもつことが報告されている。しかし, Whittaker-Hill 方程式は, 二つの角速度をもっているため, Mathieu 方程式に比べて数学解析は一段と難しくなる。本論文では, Whittaker-Hill 方程式がもつパラメータを $m = 1$ かつ $q = 1/2$ と定めたとき, 残りのパラメータ λ がどのような条件を満たせば, すべての非自明解が振動する (または振動しない) のかを明確に

分類する.

第3章では, 二つの角速度をもつ2階線形微分方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta \cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t))x = 0, \quad t \geq 0,$$

の解の非振動性を考察する. ただし, 二つの角速度 ω_1 と ω_2 は正の実数である. これらの比率 ω_1/ω_2 が有理数ならば, この方程式の係数 $-\alpha + \beta \cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t)$ は周期関数となる. 一方, 比率 ω_1/ω_2 が無理数ならば, 係数は周期関数ではなく, 準周期関数となる. したがって, フロッケの理論と呼ばれる, 周期係数をもつ線形微分方程式の定性的理論を考察する, よく知られた手法を適用することはできない. 我々は, フロッケの理論の穴を埋める解析方法を構築し, 係数が準周期関数である場合にも, すべての非自明解が振動しないことを保証する条件を与える.

第4章では, 2階非線形微分方程式の解の振動性について考察する. 第1章から第3章で扱った線形微分方程式では, 解の定数倍も解になり (斉次性), 二つの解の和も解になる (加法性) が, 本章では, 斉次性のみが成り立つような非線形微分方程式を研究対象とする. このような方程式は, 線形微分方程式がもつ性質の半分だけをもつことから, 半分線形微分方程式と呼ばれている. 本論文では, 半分線形微分方程式のすべての非自明解が振動するための十分条件を与える.

準備

2階線形微分方程式の解の振動性に関して、極めて重要となる理論を紹介する。振動理論の研究は、1836年フランスの数学者 Jacques Charles François Sturm [50] が与えた比較定理から始まった。彼が与えた比較定理を以下に提示する。

Sturm の比較定理. 二つの線形微分方程式

$$(r(t)y')' + c(t)y = 0, \quad (S1)$$

$$(R(t)Y')' + C(t)Y = 0 \quad (S2)$$

を考える。ただし、 r , R , c , C は実連続関数である。任意の $t \in [a, b]$ に対して

$$r(t) \geq R(t) > 0, \quad c(t) \leq C(t)$$

である。このとき、 $y(a) = y(b) = 0$ をみたす方程式 (S1) の非自明解 $y(t)$ が存在すれば、方程式 (S2) のすべての解 $Y(t)$ は $[a, b]$ 内に少なくとも零点を一つもつ。

Sturm の比較定理は大雑把に言えば、2階線形微分方程式の解の零点の個数と方程式の係数関数との関係を表したものである。多少荒っぽいだが、 r が小さく、 c が大きいほど、方程式 (S1) の解の零点の個数は増えるという具合に覚えておくと便利である。例えば、次の二つの微分方程式

$$y'' + y = 0, \quad (s1)$$

$$Y'' + \lambda Y = 0 \quad (s2)$$

を考える。ただし、 $\lambda > 0$ である。Sturm の比較定理を利用すれば、方程式 (s2) の解

$Y(t)$ が区間 $(0, \pi)$ で少なくとも一つ零点をもつためには, $\lambda > 1$ であれば良いことがわかる. 実際, 方程式 (s1) は $y(t) = \sin t$ という解をもつことは明らかであるから, 解 $y(t)$ は任意の $t \in (0, \pi)$ に対して, $y(0) = y(\pi) = 0$ かつ $y(t) \neq 0$ となる. 一方, 方程式 (s2) の一般解を求める. 方程式 (s2) の特性方程式を考えれば, $r^2 + \lambda = 0$ であるから, $r = \pm\sqrt{\lambda}i$ となる. したがって, 方程式 (s2) の一般解は, 任意の定数 C_1 と C_2 に対して

$$Y(t) = C_1 \sin \sqrt{\lambda}t + C_2 \cos \sqrt{\lambda}t = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(\sqrt{\lambda}t + \theta)$$

である. ここで, θ は定数 C_1 と C_2 によって定まることに注意しておく. 次に, 方程式 (s2) の解 $Y(t)$ の零点の間隔を吟味するために, (i) $\sqrt{\lambda}t + \theta = 0$ と (ii) $\sqrt{\lambda}t + \theta = \pi$ を考える. (i) の場合は, $t = -\theta/\sqrt{\lambda}$ であるから, $Y(t) = 0$ である. 一方, (ii) の場合は, $t = (\pi - \theta)/\sqrt{\lambda}$ であるから, $Y(t) = 0$ である. ゆえに, 方程式 (s2) の解 $Y(t)$ の零点の間隔は $\pi/\sqrt{\lambda}$ である. したがって, $\pi/\sqrt{\lambda} < \pi$ から, $\lambda > 1$ であることがわかり, 方程式 (s2) の解 $Y(t)$ が区間 $(0, \pi)$ で少なくとも一つ零点をもつ.

上述した Sturm の比較定理を利用すれば, 線形微分方程式の解の振動性を考察するためには必要不可欠となる以下の結果が知られている.

Proposition 1. 方程式 (S1) の一つの非自明解が振動する (または, 振動しない) とき, 方程式 (S1) のすべての非自明解も振動する (または, 振動しない).

Proposition 2. 二つの微分方程式 (S1) と (S2) を考える. ただし, r, R, c, C は実連続関数である. 任意の $t \geq t_0 \geq 0$ に対して

$$r(t) \geq R(t) > 0, \quad c(t) \leq C(t)$$

とする. このとき, 次の (i) と (ii) が成り立つ.

- (i) 方程式 (S1) のすべての非自明解が振動するならば, 方程式 (S2) のすべての非自明解も振動する.
- (ii) 方程式 (S2) のすべての非自明解が振動しないならば, 方程式 (S1) のすべての非自明解も振動しない.

命題 1 から，方程式 (S1) のすべての非自明解は振動するか，または，振動しないかは，どちらか一方である．すなわち，振動する解と振動しない解は共存しない．この命題 1 は Sturm の分離定理と呼ばれている．詳しくは，Swanson [56, p. 5] を参照してほしい．

Chapter 1

Mathieu 方程式に対する解の振動問題

1.1 先行研究と主結果

本章では，係数励振現象を記述する 2 階線形微分方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta \cos(\omega t))x = 0 \quad (1.1)$$

を考える。ただし， α と β は実数，角速度 ω は正の実数である。もし $\omega = 2$ ならば，方程式 (1.1) は Mathieu 方程式である。序文でも既述したように，Mathieu 方程式は物理学や工学分野に深い関係を有している。実際に，Mathieu 方程式は支点が垂直方向に周期的に振動する倒立振り子の線形モデルである ([42] を参照せよ)。また，天体力学の研究 ([3, 4] を参照) と周期的に張力が変化する弦の振動 (メルデの実験) にも由来している。さらに，流体力学では，Mathieu 方程式から多くの波の例を見つけることができる。例えば，ファラデーの表面波の研究は非常に活発的である (詳しくは，[2, 7, 18, 46] 参照せよ)。そして，電磁波や音響学，地震学などで扱われる Helmholtz 方程式と関係がある。二次元 Helmholtz 方程式

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0$$

に対して，次のように

$$x = c \cosh \xi \cos \eta \quad \text{かつ} \quad y = c \sinh \xi \sin \eta$$

として、直交座標 (x, y) から円柱座標 (ξ, η) に変換すれば

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{c^2 k^2}{2} (\cosh(2\xi) - \cos(2\eta)) V = 0$$

となる。ただし、 $V(\xi, \eta) = U(x, y)$ である。ここで、 $V(\xi, \eta) = R(\xi)\Phi(\eta)$ とおくことで、Mathieu 方程式

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + (a - 2q \cos(2\eta)) \Phi = 0$$

及び Mathieu 修正微分方程式

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} - (a - 2q \cosh(2\xi)) R = 0$$

が得られる。ただし、 a は分離定数であり、パラメータ $q = c^2 k^2 / 4$ である。Mathieu 方程式のその他の応用については、McLachan [40] が参考になる。

McLachan [40, p. 29] の文献に記載されている方法を用いれば、Mathieu 方程式に対する最大の振動領域の境界を決定することができる。具体的にその境界は、次の無限連分数

$$\alpha = \frac{\beta^2}{2(4 + \alpha) -} \frac{\beta^2}{2(16 + \alpha) -} \frac{\beta^2}{2(36 + \alpha) -} \frac{\beta^2}{2(64 + \alpha) -} \cdots \frac{\beta^2}{2(4n^2 + \alpha) -} \cdots \quad (1.3)$$

によって記述される（ただし、 n は自然数である）。より正確に言えば、 $\beta^2(\alpha)$ は、与えられた値 $\alpha > 0$ に対応する方程式

$$\alpha = \frac{\lambda}{2(4 + \alpha) -} \frac{\lambda}{2(16 + \alpha) -} \frac{\lambda}{2(36 + \alpha) -} \frac{\lambda}{2(64 + \alpha) -} \cdots \frac{\lambda}{2(4n^2 + \alpha) -} \cdots$$

の最小の正の根である。ここで、 $\alpha > 0$ を正の定数とする。このとき、 $\alpha = \alpha_0$ かつ $\beta > |\beta(\alpha_0)|$ ならば、Mathieu 方程式のすべての解は振動する。そうでないとき、すなわち、 $\alpha = \alpha_0$ かつ $\beta \leq |\beta(\alpha_0)|$ ならば、Mathieu 方程式のすべての解は振動しないことがわかる。しかし、残念ながら方程式 (1.3) の右辺は無限連分数の形をしているから、正確な値 $\beta(\alpha_0)$ を計算するのは非常に困難である。また、次の方程式

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{2(4 + \alpha_0) -} \frac{\lambda}{2(16 + \alpha_0) -} \frac{\lambda}{2(36 + \alpha_0) -} \frac{\lambda}{2(64 + \alpha_0) -} \cdots \frac{\lambda}{2(4n^2 + \alpha_0) -}$$

の最小の正の根を $\beta_n^2(\alpha_0)$ とする. 上述した方程式は, 有限連分数である. その有限連分数を用いて, Mathieu 方程式の振動しない解を示すことが困難であることを説明する. 有限連分数に対して, 正しい $\beta_n^2(\alpha_0)$ の値を見つけることができたとしても, それは近似値の上限である. 言い換えれば, $\beta_n^2(\alpha_0)$ は自然数 n を無限大としたとき, 制限値 $\beta^2(\alpha_0)$ に近づくことがわかる. したがって, $\alpha = \alpha_0$ かつ $\beta = \beta_n(\alpha_0)$ の場合は, Mathieu 方程式のすべての非自明解が振動しないとは限らない.

本章の目的は, 上述したように, 方程式 (1.3) の不都合を避けるために, 方程式 (1.1) のすべての非自明解が振動する (または, 振動しない) ための明確でかつ手計算によって容易に確かめられる条件を与える.

解の振動性に関する基礎知識を紹介するため, 方程式 (1.1) より一般的な方程式

$$x'' + c(t)x = 0 \quad (1.4)$$

を考える. ただし, 係数 c は周期 $T > 0$ をもつ周期関数である. 方程式 (1.4) は Hill 方程式と呼ばれており, 天体力学の問題でよく利用されている方程式である (例えば, [22, 38, 40] を参照せよ). Hill 方程式は, 衛生の安定性や四重極質量分析計のモデリング, 加速器科学において, 多くの応用が考えられており, Hill 方程式の解構造を探ることは極めて重要である.

序文で述べたように, 一般的な 2 階線形微分方程式 (1.4) の初期値に関する解の一意性とすべての解の時間大域的存在性は保証されているから, 方程式 (1.4) のすべての解に対する振動性を議論することは可能である. 方程式 (1.4) の非自明解が振動するとは, 解が発散する無限個の零点列をもつときをいう. すなわち, 方程式 (1.4) のある非自明解 $x(t)$ に対して

$$x(t_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$$

を満たす数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するとき, その解は振動するという. 逆に, 方程式 (1.4) の非自明解が振動しないとは, 解が有限個の零点しかもたないときをいう. すなわち, 方程式 (1.4) のある非自明解が十分大きな時刻 t^* に対して

$$x(t) \neq 0 \quad (t \geq t^*)$$

を満たすとき、その解は振動しないという。また、序文でも記述したように、方程式 (1.4) のような線形微分方程式の場合、Sturm の分離定理から、一つの解が振動しないならば、すべての非自明解も振動しないことがよく知られている。

方程式 (1.4) に対する振動問題は古くから現在まで研究されてきた。例えば、Sturm の比較定理 ([56, p. 45] 参照) から、十分大きな時刻 t に対して、係数 c が非正ならば、方程式 (1.4) のすべての非自明解は振動しない。また、方程式 (1.4) の周期係数 c が

$$\int_0^T c(t) dt = 0 \quad \text{かつ} \quad c(t) \not\equiv 0$$

を満たすならば、方程式 (1.4) のすべての非自明解は振動する。これは、周期関数 c が周期 T の periodic of mean value zero をもつと呼ばれている (証明は [8, p. 25] を参照せよ)。periodic of mean value zero の性質については第 2 章の第 2.2 節で具体的に紹介する。

これらの結果を方程式 (1.1) に適用すれば

$$\alpha \geq |\beta|$$

ならば、方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動しない。実際、任意の $t \geq 0$ に対して

$$-\alpha + \beta \cos(\omega t) \leq -\alpha + |\beta| \leq 0$$

であるから、方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動しないことがわかる。また、 $\alpha = 0$ かつ $\beta \neq 0$ のとき

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \beta \cos(\omega t) dt = 0$$

であるから、方程式 (1.1) の係数は周期 $2\pi/\omega$ の periodic of mean value zero をもつ。つまり、 $\alpha = 0$ かつ $\beta \neq 0$ の場合は方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動する。さらに、Sturm の比較定理から、 $\alpha < 0$ かつ $\beta \neq 0$ ならば、方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動する。そして、 $\alpha < 0$ かつ $\beta = 0$ 場合の方程式 (1.1) は定数係数をもつ 2 階線形微分方程式であるから、解は具体的に求めることが可能であり、方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動することがわかる。以上の理由から、考察すべき場

合は

$$0 < \alpha < |\beta|$$

である．本章では，上述した考察すべき場合にも適用可能な方程式 (1.1) のすべての非自明解が振動する（または振動しない）ことを保証する条件を報告する．

Theorem 1.1. もし

$$\alpha > 0 \quad \text{かつ} \quad |\beta| \geq \omega\sqrt{2\alpha} + \alpha \quad (1.5)$$

ならば，方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動する．

Theorem 1.2. もし

$$\alpha > 0 \quad \text{かつ} \quad |\beta| \leq \frac{\omega\sqrt{2\alpha}}{2} + \alpha \quad (1.6)$$

ならば，方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動しない．

定理 1.1 と定理 1.2 は，与えられた値 $\alpha > 0$ に対して，条件 (1.5) と (1.6) を満たす β の値を計算することは非常に簡単である．逆に，与えられた値 $\beta \in \mathbb{R}$ に対しては，条件 (1.5) と (1.6) を満たす α の正の値を得ることも困難ではない．なぜなら， α についての二次方程式を解くことができるからである．ゆえに，本結果は手計算によってそれぞれの α と β の値を容易に得ることができる．また，定理 1.1 と定理 1.2 の条件 (1.5) と (1.6) から，角速度 ω が大きいとき，方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動しにくく，小さいときはすべての非自明解は振動しやすいことがわかる．

Mathieu 方程式のすべての非自明解が振動するための十分条件は既に El-Sayed [16] によって与えられている．定理 1.1 に対しては，彼の結果を含んでいる（詳細は第 1.4 節で紹介する）．一方，一般化された Mathieu 方程式 (1.1) のすべての非自明解が振動しない条件は今までに報告されていないが，定理 1.2 から明らかにすることができた．

ここで，Mathieu 方程式は次の方程式

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + (-\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \sin(\tilde{\omega} t))z = 0 \quad (1.7)$$

に同値変換できる．ただし， $\tilde{\alpha} = \alpha(\tilde{\omega}/\omega)^2$ ， $\tilde{\beta} = \beta(\tilde{\omega}/\omega)^2$ である．実際，一般化された Mathieu 方程式 (1.1) の解を $x(t)$ として

$$\tilde{\omega} s = \omega t + \pi/2 \quad \text{かつ} \quad z(s) = x(t)$$

と変数変換をすれば

$$\frac{dz}{ds} = x' \frac{dt}{ds} = \frac{\tilde{\omega}}{\omega} x'$$

であるから

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{\tilde{\omega}}{\omega} x'' \frac{dt}{ds} = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\omega}\right)^2 \left(\alpha - \beta \cos\left(\tilde{\omega} s - \frac{\pi}{2}\right)\right) x = \left(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \sin(\tilde{\omega} s)\right) z$$

が得られる．したがって，一般化した Mathieu 方程式 (1.1) のすべての非自明解が振動する（または，振動しない）ことと，方程式 (1.7) のすべての非自明解が振動する（または，振動しない）ことは同値であることがわかる．

Sun et al. [55] は外力をもつ Mathieu 方程式のすべての非自明解が振動するための十分条件を与えている．彼らの条件には，外力を加えた場合にも適用できるという利点がある．しかし，残念なことに彼らの条件は外力をもたない方程式 (1.7) の場合においては，El-Sayed の条件を改善してはいない．第 1.4 節では，El-Sayed の条件及び我々の条件 (1.5) と Sun et al. の結果との関係について述べる．さらに，定理 1.2 から Sun et al. らによって与えられている推測を数学的に反証する．Leighton [36] は， $\tilde{\omega} = 1$ の場合の方程式 (1.7) を考察して，無限連分数 (1.3) と密接な関係にある振動基準を提示した ([34] も参照せよ)．我々の結果は，第 1.4 節で Leighton の結果と比較する．第 1.5 節では，非周期的な係数をもつ Mathieu 方程式にも適用できるように，定理 1.2 を拡張する．

1.2 周期係数をもつ 2 階線形微分方程式

2 階線形微分方程式

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{1.8}$$

を考える。ただし、関数 a と b は周期 T をもつ周期関数である。一般に方程式 (1.8) の左辺の第二項を減衰係数と呼び、左辺の第三項を復元係数と呼ぶ。この方程式は、振り子やバネの運動などの振動現象を記述する微分方程式のモデルとして有名であり、純粋数学のみならず応用化学、工学の分野で取り扱われる。このような理由から、方程式 (1.8) やそれを一般化した非線形微分方程式のすべての非自明解が振動または振動しないことを保証する条件を見つけるため、多くの論文が挙げられている。例えば、参考文献として [1, 6, 19, 52, 59–63] を挙げるができる。これらの結果は、それぞれ振動定理及び非振動定理と呼ばれている。

この章と密接な関係をもつ振動定理として、Sugie and Matsumura [52] によって与えられた以下の結果を挙げるができる。

Theorem A. 関数 a が *periodic of mean value zero* をもつ周期 T の周期関数とする。関数 B は b のある不定積分として、次の周期 T をもつ周期関数

$$E(t) = \exp \int_0^t (a(s) - 2B(s)) ds$$

を定義する。もし B が *periodic of mean value zero* をもつ周期 T の周期関数でかつ

$$\int_0^T E(t)(B(t) - a(t))B(t) dt > 0 \quad (1.9)$$

を満たすならば、方程式 (1.8) のすべての非自明解は振動する。

Remark 1.1. a と B が *periodic of mean value zero* をもつ周期 T の周期関数であるから、関数 E も周期 T の周期関数である。

Kwong and Wong [33] は既に定理 A に対応する次の非振動定理を与えている。

Theorem B. 関数 B が b のある不定積分とし、 b は *periodic of mean value zero* をもつ周期 T の周期関数とする。このとき、任意の $0 \leq t \leq T$ に対して、関数 B が次の不等式

$$(B(t) - a(t))B(t) \leq 0 \quad (1.10)$$

を満たすならば，方程式 (1.8) のすべての非自明解は振動しない。

定理 A と B は，周期係数をもつ 2 階線形微分方程式のみに適用できるが，方程式 (1.1) や方程式 (1.8) の係数が非周期的な場合には適用することができない。しかしながら，以下の Sugie [51] によって与えられた定理 C は，非周期的な Mathieu 方程式にも適用可能な結果である。

Theorem C. (u, v) –平面の第 1 象限に対して，次の領域

$$R = \{(u, v) : u \geq 0 \text{ and } 0 \leq v \leq u^2/4\}$$

を定義する。領域 S は R 内で有界閉凸集合と仮定する。このとき，十分大きな時刻 T で，任意の $t \geq T$ に対して

$$(a(t), b(t)) \in S \tag{1.11}$$

ならば，方程式 (1.8) のすべての非自明解は振動しない。

Remark 1.2. 集合 S が u 軸に含まれるとき $b(t) \equiv 0$ であり，定理 C は明らかである。実際に， $b(t) \equiv 0$ であるから，考える方程式 (1.8) は

$$x'' + a(t)x' = 0$$

となる。また， $y = x'$ とおくことによって，その方程式と同値な方程式系は

$$x' = y,$$

$$y' = -a(t)y$$

となる。 $y' = -a(t)y$ は解けるから，任意の $t \geq t_0$ に対して，解 $y(t)$ は

$$y(t) = y(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$$

である。解 $y(t)$ の符号は常に正か負であり、 $x' = y$ に代入すれば、解 $x(t)$ の符号も常に正か負となる。すなわち、 $b(t) \equiv 0$ の場合の方程式 (1.8) の非自明解は振動しないことがわかる。

定理 C は、方程式 (1.8) の係数関数 a と b のパラメータ曲線が十分大きな時刻で R 内に留まり続けられれば、方程式 (1.8) のすべての非自明解が振動しないことを述べている。定理 C についての具体的な解析方法と応用については、第 3 章の第 3.2 節または第 4 章で紹介する。

1.3 主結果の証明

定理 A と定理 B を用いて、第 1.1 節で提示された主定理を証明する（定理 C は第 1.5 節で使用する）。この目的を達成させるため、次の二つの周期係数

$$a(t) = 2\sqrt{2\alpha} \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right) \quad \text{かつ} \quad b(t) = \frac{\omega\sqrt{2\alpha}}{2} \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + (\beta - \alpha) \cos(\omega t) \quad (1.12)$$

をもつ方程式 (1.8) を考える。ここで、方程式 (1.8) の周期係数 (1.12) の周期は $4\pi/\omega$ である。

方程式 (1.1) に対して

$$x = y \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) d\tau\right)$$

とする。実際に、直接計算すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}a^2(t) + \frac{1}{2}a'(t) - \alpha + \beta \cos(\omega t) &= 2\alpha \sin^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) + \frac{\omega\sqrt{2\alpha}}{2} \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) - \alpha + \beta \cos(\omega t) \\ &= -\alpha \cos(\omega t) + \frac{\omega\sqrt{2\alpha}}{2} \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + \beta \cos(\omega t) = b(t) \end{aligned}$$

であることから

$$\begin{aligned} x'' + (-\alpha + \beta \cos(\omega t))x &= \left(y'' + a(t)y' + \left(\frac{1}{4}a^2(t) + \frac{1}{2}a'(t) - \alpha + \beta \cos(\omega t) \right) y \right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) d\tau\right) \end{aligned}$$

$$= (y'' + a(t)y' + b(t)y) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) d\tau\right)$$

がわかる. 方程式 (1.1) と係数 (1.12) をもつ方程式 (1.8) との関係性は, 方程式 (1.1) のすべての非自明解が振動する (または, 振動しない) ことと, 係数 (1.12) をもつ方程式 (1.8) のすべての非自明解が振動する (または, 振動しない) ことは同値である. 以下, 周期係数 (1.12) をもつ方程式 (1.8) に対して, 定理 A と定理 B を適用させて, 主定理を示す.

Proof of Theorem 1.1. 方程式 (1.1) に対して

$$s = t - \pi/\omega \quad \text{かつ} \quad z(s) = x(t)$$

と変数変換すれば, $z(s)$ は任意の $s \geq 0$ に対して

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + (-\alpha - \beta \cos(\omega s))z = 0 \quad (1.13)$$

を満たす. すなわち, 上述した変数変換を行うことによって, 方程式 (1.1) のすべての非自明解が振動することと方程式 (1.13) のすべての非自明解が振動することは同値である. 以上の理由から, $\beta \geq 0$ の場合のみを考える.

周期関数 b の不定積分 B を

$$B(t) = \sqrt{2\alpha} \sin \frac{\omega}{2} t + \frac{(\beta - \alpha)}{\omega} \sin(\omega t)$$

と選べば, 関数 B は periodic of mean value zero をもつ周期 $4\pi/\omega$ の周期関数であることがわかる. また, 周期関数 a も明らかに periodic of mean value zero をもつ周期 $4\pi/\omega$ の周期関数である. ここで

$$a(t) - 2B(t) = -\frac{2(\beta - \alpha)}{\omega} \sin(\omega t)$$

であるから

$$E(t) = \exp \int_0^t (a(\tau) - 2B(\tau)) d\tau = \exp\left(\frac{2(\beta - \alpha)}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1)\right)$$

となる。定理 1.1 の仮定である (1.5) から $\beta - \alpha \geq \omega\sqrt{2\alpha} > 0$ に注意すれば、 $E(0) = E(T/2) = E(T) = 1$ かつ $E(T/4) = E(3T/4) = \exp(-4(\beta - \alpha)/\omega^2)$ がわかる。ただし、 $T = 4\pi/\omega$ である。また、関数 E は、区間 $[0, T/4]$ と $[T/2, 3T/4]$ に対して単調減少し、区間 $[T/4, T/2]$ と $[3T/4, T]$ に対して単調に増加する。したがって、関数 E は最大値 1 と最小値 $\exp(-4(\beta - \alpha)/\omega^2)$ をもつ。また、関数 E のグラフは、直線 $t = T/4$ と $t = T/2$, $t = 3T/4$ に関して対象となる。さらに、関数 $(B - a)B$ を直接計算すれば

$$\begin{aligned} (B(t) - a(t))B(t) &= \frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) - 2\alpha \sin^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) \\ &= \frac{4(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) - \frac{\alpha\omega^2}{2(\beta - \alpha)^2} \right) \end{aligned}$$

となる。そして、定理 1.1 の条件 $\beta - \alpha \geq \omega\sqrt{2\alpha}$ によって

$$0 < \frac{\alpha\omega^2}{2(\beta - \alpha)^2} \leq \frac{1}{4}$$

であるから、関数 $(B - a)B$ は、それぞれの点 0 と $t_1, t_2, T/2, t_3, t_4, T$ で零の値をもつ。ただし、 t_1 と t_2 は、次のそれぞれの不等式

$$\begin{aligned} \frac{T}{6} < t_1 &= \text{Cos}^{-1} \frac{\omega\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}(\beta - \alpha)} < \frac{T}{4}, \\ \frac{T}{4} < t_2 &= \text{Cos}^{-1} \frac{-\omega\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}(\beta - \alpha)} < \frac{T}{3} \end{aligned}$$

を満たしており、 t_3 と t_4 は、 $t_3 = t_1 + T/2$, $t_4 = t_2 + T/2$ である。また、関数 $(B - a)B$ は区間 $(0, t_1)$ と $(t_2, T/2)$, $(T/2, t_3)$, (t_4, T) 上で正であり、区間 (t_1, t_2) と (t_3, t_4) 上で負であることは容易に確認することができる。また、関数 $(B - a)B$ のグラフは、直線 $t = T/4$ と $t = T/2$, $t = 3T/4$ に対して線対称である。

ここで、 $T/4 - t_1 = t_2 - T/4$ と $3T/4 - t_3 = t_4 - 3T/4$ であることに注意しておく。上述したように、関数 E のグラフは軸対称性を有している。したがって、 $E(t_1) = E(t_2) = E(t_3) = E(t_4)$ である。簡単のために、 $\delta = E(t_1)$ とする。関数 E の性質から、任意の $0 < t < t_1$ と $t_2 < t < T/2$, $T/2 < t < t_3$, $t_4 < t < T$ に対して、 $E(t) > \delta$ であり、任意の $t_1 < t < t_2$ と $t_3 < t < t_4$ に対して、 $0 < \exp(-4(\beta - \alpha)/\omega^2) \leq E(t) < \delta$

がわかる。ゆえに、関数 $E(B - a)B$ の 0 から周期 T までの積分は

$$\begin{aligned}
\int_0^T E(t)(B(t) - a(t))B(t)dt &> \delta \int_0^{t_1} (B(t) - a(t))B(t)dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} (B(t) - a(t))B(t)dt \\
&+ \delta \int_{t_2}^{T/2} (B(t) - a(t))B(t)dt + \delta \int_{T/2}^{t_3} (B(t) - a(t))B(t)dt \\
&+ \delta \int_{t_3}^{t_4} (B(t) - a(t))B(t)dt + \delta \int_{t_4}^T (B(t) - a(t))B(t)dt \\
&= \delta \int_0^T (B(t) - a(t))B(t)dt \\
&= \frac{(\beta - \alpha)^2 \delta}{\omega^2} \int_0^T \sin^2(\omega t)dt - 2\alpha\delta \int_0^T \sin^2\left(\frac{\omega}{2}t\right)dt \\
&= \frac{2\delta\pi}{\omega} \left(\frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} - 2\alpha \right) \geq 0
\end{aligned}$$

と評価できる。したがって、条件 (1.9) を満たすから、定理 A によって、係数 (1.12) をもつ方程式 (1.8) のすべての非自明解は振動する。すなわち、方程式 (1.1) のすべての非自明解も振動する。 \square

Proof of Theorem 1.2. 定理 1.1 の証明と同様に $\beta \geq 0$ のみを考える。任意の $t \geq t_0$ に対して

$$-\alpha + \beta \cos(\omega t) \leq -\alpha + \beta \leq 0$$

であるから、Sturm の比較定理より方程式 (1.1) のすべての非自明解は振動しない。したがって、 $0 < \alpha < \beta$ の場合を考えればよい。(1.12) で定義した関数 b は periodic of mean value zero をもつことは明らかである。定理 1.2 の仮定である (1.6) から

$$0 < \beta - \alpha \leq \frac{\omega\sqrt{2\alpha}}{2}$$

がわかる。ゆえに、任意の $t \geq 0$ に対して、次の不等式

$$\begin{aligned}
(B(t) - a(t))B(t) &= \frac{4(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) - \frac{\alpha\omega^2}{2(\beta - \alpha)^2} \right) \\
&\leq \frac{4(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} \sin^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) \left(\cos^2\left(\frac{\omega}{2}t\right) - 1 \right) \leq 0
\end{aligned}$$

を得る。したがって、条件 (1.10) を満たすような関数 B が存在するから、定理 B を

用いれば，周期係数 (1.12) をもつ方程式 (1.8) のすべての非自明解が振動しないことがわかる．ゆえに，方程式 (1.1) のすべての非自明解も振動しない． \square

1.4 先行結果と主結果との比較

El-Sayed [16] は 2 階線形微分方程式の非自明解が振動するための基準を提示した．その結果は，Mathieu 方程式を扱っている．言うまでもないが， $\omega = 2$ のときは，一般化された Mathieu 方程式 (1.1) は Mathieu 方程式となる．第 1.1 節で述べたように， $\alpha \leq 0$ のとき，Mathieu 方程式のすべての非自明解が振動する．したがって， $\alpha > 0$ のみについて議論する必要がある．El-Sayed は次の条件

$$\alpha > 0 \quad \text{かつ} \quad |\beta| \geq 2\alpha + 2$$

ならば，Mathieu 方程式のすべての非自明解が振動することを明らかにした ([31, Remark 4] と [58] も参考となる)．定理 1.1 の条件を思い出してみれば

$$\alpha > 0 \quad \text{かつ} \quad |\beta| \geq 2\sqrt{2\alpha} + \alpha$$

を満たすならば，Mathieu 方程式のすべての非自明解は振動する．

Mathieu 方程式の非自明解が振動するための条件を比較するために，次のような半平面

$$\{(\alpha, \beta) : \alpha > 0 \text{ かつ } \beta \in \mathbb{R}\}$$

と $\beta = 2\alpha + 2$ 及び $\beta = -2\alpha - 2$ の二直線， $\beta = 2\sqrt{2\alpha} + \alpha$ の凸曲線， $\beta = -2\sqrt{2\alpha} - \alpha$ の凹曲線を考える．これらの 2 直線と凹凸曲線をグラフで表したものが図 1.1 である．図 1.1 の影の部分に (α, β) のペアが含まれていれば，Mathieu 方程式のすべての非自明解は振動する．濃ゆく暗い部分は，El-Sayed によって与えられた Mathieu 方程式の非自明解が振動するための振動領域である．図 1.1 からわかるように，直線 $\beta = 2\alpha + 2$ は点 $(2, 6)$ において曲線 $\beta = 2\sqrt{2\alpha} + \alpha$ の接線となる．同様に，直線 $\beta = -2\alpha - 2$ は点 $(2, -6)$ において曲線 $\beta = -2\sqrt{2\alpha} - \alpha$ の接線となる．したがって，定理 1.1 の結果は El-Sayed の結果を完全に含んでいることが明らかである．

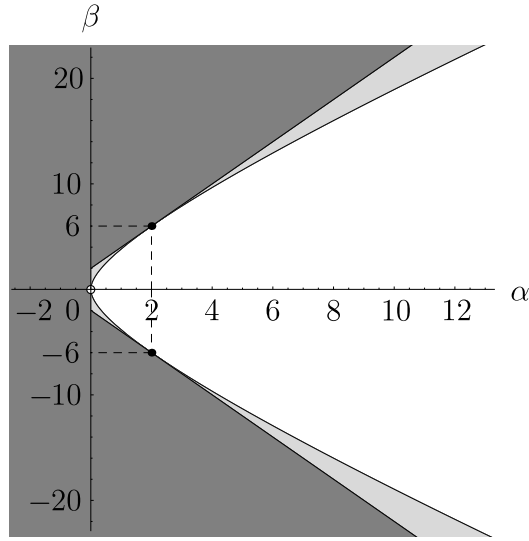


Figure 1.1: $\omega = 2$ のとき, 条件 (1.5) によって与えられた振動領域

第 1.1 節で紹介したように, 一般化された Mathieu 方程式 (1.1) と方程式 (1.7) は同値である. したがって, 定理 1.1 と定理 1.2 は, 方程式 (1.7) に対して置き換えることができる.

Theorem 1.3. もし

$$\tilde{\alpha} > 0 \quad \text{かつ} \quad |\tilde{\beta}| \geq \tilde{\omega}\sqrt{2\tilde{\alpha}} + \tilde{\alpha} \quad (1.14)$$

ならば, 方程式 (1.7) のすべての非自明解は振動する.

Theorem 1.4. もし

$$\tilde{\alpha} > 0 \quad \text{かつ} \quad |\tilde{\beta}| \leq \frac{\tilde{\omega}\sqrt{2\tilde{\alpha}}}{2} + \tilde{\alpha} \quad (1.15)$$

ならば, 方程式 (1.7) のすべての非自明解は振動しない.

Sun et al. [55] は次の外力項をもつ 2 階線形微分方程式

$$(p(t)x')' + q(t)x = r(t)$$

を考察した. ただし, 関数 p , q , r は実連続関数であり, p は区間 $(0, \infty)$ 上で連続

微分可能な関数である．また，彼らは外力項をもつ Mathieu 型方程式

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + (-\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \sin s)z = k s^\ell \cos s \quad (1.16)$$

も考察した．ただし，それぞれの定数は $l > 0$ かつ $k \geq 0$ である．Sun et al. は次の条件

$$\tilde{\alpha} = 1 \quad \text{かつ} \quad \tilde{\beta} \geq \beta^* = ((27 + \sqrt{1097})/46)^2 + 1 \approx 2.70819162 \dots$$

を満たすならば，方程式 (1.16) のすべての非自明解が振動することを証明した．当然のことではあるが，特別な場合である $k = 0$ のときの外力項を持たない方程式

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + (-\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \sin s)z = 0 \quad (1.17)$$

でさえも，上述した振動条件は適用可能である．また，Mathieu 方程式がもつ各パラメータが $\alpha = 4\tilde{\alpha}$ かつ $\beta = 4\tilde{\beta}$ ならば，方程式 (1.17) と一致する．したがって，El-Sayed の結果は

$$\tilde{\alpha} = 1 \quad \text{かつ} \quad |\tilde{\beta}| \geq 2.5$$

を満たすならば，方程式 (1.17) のすべての非自明解は振動する．ここで， $\tilde{\omega} = 1$ のとき，方程式 (1.7) は方程式 (1.17) であることに注意しておく．したがって，定理 1.3 から

$$\tilde{\alpha} = 1 \quad \text{かつ} \quad |\tilde{\beta}| \geq \beta_* = \sqrt{2} + 1 \approx 2.41421356 \dots$$

を満たすならば，方程式 (1.17) のすべての非自明解は振動することがわかる（図 1.2 を参照せよ）．

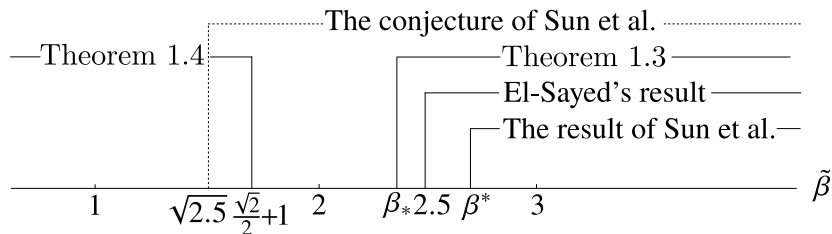


Figure 1.2: $\tilde{\alpha} = 1$ のときの方程式 (1.17) に対する先行結果と主結果との比較

Komkov [30] は, Sun et al. [55] の研究以前に方程式 (1.17) を考察していた. そこで, Komkov が与えた条件とは, もし

$$\tilde{\alpha} > 0 \quad \text{かつ} \quad |\tilde{\beta}| > \sqrt{2\tilde{\alpha}}$$

を満たすならば, 方程式 (1.17) のすべての非自明解は振動するという結果である. しかしながら, 彼の提示した振動条件は真実ではない. 実際に, Sturm の比較定理から $|\tilde{\beta}| \leq \tilde{\alpha}$ ならば, 方程式 (1.17) のすべての非自明解は振動しない. すなわち, $\tilde{\alpha} > 2$ に対して, $\sqrt{2\tilde{\alpha}} < \tilde{\alpha}$ であるから, 次の不等式

$$\sqrt{2\tilde{\alpha}} < |\tilde{\beta}| \leq \tilde{\alpha}$$

を満たすような $\tilde{\beta}$ を選ぶことができる. したがって, 上述した不等式を満たすペア $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ の場合, 方程式 (1.17) のすべての非自明解は振動しない. ゆえに, 彼の陳述と矛盾する.

Sun et al. [55] は既に Komkov の結果が真実ではないことを指摘していた. また, Komkov の結果を判断すれば, もし

$$\tilde{\alpha} > 0 \quad \text{かつ} \quad \tilde{\beta} \geq \sqrt{2.5\tilde{\alpha}}$$

を満たすならば, 方程式 (1.17) (または, 方程式 (1.16)) のすべての非自明解は振動するのではないかと Sun et al. は推測した. 彼らの見積もりが正しいければ, El-Sayed の結果よりも優れていることがわかる. なぜなら, $\sqrt{2.5} < 2.5$ であるからである. しかし, 残念なことに, Sun et al. が推測する振動条件は真実ではない. 実際に, $\tilde{\alpha} \geq 3 - \sqrt{5} \approx 0.76393202 \dots$ に対して, 次の不等式

$$\sqrt{2.5\tilde{\alpha}} \leq \frac{\sqrt{2\tilde{\alpha}}}{2} + \tilde{\alpha}$$

がわかる. したがって, 定理 1.4 によって

$$\tilde{\alpha} \geq 3 - \sqrt{5} \quad \text{かつ} \quad \tilde{\beta} \geq \sqrt{2.5\tilde{\alpha}}$$

の場合は、方程式 (1.17) のすべての非自明解が振動しないことがわかるからである。

図 1.3 を利用して、より詳しく Sun et al. が推測した条件と我々の定理 1.4 とを比較する。図 1.3 の影の部分に $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ のペアが含まれていれば、方程式 (1.17) のすべての非自明解は振動しない。一方、濃ゆく暗い影の部分の領域は

$$\{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) : \tilde{\alpha} > 0 \text{ かつ } |\tilde{\beta}| \leq \tilde{\alpha}\}$$

を表している。図 1.3 において、点 $(1.0, 2.5)$ は影の部分の外側にある。既に言及したように、定理 1.3 (または、El-Sayed の結果) から $\tilde{\alpha} = 1.0$ かつ $\tilde{\beta} = 2.5$ ならば、方程式 (1.17) のすべての非自明解は振動する。図 1.3 に対して、点 $(1.0, \sqrt{2.5})$ は影の部分の内側にあるから、定理 1.4 によって、もし

$$\tilde{\alpha} = 1.0 \text{ かつ } \tilde{\beta} = \sqrt{2.5}$$

を満たすならば、方程式 (1.17) のすべての非自明解は振動しないことがわかる。

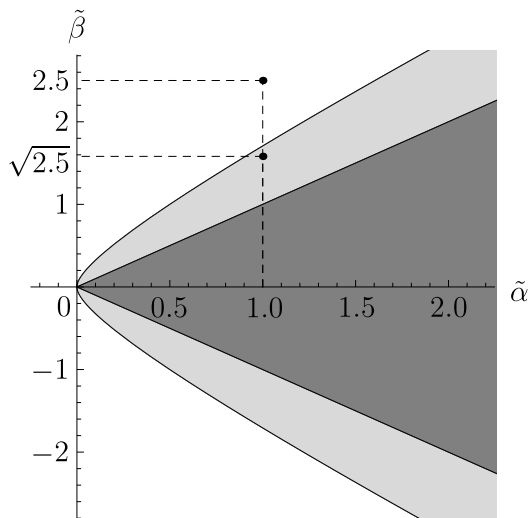


Figure 1.3: $\tilde{\omega} = 1$ のとき、条件 (1.15) によって与えられた非振動領域

McLachan [40, p. 29] によれば、次の Mathieu 方程式

$$x'' + (a - 2q \cos(2t))x = 0$$

に対する無限連分数は

$$a = \frac{-q^2/2}{1-a/4-} \frac{q^2/64}{1-a/16-} \frac{q^2/576}{1-a/36-} \frac{q^2/2304}{1-a/64-} \cdots \frac{q^2/(16n^2(n-1)^2)}{1-a/(4n^2)-} \cdots \quad (1.18)$$

と表される. ただし, $n = 2, 3, \dots$ である. Leighton [36] は, 方程式 (1.18) に対して, $a = -4\tilde{\alpha}$ かつ $q = 2\tilde{\beta}$ と置き換えることにより, 方程式 (1.17) に関する次の無限連分数

$$\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{\beta}^2}{2(1+\tilde{\alpha})-} \frac{\tilde{\beta}^2}{2(4+\tilde{\alpha})-} \frac{\tilde{\beta}^2}{2(9+\tilde{\alpha})-} \frac{\tilde{\beta}^2}{2(16+\tilde{\alpha})-} \cdots \frac{\tilde{\beta}^2}{2(n^2+\tilde{\alpha})-} \cdots \quad (1.19)$$

を導出した. ただし, $n = 1, 2, \dots$ である. しかし, 方程式 (1.19) を解析することは非常に困難であるため, 方程式 (1.19) に相当する漸化式を提示した. 彼の漸化式は $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ -平面において近似曲線 C_n ($n = 1, 2, \dots$) を与えている. 例えば, 次の四つの曲線 C_1 と C_2, C_3, C_4 をそれぞれ

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\beta}^2 = 2\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} + 1) & \text{if } n = 1, \\ \tilde{\beta}^2 = \frac{4\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} + 1)(\tilde{\alpha} + 4)}{3\tilde{\alpha} + 8} & \text{if } n = 2, \\ \tilde{\beta}^4 - (8\tilde{\alpha} + 3)(\tilde{\alpha} + 6)\tilde{\beta}^2 + 8\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} + 1)(\tilde{\alpha} + 4)(\tilde{\alpha} + 9) = 0 & \text{if } n = 3, \\ 5(\tilde{\alpha} + 8)\tilde{\beta}^4 - 4(5\tilde{\alpha}^3 + 105\tilde{\alpha}^2 + 652\tilde{\alpha} + 1152)\tilde{\beta}^2 \\ + 16\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} + 1)(\tilde{\alpha} + 4)(\tilde{\alpha} + 9)(\tilde{\alpha} + 16) = 0 & \text{if } n = 4 \end{array} \right.$$

として与えた. Leighton [36] は, 曲線 C_n ($n = 1, 2, \dots$) の上または外側にある $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ が存在すれば, 方程式 (1.17) のすべての非自明解が振動することを証明した. $n = 4$ の場合をより正確に述べるために, $\tilde{\beta}$ に関する四次方程式の係数をそれぞれ

$$p_1(\lambda) = 5(\lambda + 8)$$

$$p_2(\lambda) = 2(5\lambda^3 + 105\lambda^2 + 652\lambda + 1152)$$

$$p_3(\lambda) = 16\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 4)(\lambda + 9)(\lambda + 16)$$

とおく. $n = 4$ のときの $\tilde{\beta}$ に関する四次方程式を解くことによって, もし $\tilde{\alpha} > 0$ かつ

$$|\tilde{\beta}| \geq \sqrt{\frac{1}{p_1(\tilde{\alpha})} \left\{ p_2(\tilde{\alpha}) - \sqrt{p_2^2(\tilde{\alpha}) - p_1(\tilde{\alpha})p_3(\tilde{\alpha})} \right\}} \quad (1.20)$$

ならば, 方程式 (1.17) のすべての非自明解は振動する.

p_1 と p_2, p_3 はそれぞれ λ に対する線形多項式と二次多項式, 三次多項式であるため, 不等式 (1.20) の右辺は複雑である. したがって, $\tilde{\alpha}$ を任意に選択すると, 手計算では不等式 (1.20) を確認することは非常に困難である. 不等式 (1.20) の推定は非常に鋭い十分条件であるように思えるが, 方程式 (1.17) のすべての非自明解が振動するための必要な条件ではない. 実際に, 十分大きな $\tilde{\alpha}$ に対して

$$\sqrt{2\tilde{\alpha}} + \tilde{\alpha} < \sqrt{\frac{1}{p_1(\tilde{\alpha})} \left\{ p_2(\tilde{\alpha}) - \sqrt{p_2^2(\tilde{\alpha}) - p_1(\tilde{\alpha})p_3(\tilde{\alpha})} \right\}}$$

がわかるからである. 例えば, $\tilde{\alpha} = 700$ かつ $\tilde{\beta} = 738$ のとき, すなわち

$$\sqrt{2 \times 700} + 700 < 738 < \sqrt{\frac{1}{p_1(700)} \left\{ p_2(700) - \sqrt{p_2^2(700) - p_1(700)p_3(700)} \right\}}$$

であるから, 不等式 (1.20) は満たさない. したがって, Leighton [36] の結果は, $\tilde{\alpha} = 700$ かつ $\tilde{\beta} = 738$ の場合は適用することができない. 一方, 我々が与えた定理 1.3 に対しては, $\tilde{\alpha} = 700$ かつ $\tilde{\beta} = 738$ でさえも条件 (1.14) は満たされる. ゆえに, $\tilde{\alpha}$ が十分大きな場合に対して, 定理 1.3 は Leighton [36] が与えた振動領域をより拡張することができた.

1.5 一般化された Mathieu 型方程式に対する非振動定理

次の一般化された Mathieu 方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta\varphi'(t) \cos(\omega\varphi(t)))x = 0 \quad (1.21)$$

を考える. ただし, 関数 φ は $(0, \infty)$ 上で連続微分可能な関数でかつ任意の $t > 0$ に対して, $|\varphi'(t)| \leq 1$ を満たすものである. 方程式 (1.21) の角速度に含まれる関数 φ の

例としては、任意の $t > 0$ に対して、 $\varphi(t) = \sin t$ や $\varphi(t) = t(\sin(\log t) + \cos(\log t))/2$ が挙げられる。

方程式 (1.21) の物理的意味を紹介する。支点が上下に変化する倒立振り子を考える。ただし、上下に変化する倒立振り子の支点の摩擦は無視できるとする。このときの垂直に駆動される倒立振り子の運動方程式は

$$x'' + (-\alpha + \beta\varphi'(t) \cos(\omega\varphi(t))) \sin x = 0$$

に記述される。方程式 (1.21) はこの運動方程式の線形モデルである。言うまでもないが、一般的に $\varphi' \cos(\omega\varphi)$ は周期関数ではない。したがって、定理 B を適用することはできない。本節では、定理 C を用いて、方程式 (1.21) のすべての非自明解が振動しないための条件を与える。

Theorem 1.5. もし

$$\alpha > 0 \quad \text{かつ} \quad |\beta| \leq \frac{\omega\sqrt{2\alpha}}{2} + \alpha \quad (1.22)$$

ならば、方程式 (1.21) のすべての非自明解は振動しない。

Proof. 定理 1.1 と定理 1.2 の証明と同様に、次の条件

$$0 < \alpha < \beta$$

の場合のみを考える。定理 1.5 の証明中によく利用することになる

$$h = \frac{\beta - \alpha}{\omega} + \sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} + 2\alpha} \quad (1.23)$$

を決める。ここで、 h は α と β 、 ω に依存する正の定数である。また、次の二つの関数 a と b を

$$\begin{aligned} a(t) &= 2h - \frac{2(\beta - \alpha)}{\omega} \sin(\omega\varphi(t)), \\ b(t) &= \frac{2h(\beta - \alpha)}{\omega} (1 - \sin(\omega\varphi(t))) + \alpha(1 + \varphi'(t) \cos(\omega\varphi(t))) \\ &\quad + \frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} \sin^2(\omega\varphi(t)) \end{aligned} \quad (1.24)$$

とする。直接計算をすれば

$$b(t) - \frac{1}{4}a^2(t) - \frac{1}{2}a'(t) = -\alpha + \beta\varphi'(t) \cos(\omega\varphi(t))$$

がわかる。したがって、方程式 (1.21) のすべての非自明解が振動しないことと、係数 (1.24) をもつ方程式 (1.8) のすべての非自明解が振動しないことは同値である。

以下、(1.24) によって与えられた $(a(t), b(t))$ が条件 (1.11) を満たすかどうかを確認する。任意の $t > 0$ に対して、(1.24) から

$$\begin{aligned} h_* &\stackrel{\text{def}}{=} 2\sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} + 2\alpha} = 2h - \frac{2(\beta - \alpha)}{\omega} \leq a(t) \\ &\leq 2h + \frac{2(\beta - \alpha)}{\omega} = \frac{4(\beta - \alpha)}{\omega} + 2\sqrt{\frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} + 2\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} h^* \end{aligned}$$

かつ

$$b(t) \geq \frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} \sin^2(\omega\varphi(t)) \geq 0$$

がわかる。さらに、任意の $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}a^2(t) - b(t) &= h^2 - \frac{2h(\beta - \alpha)}{\omega} - \alpha(1 + \varphi'(t) \cos(\omega\varphi(t))) \\ &= \alpha(1 - \varphi'(t) \cos(\omega\varphi(t))) \geq \alpha(1 - \cos(\omega\varphi(t))) \geq 0 \end{aligned}$$

もわかる。したがって、パラメータ曲線 $(a(t), b(t))$ は

$$(a(t), b(t)) \in R = \{(u, v) : u \geq 0 \text{ and } 0 \leq v \leq u^2/4\}$$

を満たす。

ここで、 $u = a(t)$ かつ $v = b(t)$ とおく。このとき、(1.24) によって

$$2h - \frac{2(\beta - \alpha)}{\omega} \leq u \leq 2h + \frac{2(\beta - \alpha)}{\omega},$$

$$\sin(\omega\varphi(t)) = \frac{\omega(2h - u)}{2(\beta - \alpha)} \quad \text{かつ} \quad \cos(\omega\varphi(t)) = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{2h - u}{\beta - \alpha} \right)^2}$$

がわかる。したがって

$$v = \frac{2h(\beta - \alpha)}{\omega} - h(2h - u) + \alpha \pm \alpha \varphi'(t) \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{2h - u}{\beta - \alpha} \right)^2} + \frac{(2h - u)^2}{4}$$

を得る。また、任意の $h_* \leq u \leq h^*$ に対して、二つの関数 f_+ と f_- を

$$f_+(u) = \frac{2h(\beta - \alpha)}{\omega} + \alpha - h(2h - u) + \frac{(2h - u)^2}{4} + \alpha \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{2h - u}{\beta - \alpha} \right)^2};$$

$$f_-(u) = \frac{2h(\beta - \alpha)}{\omega} + \alpha - h(2h - u) + \frac{(2h - u)^2}{4} - \alpha \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{2h - u}{\beta - \alpha} \right)^2}$$

と定義して、領域 S を

$$S = \{(u, v) : h_* \leq u \leq h^* \text{ and } f_-(u) \leq v \leq f_+(u)\}$$

とする。このとき、領域 S は R 内において有界閉集合である。任意の $t > 0$ に対して、 $|\varphi'(t)| \leq 1$ であるから、任意の $t > 0$ に対して、 $(a(t), b(t))$ は集合 S に含まれる。残る問題は、領域 R 内に含まれている集合 S が凸集合であることを示せば良い。(1.23) によって、二つの関数 f_+ と f_- をそれぞれ

$$f_+(u) = \frac{u^2}{4} - \alpha \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{2h - u}{\beta - \alpha} \right)^2} \right)$$

かつ

$$f_-(u) = \frac{u^2}{4} - \alpha \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{2h - u}{\beta - \alpha} \right)^2} \right)$$

と書き直すことができる。任意の $h_* \leq u \leq h^*$ に対して、明らかに

$$f_+(u) \leq \frac{u^2}{4} \quad \text{かつ} \quad f_-(u) \geq \frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} + 2\alpha - \alpha(1 + 1) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} > 0$$

であることはわかる。また、任意の $h_* \leq u \leq h^*$ に対して、直接計算をすれば

$$f_+(u) \leq \frac{u^2}{4} \quad \text{かつ} \quad f_-(u) \geq \frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} + 2\alpha - \alpha(1 + 1) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{\omega^2} > 0$$

がわかる. さらに, 関数 f_{\pm} の導関数を計算すれば

$$\frac{d}{du}f_{\pm}(u) = \frac{u}{2} \pm \frac{\alpha\omega^2(2h-u)}{4(\beta-\alpha)^2\sqrt{1-\frac{\omega^2}{4}\left(\frac{2h-u}{\beta-\alpha}\right)^2}}$$

かつ

$$\frac{d^2}{du^2}f_{\pm}(u) = \frac{1}{2} \mp \frac{\alpha\omega^2}{4(\beta-\alpha)^2\left\{1-\frac{\omega^2}{4}\left(\frac{2h-u}{\beta-\alpha}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

を得る. したがって, 任意の $h_* \leq u \leq h^*$ に対して, (1.22) から

$$\frac{d^2}{du^2}f_+(u) \leq \frac{1}{2} - \frac{\alpha\omega^2}{4(\beta-\alpha)^2} \leq 0$$

かつ

$$\frac{d^2}{du^2}f_-(u) \geq \frac{1}{2} + \frac{\alpha\omega^2}{4(\beta-\alpha)^2} > \frac{1}{2}$$

がわかる. ゆえに, 集合 S は凸集合でかつ領域 R 内に S が含まれる. また二つの曲線 $v = u^2/4$ と $v = f_+(u)$ は唯一の接点 $(2h, h^2)$ をもつ. その接点における接線は $v = hu - h^2$ によって与えられる (図 1.4 を見よ). 以上のことから, 定理 C より係数 (1.24) をもつ方程式 (1.8) のすべての非自明解が振動しないことがわかり, 方程式 (1.21) のすべての非自明解も振動しない. \square

定理 1.5 を検証するために, 任意の $t > 0$ に対して, $\varphi(t) = \sin t$ かつ $\alpha = 1/64$, $\beta = 1/64 + 1/4\sqrt{2}$, $\omega = 2$ のときの方程式 (1.21) の例を挙げる. すなわち, このときの方程式は

$$x'' + \left(-\frac{1}{64} + \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)(\cos t) \cos(2 \sin t)\right) x = 0 \quad (1.25)$$

であり, それぞれのパラメータの値である α と β , ω は条件 (1.22) を満たしていることは容易に確かめられる. したがって, 方程式 (1.25) のすべての非自明解は振動しない (図 1.5 を見よ).

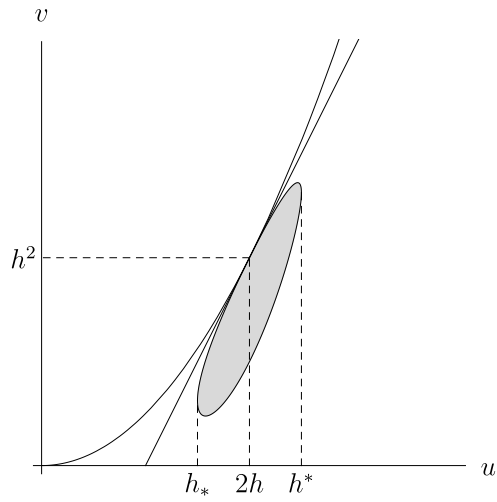


Figure 1.4: 領域 S と $\alpha = 1$, $\beta = 1.5$, $\omega = 1$, $h = 2$ の場合のパラメータ曲線 $(a(t), b(t))$ と接線の方程式

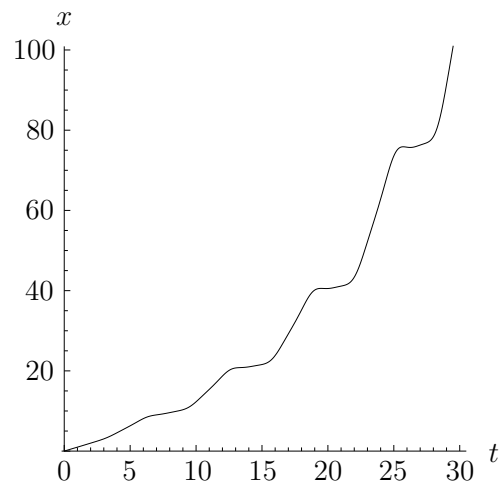


Figure 1.5: 初期値 $(x(0), x'(0)) = (0, 1)$ から出発する方程式 (1.25) の振動しない解

Chapter 2

振動定数をもつ Whittaker-Hill 型方程式

2.1 主結果

本章では，次の 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{ds^2} + (\lambda + 4mq \cos(2s) + 2q^2 \cos(4s))y = 0 \quad (2.1)$$

を考える．ただし， λ と q は任意の実数であり， m は自然数である．Magnus and Winkler [38, pp. 106–107] によれば，方程式 (2.1) は Whittaker-Hill 方程式と呼ばれている．Whittaker-Hill 方程式は，Mathieu 方程式や Ince 方程式，合流型超幾何微分方程式など，様々な方程式と深い関係があることが報告されている（例えば，[10, 11, 21, 23, 25, 26, 29, 41, 49, 57] を参照してほしい）．また，自然科学と工学の分野にも応用されている．実際に，過酸化水素分子の内部回転の理論に対して，方程式 (2.1) は登場する（[24, 48] を参照せよ）．

本章では，第 1 章の第 1.2 節の定理 A と定理 B の振動定理及び非振動定理を拡張し，それを利用することで，Whittaker-Hill 方程式の解の性質を探る．そのため，Whittaker-Hill 方程式を減衰係数をもつ方程式に変形させて考える必要がある．実

際に, Whittaker-Hill 方程式は, 次の減衰係数をもつ 2 階線形微分方程式

$$x'' + 2q(\sin t)x' + \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{q^2}{2} + q(1+m)\cos t\right)x = 0 \quad (2.2)$$

に変換できる. Whittaker-Hill 方程式の解を $y(s)$ として

$$t = 2s \quad \text{かつ} \quad x(t) = y(s)e^{-q(1-\cos t)}$$

と変数変換をすれば

$$\frac{dy}{ds} = \frac{d}{dt} \left(x(t)e^{q(1-\cos t)} \right) \frac{ds}{dt} = 2e^{q(1-\cos t)} (x'(t) + q \sin t x(t))$$

及び

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{ds^2} &= \frac{d}{dt} \left(2e^{q(1-\cos t)} (x'(t) + q \sin t x(t)) \right) \frac{ds}{dt} \\ &= 4e^{q(1-\cos t)} \left(x''(t) + 2q \sin t x'(t) + \left(\frac{q^2}{2} + q \cos t - \frac{q^2}{2} \cos(2t) \right) x(t) \right) \end{aligned}$$

であるから, 上述した d^2y/ds^2 を (2.1) に代入すれば, 方程式 (2.2) が得られる. したがって, 方程式 (2.1) のすべての非自明解が振動する (または, 振動しない) ことと, 方程式 (2.2) のすべての非自明解が振動する (または, 振動しない) ことは同値である.

ここで, 変換された Whittaker-Hill 型方程式 (2.2) がもつパラメータ m が 1 及びパラメータ q が $1/2$ の場合を考える. 簡単のために, 任意の定数 ε に対して

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{8}$$

とおく. ただし, ε は実数 λ に依存する定数である. このとき, 方程式 (2.2) は, 特別な場合である Whittaker-Hill 型方程式

$$x'' + (\sin t)x' + (\varepsilon + \cos t)x = 0 \quad (2.3)$$

となる. 特別な場合の Whittaker-Hill 型方程式 (2.3) の解には興味深い性質を持って

いる。例えば， $\varepsilon = 0$ の場合の方程式

$$x'' + (\sin t)x' + (\cos t)x = 0 \quad (2.4)$$

のすべての非自明解は振動しない。なぜなら，方程式 (2.3) は， $x(t) = \exp(\cos t)$ を解にもつからである。実際に

$$x'(t) = -\sin t \exp(\cos t) \quad \text{かつ} \quad x''(t) = (-\cos t + \sin^2 t) \exp(\cos t)$$

を方程式 (2.4) に代入すれば， $x(t) = \exp(\cos t)$ が一つの解になることがわかる。第 1 章の第 1.1 節で述べたように，方程式 (2.4) は線形微分方程式であるから，Sturm の分離定理から，一つの解が振動しないならば，すべての非自明解も振動しない。したがって，方程式 (2.4) のすべての非自明解は振動しない。上述した事実については，既に Kwong and Wong [33] らが提示している。また，方程式 (2.4) と特別な場合の Whittaker-Hill 型方程式 (2.3) を比較することによって， $\varepsilon < 0$ のときの方程式 (2.3) のすべての非自明解も振動しないことがわかる。実際，方程式 (2.3) に対して，両辺に $\exp(1 - \cos t)$ を掛ける。このとき，方程式 (2.3) は次の方程式

$$(e^{1-\cos t} x')' + e^{1-\cos t} (\varepsilon + \cos t) x = 0 \quad (2.5)$$

に置き換えることができる。したがって， $\varepsilon = 0$ の場合の方程式 (2.5) と方程式 (2.5) に対して，Sturm の比較定理及び分離定理を適用すれば， $\varepsilon = 0$ の場合の方程式 (2.5) のすべての非自明解が振動しないことにより， $\varepsilon < 0$ のときの方程式 (2.3) のすべての非自明解も振動しない。以上の理由から，残されている条件は $\varepsilon > 0$ である。

残された条件を考察するために，方程式 (2.3) と同値な方程式 (2.5) よりも一般的な 2 階線形微分方程式

$$(r(t)x')' + c(t)x = 0 \quad (2.6)$$

を考える。ただし，任意の $t \geq 0$ に対して， r は正の実連続関数， c は実連続関数である。方程式 (2.6) に対する振動問題については，多くの研究者によって振動定理が与えられてきた。例えば，Leighton-Wintner の振動条件と呼ばれている振動定理はよく知られており，以下に提示する（証明は [56, pp. 70-71, Theorem 2.24] を参照し

てほしい).

Theorem D. もし

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int \frac{1}{r(s)} ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int c(s) ds = \infty$$

ならば, 方程式 (2.6) のすべての非自明解は振動する.

上述した Leighton-Wintner の振動条件を方程式 (2.5) に適用すれば, もし $\varepsilon \geq 0.4463887$ ならば, 方程式 (2.5) のすべての非自明解が振動することがわかる. すなわち, $\varepsilon \geq 0.4463887$ ならば, 特別な場合の Whittaker-Hill 型方程式 (2.3) のすべての非自明解も振動する. 実際に, 方程式 (2.5) と方程式 (2.6) を比較すれば

$$r(t) = e^{1-\cos t} \quad \text{かつ} \quad c(t) = e^{1-\cos t}(\varepsilon + \cos t)$$

である. 任意の $t \geq 0$ に対して, $r(t) \leq e^2$ であるから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int \frac{1}{r(s)} ds = \infty$$

がわかる. また, c は周期 2π の周期関数であり, コンピューターを使って数値計算すれば

$$21.6237 < \int_0^{2\pi} e^{1-\cos t} dt < 21.6238 \quad \text{かつ} \quad -9.65263 < \int_0^{2\pi} e^{1-\cos t} \cos t dt < -9.65262$$

を得る. したがって, 数値計算結果より, 周期関数 c の $[0, 2\pi]$ の範囲の積分を考えれば

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c(t) dt &= \int_0^{2\pi} e^{1-\cos t}(\varepsilon + \cos t) dt \\ &= \varepsilon \int_0^{2\pi} e^{1-\cos t} dt + \int_0^{2\pi} e^{1-\cos t} \cos t dt \\ &< 21.6238 \varepsilon - 9.65262 \end{aligned}$$

かつ

$$\int_0^{2\pi} c(t) dt > 21.6237\varepsilon - 9.65263$$

と評価できる. これらの見積もりを形成すれば, もし $0 < \varepsilon \leq 0.4463887$ ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int^t c(s) ds < \infty$$

であり, もし $\varepsilon \geq 0.4463912$ ならば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int^t c(s) ds = \infty$$

となる. したがって, $\varepsilon \geq 0.4463912$ ならば, 方程式 (2.5) のすべての非自明解が振動することがわかった. しかし, 残念ながら, 定理 D からは, $0 < \varepsilon \leq 0.4463887$ に対して, 方程式 (2.3) のすべての非自明解が振動するのかを判断することはできない.

これまで, 解の振動性について議論してきた方程式 (2.3) は, 特別な場合の Whittaker-Hill 型方程式であるが, 定数パラメータ ε の条件から, とても興味深い解の性質が導出されてきた. したがって, 特に $m = 1$ かつ $q = 1/2$ の場合の Whittaker-Hill 型方程式の解の振動性を明確にすることは, 数学的に価値があるとともに, Whittaker-Hill 方程式 (2.1) の解構造を探るための架け橋になる. そこで, 本章の主目的は, 残されている条件 $0 < \varepsilon \leq 0.4463887$ のとき, 方程式 (2.3) のすべての非自明解が振動する (または, 振動しない) 基準をパラメータ ε の条件によって与えることである. 実際に, 第 1 章の第 1.2 節で紹介している定理 A や定理 B を拡張させた結果を方程式 (2.3) に適用することで, 定理 D からは判断不可能な場合の穴を埋めることができる. その条件を以下に報告する.

Theorem 2.1. もし $\varepsilon > 0$ ならば, 方程式 (2.3) のすべての非自明解は振動する.

定理 2.1 から, 任意の $\varepsilon > 0$ のとき, 方程式 (2.3) のすべての非自明解は振動する. もともと $\varepsilon = \lambda/4 + 1/8$ であるから, 定理 2.1 を言い換えれば, もし $\lambda > -1/2$ ならば, $m = 1$ かつ $q = 1/2$ の場合の Whittaker-Hill 方程式 (2.1) のすべての非自明解は振動する. 逆に, そうでないとき, すなわち, $\lambda \leq -1/2$ ならば, $m = 1$ かつ $q = 1/2$ の場合の Whittaker-Hill 方程式 (2.1) のすべての非自明解は振動しない. す

なわち, $-1/2$ は $m = 1$ かつ $q = 1/2$ の場合の Whittaker-Hill 方程式 (2.1) のすべての非自明解が振動するための下限値である. そのような定数値は振動定数と呼ばれている. その振動定数と呼ばれる定数が存在すれば, 振動と非振動を分ける閾値となっている. 例えば, 具体的な例として, 次の 2 階線形微分方程式

$$t^2 x'' + \lambda x = 0, \quad t > 0, \quad (2.7)$$

を挙げるができる. ここで, λ は任意の定数である. 方程式 (2.7) は Euler 方程式と呼ばれている. Euler 方程式 (2.7) のすべての非自明解は $\lambda > 1/4$ ならば振動し, $\lambda \leq 1/4$ ならば振動しないことがよく知られている ([56, pp. 44-45] を参照せよ). すなわち, 定数 $1/4$ は Euler 方程式 (2.7) の振動定数であることがわかる. これまでに, 方程式 (2.7) は振動定数をもつ方程式の典型的モデルであったが, 定理 2.1 からわかるように, $m = 1$ かつ $q = 1/2$ の場合の Whittaker-Hill 方程式 (2.1) も振動定数をもつ方程式のモデルケースとして挙げるができる.

本章の構成は, 第 2.2 節では, 定理 2.1 を導き出す鍵となる振動定理及び非振動定理を紹介する. その振動定理及び非振動定理は上述した通り, 第 1 章の第 1.2 節の定理 A と定理 B と密接に関係している. 特に, 第 1.2 節で述べた周期関数の periodic of mean value zero の性質が重要な役割を果たす. ゆえに, periodic of mean value zero の性質についてまとめておく. また, 適切な連続微分可能な多価関数の合成関数を利用することで, 定理 A と定理 B を含む結果を与えることができる. 第 2.3 節では, 第 2.2 節で与えた振動定理を利用して, 定理 2.1 を証明する. 第 2.4 節では, $m = 1$ かつ $q = 1/2$ の場合の Whittaker-Hill 型方程式 (2.3) の解の数値シミュレーションを紹介する.

2.2 減衰係数をもつ Hill 方程式の振動及び非振動定理

本節では, 方程式 (2.3) より一般的な方程式

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \quad (2.8)$$

を考える。ただし、関数 a と b は周期 T をもつ周期関数である。特に $a \equiv 0$ のとき、方程式 (2.8) は

$$x'' + b(t)x = 0 \quad (2.9)$$

となる。方程式 (2.9) は天体物理学では有名な Hill 方程式である。言うまでもなく、方程式 (2.9) の係数項は周期関数である。第 1 章の第 1.1 節でも述べたように、一般的に周期関数 b の一周期分の定積分に着目した性質である periodic of mean value zero を利用した方程式 (2.9) に対する振動定理は紹介していた。ここで、もう一度その性質を振り返る。実連続関数 p が周期 T の periodic of mean value zero をもつとは、周期関数 p が恒等的に零ではなく、次の積分条件

$$\int_0^T p(t)dt = 0$$

を満たすことであった。本章では、periodic of mean value zero をもつ周期的な関数族を $\mathcal{F}_{[MVZ]}$ によって定義する。したがって、第 1.1 節で紹介している振動結果は、次のように言い換えることができる。“もし関数 b が $\mathcal{F}_{[MVZ]}$ に属するならば、方程式 (2.9) のすべての非自明解は振動する”。例えば、方程式 (2.9) の係数が $\sin t$ または $\cos t$ ならば、すべての非自明解は振動する。しかしながら、方程式 (2.8) に対しては、周期関数 a と b が $\mathcal{F}_{[MVZ]}$ に属するとき、いつでもすべての非自明解が振動するわけではない。なぜなら、第 1.2 節で紹介した定理 A 及び定理 B の条件によって、方程式 (2.8) の解の振動性は変化するからである。実際に、定理 A 及び定理 B を思い出してみれば、Sugie and Matsumura [51] は、関数 B は b のある不定積分とし、次の積分条件

$$\int_0^T E(t)(B(t) - a(t))B(t)dt > 0$$

を満たす B が存在するならば、方程式 (2.8) のすべての非自明解は振動するという結果を与えた。ただし、関数 E は

$$E(t) = \exp \int_0^t (a(s) - 2B(s))ds$$

であり、彼らが仮定した条件は、関数 a と B は共に $\mathcal{F}_{[MVZ]}$ に属している。一方、Kwong and Wong [33] は、関数 B は b のある不定積分とし、 $b \in \mathcal{F}_{[MVZ]}$ という仮定

のもとで、任意の $0 \leq t \leq T$ に対して

$$(B(t) - a(t))B(t) \leq 0$$

を満たす B が存在するならば、方程式 (2.8) のすべての非自明解は振動しないという結果を与えていた。彼らを与えた定理 A と定理 B に共通する条件である周期関数 b とその不定積分 B の関係性について考察する。実は、周期 T をもつ周期関数 b と周期関数 b のある不定積分 B は以下の関係をもつ。

Proposition 2.1. 関数 B は周期 T をもつ周期関数 b のある不定積分とする。すなわち、 $B'(t) = b(t)$ である。 $b \in \mathcal{F}_{[\text{MVZ}]}$ であることと B が周期 T をもつ周期関数であることは必要十分条件である。

Proof. $b \in \mathcal{F}_{[\text{MVZ}]}$ ならば B が周期 T をもつ周期関数であることを示す。 $b \in \mathcal{F}_{[\text{MVZ}]}$ であるから

$$\begin{aligned} B(t+T) - B(t) &= \int_0^{t+T} b(s)ds - \int_0^t b(s)ds \\ &= \int_0^T b(s)ds + \int_T^{t+T} b(s)ds - \int_0^t b(s)ds \\ &= \int_0^T b(s)ds = 0 \end{aligned}$$

となり、 B は周期 T をもつ周期関数である。逆に、関数 b の不定積分 B が周期 T をもつ周期関数とする。すなわち、 $B(t+T) = B(t)$ であるから、上述した等式を利用すれば

$$B(t+T) - B(t) = \int_0^T b(t)dt = 0$$

を得る。したがって、 $b \in \mathcal{F}_{[\text{MVZ}]}$ であることがわかる。 \square

命題 2.1 から、定理 A 及び定理 B の仮定には、必ず周期関数 b が $\mathcal{F}_{[\text{MVZ}]}$ に属することを保証している。しかしながら、周期関数はいつでも periodic of mean value zero をもつわけではない。例えば、方程式 (2.3) の復元係数を挙げることができる。方程式 (2.3) の復元係数を $b(t) = \varepsilon + \cos t$ とおく。このとき、 $\varepsilon \neq 0$ ならば、係数 b は $\mathcal{F}_{[\text{MVZ}]}$ に属さない。すなわち、方程式 (2.3) に対して、定理 A と定理 B を適用す

ることはできない。したがって、方程式 (2.1) の係数 b が $\mathcal{F}_{[MVZ]}$ に属さない場合にも適用可能となる振動定理及び非振動定理を以下に与える。

Theorem 2.2. 関数 B は b のある不定積分とする。関数 B の範囲で、任意の実数 u に対して、 C^1 級の関数を $F(u)$ とし、その導関数を連続関数 $f(u)$ とする。また、関数 B の合成関数 $F(B)$ が周期 T をもつ周期関数とする。もし

$$\{F(B(t)) - a(t)\}F(B(t)) + \{1 - f(B(t))\}b(t) \leq 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.10)$$

を満たす B の合成関数 $F(B)$ が存在すれば、方程式 (2.8) のすべての非自明解は振動しない。

Theorem 2.3. 関数 B は b のある不定積分とする。関数 B の範囲で、任意の実数 u に対して、 C^1 級の関数を $F(u)$ とし、その導関数を連続関数 $f(u)$ とする。また、関数 B の合成関数 $F(B)$ が周期 T をもつ周期関数とする。さらに、関数 $a \in \mathcal{F}_{[MVZ]}$ かつ B の合成関数 $F(B) \in \mathcal{F}_{[MVZ]}$ であり、関数 E を

$$E(t) = \exp \int_0^t \{a(s) - 2F(B(s))\} ds$$

とする。もし

$$\int_0^T E(t) [\{F(B(t)) - a(t)\}F(B(t)) + \{1 - f(B(t))\}b(t)] dt > 0 \quad (2.11)$$

を満たす $B(t)$ の合成関数 $F(B)$ が存在すれば、方程式 (2.8) のすべての非自明解は振動する。

Remark 2.1. 定理 2.2 と定理 2.3 では、連続微分可能な関数 F は多価関数の場合がある。ただし、関数 F が多価関数の場合であっても、合成関数 $F(B)$ は連続かつ一価関数でなければならない。関数 F が複数の値をとる場合、その導関数 f も複数の値をとる。したがって、不等式 (2.6) を満たすような f の適切な枝の組み合わせを見つけなければならない。具体的な例は、第 2.3 節で紹介する。

Remark 2.2. $u = B(t)$ とおく. 関数 $u = B(t)$ と関数 $F(u)$ はそれぞれ微分可能な関数であるから, 合成関数 $F(B)$ は微分可能であり, その導関数は

$$(F(B(t)))' = \frac{du}{dt} \frac{d}{du} F(u) \Big|_{u=B(t)} = b(t) f(u) \Big|_{u=B(t)} = f(B(t))b(t)$$

である. 関数 $F(B)$ は周期 T をもつ周期関数であるから, その導関数 $f(B)b$ も周期 T をもつ周期関数である.

Remark 2.3. 定理 2.3 において, 関数 a と $F(B)$ は $\mathcal{F}_{[MVZ]}$ に属すから, 関数 E も周期 T の周期関数である.

定理 2.2 と定理 2.3 を証明をするために, 方程式 (2.8) とそれに対応する Riccati 不等式

$$r' \geq r^2 - a(t)r + b(t) \quad (2.12)$$

の関係を以下に述べる.

Lemma 2.1. 方程式 (2.9) が振動しないための必要十分条件は, ある正の t_0 が存在し, 任意の $t \geq t_0$ に対して, 不等式 (2.12) を満たす C^1 級の関数 $r(t)$ が存在することである.

以下, 補題 2.1 と第 2.1 節で述べた定理 D (Leighton-Wintner の振動条件) を利用して, 定理 2.2 及び定理 2.3 を示す.

Proof of Theorem 2.2. 関数 $a, b, F(B), f(B)b$ が周期 T の周期関数であり, 任意の $t \geq 0$ に対して, $F'(B) = f(B)b$ であるから, 条件 (2.10) から, 次の不等式

$$F'(B(t)) \geq F^2(B(t)) - a(t)F(B(t)) + b(t)$$

がわかる. ゆえに, 任意の $t \geq 0$ に対して, $F(B)$ は Riccati 不等式 (2.12) を満たす. したがって, 補題 2.1 から方程式 (2.8) のすべての非自明解は振動しない. \square

Proof of Theorem 2.3. 方程式 (2.8) の解 $x(t)$ が振動しないと仮定する. このとき, 一般性を失うことなく, 任意の $t \geq t_0 > 0$ に対して

$$x(t) > 0$$

と仮定できる. ある C^1 級の関数 r に対して

$$r(t) = -\frac{x'(t)}{x(t)}$$

とおく. 関数 r は C^1 級の関数であるから

$$r'(t) = \left(\frac{x'(t)}{x(t)} \right)' - \frac{x''(t)}{x(t)} = r^2(t) - a(t)r(t) + b(t)$$

である. ここで, $R(t) = r(t) - F(B)$ とおく. ただし, 関数 $F(B)$ は関数 B の合成関数でかつ periodic of mean value zero をもつ周期 T の周期関数である.

関数 $u = B(t)$ とおく. 関数 $u = B(t)$ と関数 $F(u)$ はともに微分可能な関数であり, 合成関数 $F(B)$ は微分可能であるから

$$\begin{aligned} R'(t) &= r'(t) - \frac{d}{dt}F(u) \Big|_{u=B(t)} \\ &= r^2(t) - r(t)a(t) + b(t) - b(t)f(B(t)) \\ &= \{R(t) + F(B(t))\}^2 - \{R(t) + F(B(t))\}a(t) + b(t) - f(B(t))b(t) \\ &= R^2(t) - \{a(t) - 2f(B(t))\}R(t) \\ &\quad + [\{F(B(t)) - a(t)\}F(B(t)) + \{1 - f(B(t))\}b(t)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

を得る. 方程式 (2.13) に対応する 2 階線形微分方程式は

$$y'' + \{a(t) - 2F(B(t))\}y' + [\{F(B(t)) - a(t)\}F(B(t)) + \{1 - f(B(t))\}b(t)]y = 0 \quad (2.14)$$

である. このとき, 方程式 (2.8) の解 $x(t)$ は非振動解をもつことから, 方程式 (2.14)

のすべての非自明解も振動しない。方程式 (2.14) の両辺に関数

$$E(t) = \exp \int_0^t \{a(s) - 2F(B(s))\} ds$$

を掛けると次の方程式

$$(E(t)y)' + E(t)[\{F(B(t)) - a(t)\}F(B(t)) + \{1 - f(B(t))\}b(t)]y = 0 \quad (2.15)$$

に変換できる。関数 a と $F(B)$ は periodic of mean value zero をもつ周期 T の周期関数であるから、 E もまた周期 T をもつ正の周期関数である。従って、任意の $t \geq 0$ に対して

$$E(t) \leq m$$

を満たすような、ある定数 m が存在する。ゆえに

$$\int_0^\infty \frac{1}{E(t)} dt \geq \int_0^\infty \frac{1}{m} dt = \infty \quad (2.16)$$

を得る。ここで、簡単のために

$$G(t) = \int_0^T E(t)[\{F(B(t)) - a(t)\}F(B(t)) + \{1 - f(B(t))\}b(t)] dt$$

とにおいて

$$\rho = \int_0^T G(t) dt$$

とする。このとき、条件 (2.11) から、 $\rho > 0$ である。関数 G は周期 T をもつ周期関数であるから、任意の $0 \leq t \leq T$ に対して

$$\int_0^t |G(s)| ds \leq C \quad (2.17)$$

を満たすような $C \geq \rho$ が存在する。任意の $t \geq 0$ に対して、 $nT \leq t < (n+1)T$ を満たす自然数 n が存在するから、条件 (2.17) によって

$$\int_0^t G(s) ds = \int_0^T G(s) ds + \int_T^{2T} G(s) ds + \cdots + \int_{(n-1)T}^{nT} G(s) ds + \int_{nT}^t G(s) ds$$

$$\geq n\rho - \int_{nT}^t |G(s)| ds = n\rho - \int_0^{t-nT} |G(s)| ds \geq n\rho - C$$

を得る. $t \rightarrow \infty$ ならば自然数 n も正に発散するから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t G(s) ds \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n\rho - C = \infty \quad (2.18)$$

を得る. 以上から, (2.16) と (2.18) より, 定理 D が成り立つ. したがって, 方程式 (2.15) のすべての非自明解は振動する. 方程式 (2.15) と方程式 (2.14) は同値であるから, 方程式 (2.14) のすべての非自明解も振動する. このとき, 方程式 (2.14) のすべての非自明解が振動しないことに矛盾する. したがって, 方程式 (2.8) のすべての非自明解は振動する. \square

2.3 主結果の証明

方程式 (2.3) と方程式 (2.8) の係数を比較すれば

$$a(t) = \sin t \quad \text{かつ} \quad b(t) = \varepsilon + \cos t$$

である. 第 2.1 節で述べたように, Leighton-Wintner の振動条件を方程式 (2.3) に適用すれば, もし $\varepsilon \geq 0.4463912$ ならば, 方程式 (2.3) のすべての非自明解は振動した. 残りの考察すべき条件は $0 < \varepsilon \leq 0.4463887$ であった. したがって, ε は十分小さい値を考える必要がある. そこで, 定理 2.1 の証明では, 任意の正の定数 ε は十分小さい値として考える. 実際に, Sturm の比較定理によって, 十分小さい正の定数 ε のときの方程式 (2.3) の解が振動することを示せば良い. 以下, 定理 2.3 を利用して, 定理 2.1 を証明する.

Proof of Theorem 2.1. 任意の正の定数 ε は十分小さい値とする. 明らかに a は $\mathcal{F}_{[MVZ]}$ に属している. b の不定積分 B として

$$B(t) = \varepsilon + \sin t$$

を選ぶ. このとき, b は $\mathcal{F}_{[MVZ]}$ に属していない. ここで, 任意の $v \in [-1, 1]$ に対し

て、次の関数

$$u = H(v) = v + \varepsilon \sin^{-1}v$$

を定義する。ただし、 $\sin^{-1}v$ は、 $v = \sin \xi$ を満たす ξ が存在し、関数 H は多価関数である（図 2.1 を見よ）。

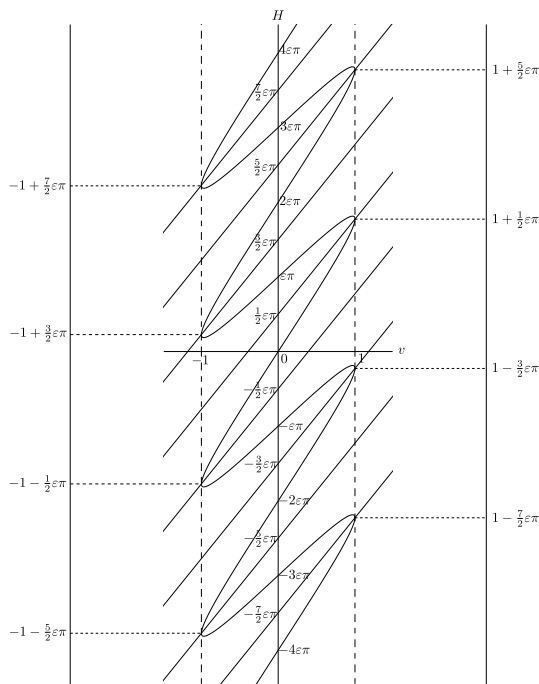


Figure 2.1: $\varepsilon = 0.25$ のときの多価関数 H のグラフ

このとき、関数 H は逆関数を持たないが、関数 H と関数 B には対応関係をもっている。すなわち、任意の $t \geq 0$ に対して

$$H(\sin t) = \sin t + \varepsilon t = B(t)$$

がわかる。上の等式に対して、関数 H の逆対応に関する関数を F とする。関数 F は微分可能な実連続関数である（図 2.2 を見よ）。

具体的な関数 F を表記することは困難であるが、関数 B の合成関数 $F(B)$ は、任意の $t \geq 0$ に対して

$$F(B(t)) = F(\sin t + \varepsilon t) = \sin t$$

であることがわかる。したがって、 $F(B)$ は $\mathcal{F}_{[MVZ]}$ に属する。関数 F は多価関数で

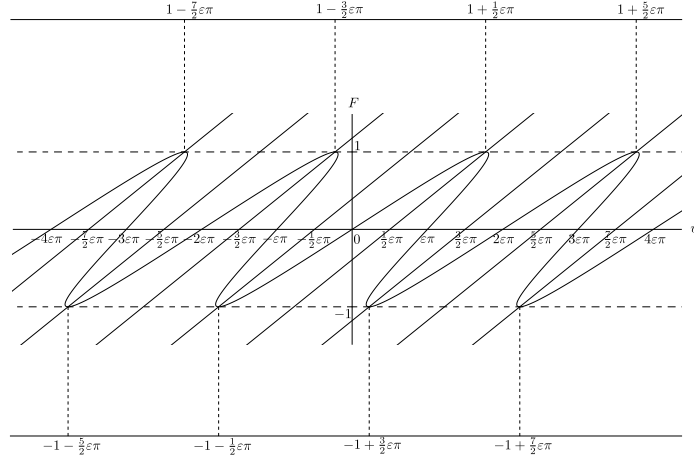


Figure 2.2: $\varepsilon = 0.25$ のときの多価関数 F のグラフ

あるから, F の分岐を考えるために, 任意の整数 n に対して

$$I_n = \left[-1 + \left(2n - \frac{1}{2} \right) \varepsilon \pi, 1 + \left(2n + \frac{1}{2} \right) \varepsilon \pi \right] \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha_n, \beta_n]$$

によって, 数列 $\{I_n\}$ を定義する. それぞれの整数 n に対して, I_n と I_{n+1} の交点は存在する. ここで, F の分岐を $F_n: I_n \rightarrow [-1, 1]$ とする. このとき, I_n 上に対して, 分岐 F_n は一価関数である. また, 関数 F の主値は, 一価関数 F_0 となる. さらに, それぞれの整数 n に対して, 开区間 (α_n, β_n) 上で分岐 F_n は微分可能であり, $2n\varepsilon\pi \in I_n$ かつ $F_n(2n\varepsilon\pi) = 0$, $F_n(\alpha_n) = -1$, $F_n(\beta_n) = 1$ である. 図 2.2 からわかるように, 分岐 F_n が右に $2\varepsilon\pi$ 移動すれば, 次の分岐 F_{n+1} と一致する. すなわち, $u \in I_n$ に対して

$$F_{n+1}(u) = F_n(u - 2\varepsilon\pi) \quad (2.19)$$

がわかる. したがって, 分岐 F_n は $u = 2n\varepsilon\pi$ を中心とする奇関数である. ゆえに, $u \in I_n$ に対して, 次の等式

$$F_n(u) = -F_n(4n\varepsilon\pi - u) \quad (2.20)$$

をもつ. ε は十分小さい値と仮定していたから

$$-1 + \left(2n + \frac{3}{2} \right) \varepsilon \pi < (2n + 1) \varepsilon \pi < 1 + \left(2n + \frac{1}{2} \right) \varepsilon \pi$$

がわかる。上述した不等式は $(2n+1)\varepsilon\pi \in I_n \cap I_{n+1}$ であることを意味している。したがって、(2.19) と (2.20) から、それぞれの整数 n に対して

$$\begin{aligned} F_{n+1}((2n+1)\varepsilon\pi) &= F_n((2n+1)\varepsilon\pi - 2\varepsilon\pi) \\ &= F_n(4n\varepsilon\pi - (2n+1)\varepsilon\pi) = -F_n((2n+1)\varepsilon\pi) \end{aligned} \quad (2.21)$$

がわかる。また、それぞれの整数 n に対して、分岐 F_n は开区間 (α_n, β_n) において微分可能であるから、 F_n の導関数を定義できる。そこで、 F_n の導関数は、十分小さな ε と $\alpha_n < u < \beta_n$ に対して

$$f_n(u) = \frac{d}{du} F_n(u) = \frac{1}{\frac{d}{dv} H(v)} \Big|_{v=F_n(u)} = \frac{\sqrt{1-F_n^2(u)}}{\sqrt{1-F_n^2(u)} + \varepsilon} < 1 \quad (2.22)$$

である。実際に

$$-1 + \left(2n - \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi = \alpha_n < u = H(v) = v + \varepsilon \sin^{-1}v < \beta_n = 1 + \left(2n + \frac{1}{2}\right)\varepsilon\pi$$

かつ $-1 < v < 1$ であるから、 $(2n - 1/2)\pi < \sin^{-1}v < (2n + 1/2)\pi$ がわかる。ここで、 $w = \sin^{-1}v$ とする。このとき、 $\cos w > 0$ かつ

$$\frac{dv}{dw} = \cos w = \sqrt{1 - \sin^2 w} = \sqrt{1 - v^2}$$

となる。したがって、 $-1 < v < 1$ に対して

$$\frac{d}{dv} H(v) = 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - v^2}}$$

を得る。それぞれの整数 n に対して、 $(2n+1)\varepsilon\pi \in I_n \cap I_{n+1}$ であることを考慮すれば、それぞれの不等式 (2.21) 及び (2.22) を使うことによって

$$\begin{aligned} f_n((2n+1)\varepsilon\pi) &= \frac{\sqrt{1-F_n^2((2n+1)\varepsilon\pi)}}{\sqrt{1-F_n^2((2n+1)\varepsilon\pi)} + \varepsilon} \\ &= \frac{\sqrt{1-F_{n+1}^2((2n+1)\varepsilon\pi)}}{\sqrt{1-F_{n+1}^2((2n+1)\varepsilon\pi)} + \varepsilon} = f_{n+1}((2n+1)\varepsilon\pi) \end{aligned} \quad (2.23)$$

がわかる。以下、関数 B を考察していく。任意の $t \geq 0$ に対して

$$-1 + \varepsilon t \leq B(t) = \sin t + \varepsilon t \leq 1 + \varepsilon t$$

であるから、関数 B のグラフは上下に振動しながら上昇する。また、曲線 $u = B(t)$ は、 $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲内の三点において、水平直線 $u = \varepsilon\pi$ と交差する（図 2.3 を参照せよ）。その交点の一つは、 $(t, u) = (\pi, \varepsilon\pi)$ である。他の交点を $(t_1, \varepsilon\pi)$ と $(t_2, \varepsilon\pi)$ とする。このとき、 B の曲線の形成から、 $0 < t_1 < \pi/2$ 及び $3\pi/2 < t_2 < 2\pi$ がわかる。関数 a は $a(t) = F_0(B(t)) = F_1(B(t)) = \sin t$ であるから

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} E(t) \{ (F(B(t)) - a(t))F(B(t)) + (1 - f(B(t)))b(t) \} dt \\ &= \int_0^{2\pi} E(t)(1 - f(B(t)))b(t)dt \end{aligned}$$

となる。

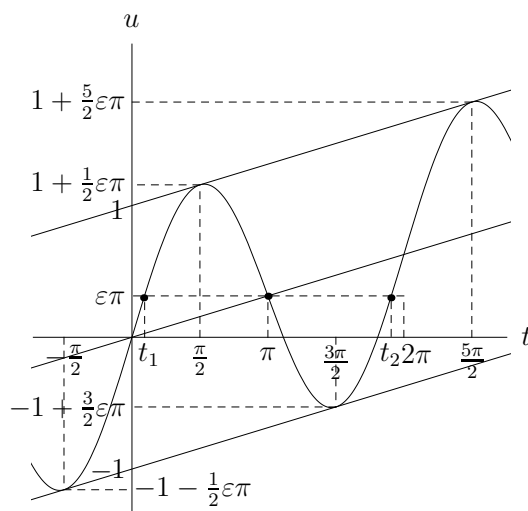


Figure 2.3: $\varepsilon = 0.1$ のときの B のグラフ

ここで、多価関数 F の導関数 f も多価関数であることを思い出せば

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -1 - \frac{1}{2}\varepsilon\pi < 0 \leq B(t) \leq \varepsilon\pi < 1 + \frac{1}{2}\varepsilon\pi = \beta_0 \quad \text{for } 0 \leq t \leq t_1, \\ \alpha_1 &= -1 + \frac{3}{2}\varepsilon\pi < \varepsilon\pi < B(t) < 1 + \frac{5}{2}\varepsilon\pi = \beta_1 \quad \text{for } t_1 < t < \pi, \\ \alpha_0 &= -1 - \frac{1}{2}\varepsilon\pi < -1 < B(t) \leq \varepsilon\pi < 1 + \frac{1}{2}\varepsilon\pi = \beta_0 \quad \text{for } \pi \leq t \leq t_2, \\ \alpha_1 &= -1 + \frac{3}{2}\varepsilon\pi < \varepsilon\pi < B(t) \leq 2\varepsilon\pi < 1 + \frac{5}{2}\varepsilon\pi = \beta_1 \quad \text{for } t_2 < t \leq 2\pi\end{aligned}$$

であることがわかる。したがって、多価関数 f を

$$f(B(t)) = \begin{cases} f_0(B(t)) & \text{if } 0 \leq t \leq t_1 \text{ or } \pi \leq t \leq t_2, \\ f_1(B(t)) & \text{if } t_1 < t < \pi \text{ or } t_2 < t \leq 2\pi \end{cases}$$

として選ぶ。 $t = t_1$ と $t = \pi$, $t = t_2$ の場合は、 $B(t) = \varepsilon\pi$ であるから、(2.23) によって

$$f_0(B(t_1)) = f_0(\varepsilon\pi) = f_1(\varepsilon\pi) = f_1(B(t_1)),$$

$$f_0(B(\pi)) = f_0(\varepsilon\pi) = f_1(\varepsilon\pi) = f_1(B(\pi)),$$

$$f_0(B(t_2)) = f_0(\varepsilon\pi) = f_1(\varepsilon\pi) = f_1(B(t_2))$$

がわかる。上述した事実は、 $0 \leq t \leq 2\pi$ に対して、 $f(B)$ は連続であることを意味する。したがって

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} E(t)(1 - f(B(t)))b(t)dt \\ &= \int_0^{t_1} E(t)(1 - f_0(B(t)))b(t)dt + \int_{t_1}^{\pi} E(t)(1 - f_1(B(t)))b(t)dt \\ & \quad + \int_{\pi}^{t_2} E(t)(1 - f_0(B(t)))b(t)dt + \int_{t_2}^{2\pi} E(t)(1 - f_1(B(t)))b(t)dt\end{aligned}$$

と計算できる。また、(2.22) から、 $0 \leq t \leq t_1$ または $\pi \leq t \leq t_2$ に対して

$$f_0(B(t)) = \frac{\sqrt{1 - F_0^2(B(t))}}{\sqrt{1 - F_0^2(B(t))} + \varepsilon} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sqrt{1 - \sin^2 t} + \varepsilon} = \frac{|\cos t|}{|\cos t| + \varepsilon}$$

がわかる。同様に, $t_1 < t < \pi$ または $t_2 < t \leq 2\pi$ に対して

$$f_1(B(t)) = \frac{|\cos t|}{|\cos t| + \varepsilon}$$

がわかる。また, 任意の $t \geq 0$ に対して, $b(t) = \varepsilon + \cos t$ かつ

$$E(t) = \exp \int_0^t (a(s) - 2F(B(s))) ds = \exp \int_0^t (\sin s - 2 \sin s) ds = e^{\cos t - 1}$$

であるから

$$\int_0^{2\pi} E(t)(1 - f(B(t)))b(t)dt = \varepsilon \int_0^{2\pi} e^{\cos t - 1} \frac{\varepsilon + \cos t}{\varepsilon + |\cos t|} dt$$

を得る。ここで, 区間 $[0, 2\pi]$ を次の二つの区間

$$I_+ = \{t \in [0, 2\pi]: \cos t > 0\} \quad \text{かつ} \quad I_- = \{t \in [0, 2\pi]: \cos t \leq 0\}$$

に分ければ

$$\varepsilon \int_0^{2\pi} e^{\cos t - 1} \frac{\varepsilon + \cos t}{\varepsilon + |\cos t|} dt > \varepsilon \int_{I_+} e^{\cos t - 1} dt - \varepsilon \int_{I_-} e^{\cos t - 1} dt$$

と評価できる。任意の $t \in I_+$ に対して, $e^{\cos t - 1} > 1/e$ であり, 任意の $t \in I_-$ に対して, $e^{\cos t - 1} \leq 1/e$ であるから

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{I_+} e^{\cos t - 1} dt - \varepsilon \int_{I_-} e^{\cos t - 1} dt &> \varepsilon \int_{I_+} \left(e^{\cos t - 1} - \frac{1}{e} \right) dt + \varepsilon \int_{I_+} \frac{1}{e} dt - \varepsilon \int_{I_-} \frac{1}{e} dt \\ &= \varepsilon \int_{I_+} \left(e^{\cos t - 1} - \frac{1}{e} \right) dt > 0 \end{aligned}$$

がわかる。それゆえに

$$\int_0^{2\pi} E(t) \{ (F(B(t)) - a(t))F(B(t)) + (1 - f(B(t)))b(t) \} dt > 0$$

を得る。したがって, 定理 2.3 の条件 (2.11) を満たすから, 十分小さな正の ε に対して, 方程式 (2.3) のすべての非自明解は振動する。□

2.4 数値シミュレーション

定理 2.1 を検証するために、本節では、 $\varepsilon = 0.0003$ のときの方程式 (2.3) の例を挙げる。すなわち、このときの方程式 (2.3) は

$$x'' + (\sin t)x' + (0.0003 + \cos t)x = 0 \quad (2.24)$$

である。方程式 (2.24) と同値な方程式系は

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -(\sin t)y - (0.0003 + \cos t)x \end{aligned} \quad (2.25)$$

である。図 2.4 では、初期値 $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ から出発する方程式系 (2.25) の正の解軌道を描いている。数値シミュレーションにより、最初の時間は 0 から終了時間 500 までをプロットしている。正の解軌道は、最初に右半平面を周回して、次に左半平面に移動している。時間が経てば、この動きが無限に繰り返される。その結果、正の解軌道の形は、例えるならば、二枚貝のように見える。正の解軌道が右半平面と左半平面を交互に移動することから、この正の解軌道に対応する方程式系 (2.25) の解は振動することがわかる。実際に、図 2.5 から、初期値 $(x(0), x'(0)) = (0, 1)$ から出発する方程式 (2.24) の解は、細かく上下に繰り返し、大きく振幅させながら無限に符号を変えている。

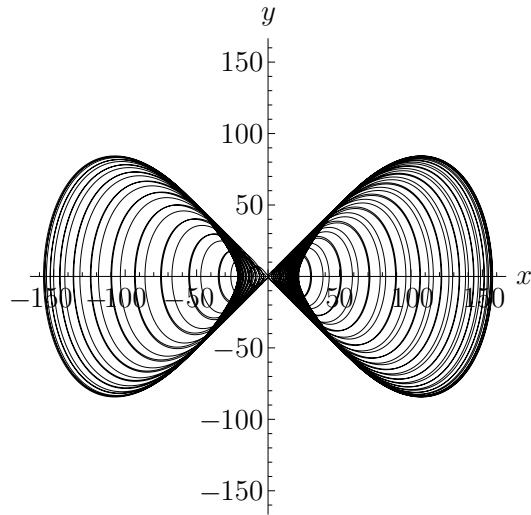


Figure 2.4: $\varepsilon = 0.0003$ のときの方程式系 (2.25) の解軌道

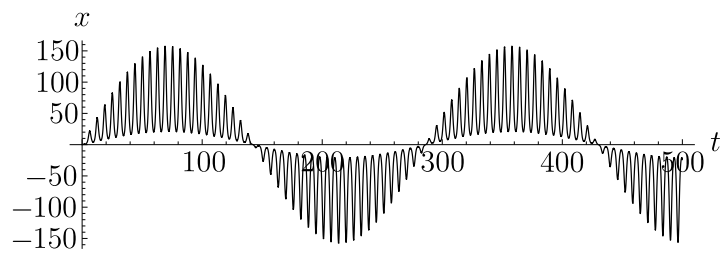


Figure 2.5: $\varepsilon = 0.0003$ のときの方程式 (2.24) の解

Chapter 3

二つの角速度をもつ Mathieu 方程式の 解の振動問題

3.1 主結果

Mathieu 方程式 (1.1) の係数項 $-\alpha + \beta \cos(\omega t)$ は言うまでもなく周期関数である。しかし、実際の物理モデルではしばしば係数項が非周期的なモデルが現れる。そのため、我々は係数項が非周期的な場合にも適用可能な結果を得るため、本章では、二つの角速度をもつ 2 階線形微分方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta \cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t))x = 0 \quad (3.1)$$

を考える。ただし、 α と β , γ は任意の実数、二つの角速度 ω_1 と ω_2 は正の実数である。もし $\gamma = 0$ もしくは $\beta = 0$ のとき、方程式 (3.1) は Mathieu 方程式 (1.1) となる。また、 $\omega_1 = \omega_2$ の場合も方程式 (1.1) に帰着できる。したがって、本章は $\omega_1 \neq \omega_2$ を仮定して、話を進める。

方程式 (3.1) の係数項 $-\alpha + \beta \cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t)$ は、 ω_1/ω_2 が有理数ならば、周期関数であり、 ω_1/ω_2 が無理数ならば、周期関数ではない。後者の場合、方程式 (3.1) は準周期 Mathieu 方程式 (quasi-periodic Mathieu equation) と呼ばれている (例えば、[47, 64] を参照せよ)。準周期 Mathieu 方程式の安定性理論は活発的に研究されている ([5, 9, 47, 64] を参照せよ) が、振動理論については報告されていない。

本章では，方程式 (3.1) のすべての非自明解が振動しないことを保証する十分条件を与える．まず，解の振動性に関する基礎知識を紹介するため，方程式 (3.1) より一般的な方程式

$$x'' + q(t)x = 0 \quad (3.2)$$

を考える．ただし，係数 q は実連続関数である．言うまでもないが，方程式 (3.2) の初期値に関する解の一意性とすべての解の時間大域的存在性は保証されているので，方程式 (3.2) のすべての解に対する振動性を議論することができる．振動問題は古くから現在まで研究されてきた．例えば，Sturm の比較定理 ([56, p. 45] 参照) から，十分大きな時刻 t に対して，係数 q が非正ならば，方程式 (3.2) のすべての非自明解は振動しない．また，係数 q が

$$\int_0^\infty q(t)dt = \infty$$

を満たすならば，方程式 (3.2) のすべての非自明解は振動する．これは Leighton-Wintner の振動定理と呼ばれている ([56, p. 45] または第 2 章の定理 D を参照せよ)．

これらの結果を方程式 (3.1) に適応すれば

$$\alpha \geq |\beta| + |\gamma| \quad (3.3)$$

ならば，方程式 (3.1) のすべての非自明解は振動しない．実際，任意の $t \geq 0$ に対して

$$-\alpha + \beta \cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t) \leq -\alpha + |\beta| + |\gamma| \leq 0$$

であるから，方程式 (3.1) のすべての非自明解は振動しないことがわかる．また，Leighton-Wintner の振動定理から

$$\begin{aligned} \int_0^t (-\alpha + \beta \cos(\omega_1 s) + \gamma \cos(\omega_2 s)) ds &= \left[-\alpha s + \frac{\beta}{\omega_1} \sin(\omega_1 s) + \frac{\gamma}{\omega_2} \sin(\omega_2 s) \right]_0^t \\ &= -\alpha t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \\ &\geq -\alpha t - \frac{\beta}{\omega_1} - \frac{\gamma}{\omega_2} \end{aligned}$$

を得る。したがって、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $\alpha < 0$ ならば、方程式 (3.1) のすべての非自明解は振動する。以上の理由から、考察すべき場合は

$$0 \leq \alpha < |\beta| + |\gamma| \quad (3.4)$$

である。本章では、(3.4) の場合にも適用可能な方程式 (3.1) のすべての非自明解が振動しないことを保証する条件を報告する。

Theorem 3.1. $\alpha \geq |\gamma|$ と仮定する。もし

$$|\beta| + |\gamma| \leq \frac{\omega_1 \sqrt{2(\alpha - |\gamma|)}}{2} + \alpha \quad (3.5)$$

ならば、方程式 (3.1) のすべての非自明解は振動しない。

Theorem 3.2. $\alpha \geq |\beta|$ と仮定する。もし

$$|\beta| + |\gamma| \leq \frac{\omega_2 \sqrt{2(\alpha - |\beta|)}}{2} + \alpha \quad (3.6)$$

ならば、方程式 (3.1) のすべての非自明解は振動しない。

方程式 (3.1) において、2つの周波数比 ω_1/ω_2 が有理数であれば、係数は周期関数であるが、比が無理数であれば、係数は周期関数ではない。したがって、比が無理数であるときは、Hill 方程式には属さない。定理 3.1 と定理 3.2 は方程式 (3.1) の係数が周期的であってもなくても適用することができる。パラメータ γ が零であるとき、方程式 (3.1) の角速度は1種類となるので、 $\omega_1 = \omega$ とみなしてよい。したがって、定理 3.1 と定理 3.2 は、Ishibashi and Sugie [27] によって与えられた、方程式 (1.1) のすべての非自明解が振動しない結果を拡張している。すなわち、定理 3.1 は第 1.1 節で与えた定理 1.2 に一致する。同様に、パラメータ β が零であるとき、 $\omega_2 = \omega$ となり、定理 3.2 は定理 1.2 に一致する。

本章の構成は次の通りである。第 3.2 節では、相平面解析を利用して得られる非振動定理 C を利用して、定理 3.1 と定理 3.2 を証明する。第 3.3 節では、上述した

Sturm の比較定理から得られる非振動条件 (3.3) と定理 3.1 及び定理 3.2 の条件 (3.5) 及び (3.6) と比較する. また, 方程式 (3.1) の具体例として

$$\omega_1 = 1 \quad \text{かつ} \quad \omega_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \dots$$

の場合を考える. この場合, 周波数比 ω_1/ω_2 は黄金比であり, 方程式 (3.1) は準周期 Mathieu 方程式になる. 第 3.4 節では, 定理 3.1 及び定理 3.2 が与える非振動領域を明確にする.

3.2 主結果の証明

2 階線形微分方程式

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{3.7}$$

を考える. ただし, 係数 a と b は連続関数である. 第 1 章及び第 2 章でも紹介したが, この方程式は, 振り子やバネの運動などの振動現象を記述する微分方程式のモデルとして有名であり, 純粋数学のみならず応用化学, 工学の分野で取り扱われる.

第 1 章の第 1.2 節でも紹介したが, Sugie [52] によって与えられた定理 C を用いることで, 定理 3.1 及び定理 3.2 を証明する.

Proof of Theorem 3.1. 条件 (3.4) の場合のみが未解決であることを思い出す. 条件 (3.4) と条件 (3.5) から

$$0 \leq \alpha < |\beta| + |\gamma| \leq \frac{\omega_1 \sqrt{2(\alpha - |\gamma|)}}{2} + \alpha$$

であるから, 不等式 $\alpha > |\gamma|$ がわかる. したがって

$$|\gamma| < \alpha < |\beta| + |\gamma|$$

であることを仮定する。ここで、簡単のために

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{|\beta| + |\gamma| - \alpha}{\omega_1} + \sqrt{\frac{(|\beta| + |\gamma| - \alpha)^2}{\omega_1^2} + 2\alpha}, \\ \sigma &= \frac{2(|\beta| + |\gamma| - \alpha)}{\omega_1}\end{aligned}\tag{3.8}$$

とする。ただし、 $0 < \sigma < \rho$ かつ $\rho^2 = 2\alpha + \rho\sigma$ である。以下、(i) $\beta \geq 0$ と (ii) $\beta < 0$ の二つに分けて証明をしていく。

Case (i): 次の係数関数

$$\begin{cases} a(t) = 2\rho - \sigma \sin(\omega_1 t), \\ b(t) = \alpha + \rho\sigma(1 - \sin(\omega_1 t)) + (\alpha - |\gamma|) \cos(\omega_1 t) \\ \quad + \gamma \cos(\omega_2 t) + \frac{1}{4}\sigma^2 \sin^2(\omega_1 t) \end{cases}\tag{3.9}$$

をもつ方程式 (3.7) を考える。係数 (3.9) をもつ方程式 (3.7) の任意の解を η とする。この方程式に対して

$$\xi(t) = \eta(t) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(s) ds\right)$$

と定義すれば、直接計算によって

$$\begin{aligned}\xi''(t) &= \left(\eta''(t) + a(t)\eta'(t) + \frac{1}{2}a'(t)\eta(t) + \frac{1}{4}a^2(t)\eta(t)\right) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(s) ds\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}a^2(t) + \frac{1}{2}a'(t) - b(t)\right) \eta(t) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(s) ds\right)\end{aligned}$$

及び $\rho^2 = 2\alpha + \rho\sigma$ かつ $\sigma\omega_1 = 2(\beta + |\gamma| - \alpha)$ から

$$\begin{aligned}\xi''(t) &+ \left(-\alpha + \beta \cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t)\right) \xi(t) \\ &= \left(\frac{1}{4}a^2(t) + \frac{1}{2}a'(t) - b(t) - \alpha + \beta \cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t)\right) \eta(t) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(s) ds\right) \\ &= \left(\rho^2 - 2\alpha - \rho\sigma + \left(\beta + |\gamma| - \alpha - \frac{1}{2}\sigma\omega_1\right)\right) \eta(t) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(s) ds\right) = 0\end{aligned}$$

がわかる。上述した意味は、関数 ξ が方程式 (3.1) の解となる。したがって、方程式 (3.1) のすべての非自明解が振動しないことと、係数 (3.9) をもつ方程式 (3.7) のすべ

ての非自明解が振動しないことは同値である。以下、定理 C を係数 (3.9) をもつ方程式 (3.7) に適用していく。そのための準備として、 $u = a(t)$ かつ $v = b(t)$ とする。(3.9) によって、 $2\rho - \sigma \leq u \leq 2\rho + \sigma$ 及び

$$\sin(\omega_1 t) = \frac{2\rho - u}{\sigma} \quad \text{かつ} \quad \cos(\omega_1 t) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\rho - u}{\sigma}\right)^2}$$

であるから

$$v = \alpha + \rho\sigma - \rho(2\rho - u) \pm (\alpha - |\gamma|) \sqrt{1 - \left(\frac{2\rho - u}{\sigma}\right)^2} + \gamma \cos(\omega_2 t) + \frac{1}{4}(2\rho - u)^2$$

となる。ここで、二つの連続関数 $f, g: [2\rho - \sigma, 2\rho + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ は

$$f(u) = \alpha + \rho\sigma - \rho(2\rho - u) + (\alpha - |\gamma|) \sqrt{1 - \left(\frac{2\rho - u}{\sigma}\right)^2} + |\gamma| + \frac{1}{4}(2\rho - u)^2,$$

$$g(u) = \alpha + \rho\sigma - \rho(2\rho - u) - (\alpha - |\gamma|) \sqrt{1 - \left(\frac{2\rho - u}{\sigma}\right)^2} - |\gamma| + \frac{1}{4}(2\rho - u)^2$$

によって定義されたものとする。ただし、区間 $[2\rho - \sigma, 2\rho + \sigma]$ では、 $g \leq f$ であることに注意しておく。また、次の領域

$$S = \{(u, v): 2\rho - \sigma \leq u \leq 2\rho + \sigma \text{ and } g(u) \leq v \leq f(u)\} \quad (3.10)$$

を定義する。このとき、領域 S は有界閉集合である。任意の $t \geq 0$ に対して、 $|\cos(\omega_2 t)| \leq 1$ であるから

$$(a(t), b(t)) \in S$$

である。先ほど定義した関数 f と g は、 $\rho^2 = 2\alpha + \rho\sigma$ を利用すれば、それぞれの関数は

$$f(u) = \frac{1}{4}u^2 - (\alpha - |\gamma|) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\rho - u}{\sigma}\right)^2}\right),$$

$$g(u) = \frac{1}{4}u^2 - (\alpha + |\gamma|) - (\alpha - |\gamma|)\sqrt{1 - \left(\frac{2\rho - u}{\sigma}\right)^2}$$

に書き換えることができる。任意の $0 < 2\rho - \sigma \leq u \leq 2\rho + \sigma$ 及び $\alpha > |\gamma|$ から

$$f(u) \leq \frac{1}{4}u^2 \quad \text{かつ} \quad g(u) \geq \frac{1}{4}(2\rho - \sigma)^2 - (\alpha + |\gamma|) - (\alpha - |\gamma|) = \frac{1}{4}\sigma^2 > 0$$

がわかる。したがって、領域 S は領域 R に含まれる。また、凸性に関しては、直接計算をすれば、任意の $u \in [2\rho - \sigma, 2\rho + \sigma]$ に対して

$$\frac{d^2}{du^2}f(u) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha - |\gamma|}{\sigma^2 \left(1 - \left(\frac{2\rho - u}{\sigma}\right)^2\right)^{3/2}} < \frac{1}{2} - \frac{\alpha - |\gamma|}{\sigma^2}$$

かつ

$$\frac{d^2}{du^2}g(u) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha - |\gamma|}{\sigma^2 \left(1 - \left(\frac{2\rho - u}{\sigma}\right)^2\right)^{3/2}} > \frac{1}{2}$$

を得る。ゆえに、条件 (3.5) と (3.8) から

$$\frac{d^2}{du^2}f(u) \leq \frac{1}{2} - \frac{(\alpha - |\gamma|)\omega_1^2}{4(|\beta| + |\gamma| - \alpha)^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{(\alpha - |\gamma|)\omega_1^2}{2(\alpha - |\gamma|)\omega_1^2} = 0$$

がわかる。つまり、上の境界曲線 $v = f(u)$ は上に凸であり、下の境界曲線 $v = g(u)$ は下に凸である。したがって、集合 S は凸であることが結論づけられる (図3.1見よ)。

以上のことから、定理 C のすべての条件が満たされていることを確認することができた。したがって、定理 C によって、係数 (3.9) をもつ方程式 (3.7) のすべての非自明解は振動しない。つまり、方程式 (3.1) のすべての非自明解も振動しない。

Case (ii): 次の係数

$$\begin{cases} a(t) = 2\rho + \sigma \sin(\omega_1 t), \\ b(t) = \alpha + \rho\sigma(1 + \sin(\omega_1 t)) - (\alpha - |\gamma|)\cos(\omega_1 t) \\ \quad + \gamma \cos(\omega_2 t) + \frac{1}{4}\sigma^2 \sin^2(\omega_1 t) \end{cases} \quad (3.11)$$

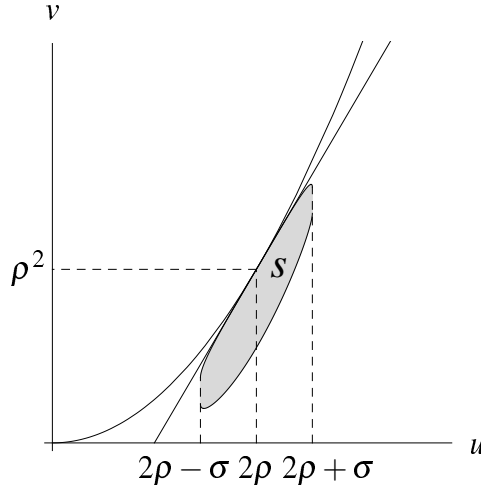


Figure 3.1: 網掛け部分は (3.10) で与えられた集合 S である. この場合, 関数 f と g は, $\alpha = 3$ と $\gamma = 1$, $\rho = 1 + \sqrt{7}$, $\sigma = 2$ によって与えられる. 直線 $v = pu - \rho^2$ は, 点 $(2\rho, \rho^2)$ の共通接線である.

をもつ方程式 (3.7) を考える. Case (i) と同様にして, この方程式が方程式 (3.1) と同値であることは容易に確かめられる. したがって, 係数 (3.11) をもつ方程式 (3.7) のすべての非自明解が振動しないことを示せばよい.

定理 C を利用するために, $u = a(t)$ かつ $v = b(t)$ と定める. このとき, (3.11) から

$$2\rho - \sigma \leq u \leq 2\rho + \sigma$$

及び

$$v = \alpha + \rho\sigma - \rho(2\rho - u) \pm (\alpha - |\gamma|) \sqrt{1 - \left(\frac{2\rho - u}{\sigma}\right)^2} + \gamma \cos(\omega_2 t) + \frac{1}{4}(2\rho - u)^2$$

がわかる. Case (i) と同じ方法によって, (3.10) で与えられた集合 S が有界閉凸集合であることを確認することができる. また, その集合 S は R に含まれている. したがって, 定理 C から, 係数 (3.11) をもつ方程式 (3.7) のすべての非自明解は振動しない.

Case (i) と Case (ii) によって, 定理 3.1 は証明された. □

Remark 3.1. 放物線 $v = u^2/4$ と上の境界曲線 $v = f(u)$ の接線の一つは接点 $(2\rho, \rho^2)$ のみであり, 共通接線の方程式は $v = pu - \rho^2$ である. 凸集合 S はその接線の下に

存在する.

Remark 3.2. 定理 3.1 の証明と同じ方法を利用して, β と γ , ω_1 をそれぞれ, γ と β , ω_2 に置き換えれば, 定理 3.2 は証明できる.

3.3 パラメータ非振動領域

第 3 章の第 1.1 節で述べたように, 任意の ω_1 と ω_2 に対して, 不等式 (3.3) を満たせば, 方程式 (3.1) のすべての非自明解は振動しない. 不等式 (3.3) を満たす三つのパラメータ (α, β, γ) の集合は, 三次元空間に規則的な四角錐を描く (図 3.2 (a) を参照). 図 3.2 (b) は, $\alpha = 2$ のときの正四角錐の断面を示す. 定理 3.1 と定理 3.2 は方程式 (3.1) の非振動領域が正方形のピラミッドよりどのくらい広がっているのかを明確にしている. どのくらいの伸びを見積もることができるかは, 二つの角速度 ω_1 と ω_2 によって定まる.

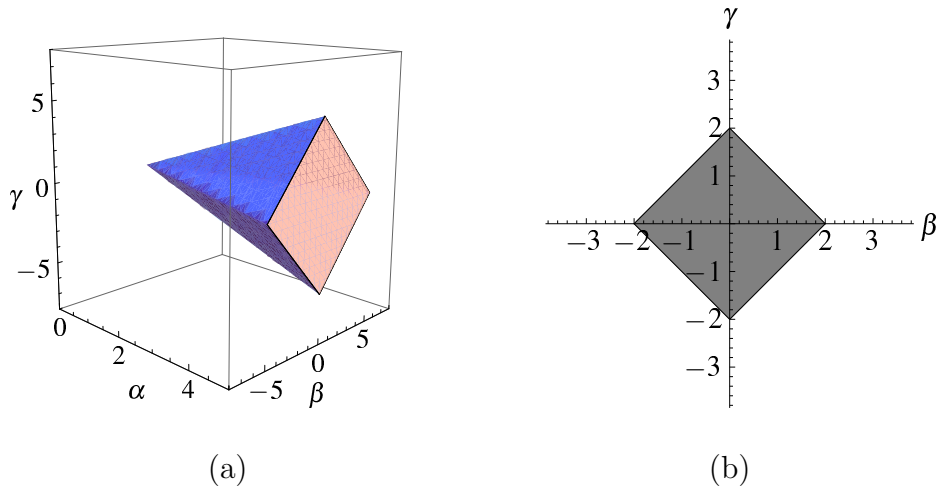


Figure 3.2: 各パラメータ (α, β, γ) が不等式 (3.3) で与えられる正方形のピラミッドにあれば, 方程式 (3.1) のすべての非自明解は振動しない. 暗い影の部分, は, $\alpha = 2$ のときの四角錐の断面図である.

方程式 (3.1) がもつ二つの角速度の比率 ω_1/ω_2 が有理数である場合, $-\alpha + \beta \cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t)$ は周期関数であり, 方程式 (3.1) は Hill 型の微分方程式である. この場合, フロッケの理論は方程式 (3.1) に役に立つかもしれないが, 二つの角速度の比率 ω_1/ω_2

が無理数の場合であれば，適用できない．例えば，次の二つの角速度

$$\omega_1 = 1 \quad \text{かつ} \quad \omega_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \stackrel{\text{def}}{=} \phi$$

を考える．すなわち，その二つの角速度は黄金比である．図 3.3 (a) では，規則的な四角錐と比較するために，不等式 (3.5) または不等式 (3.6) を満たす非振動領域を描く．はっきりと理解できるように，図 3.3 (b) は非振動領域と正四角錐の断面図も示している．また，断面図に描かれる不等式 (3.5) または不等式 (3.6) の条件は，二枚の葉っぱが重なり合っているように見える．図 3.3 (b) からわかることは，我々の結果は不等式 (3.4) を大きく拡張することができた．

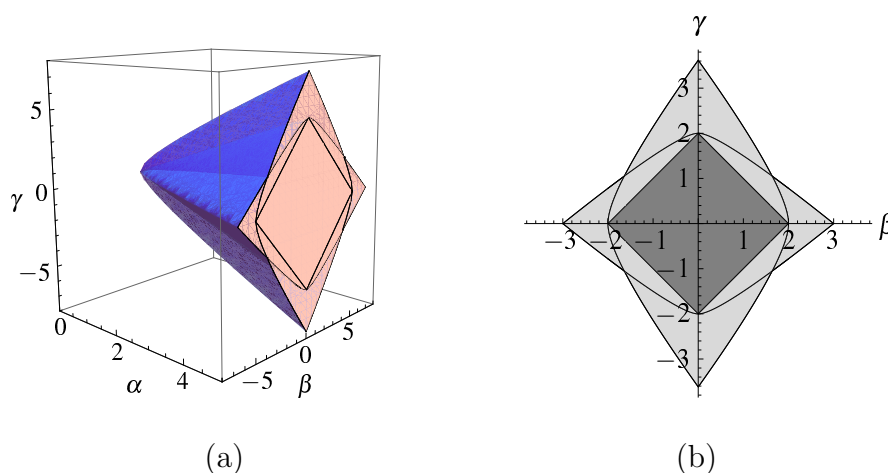


Figure 3.3: 各パラメータ (α, β, γ) が不等式 (3.5) または (3.6) を満たす三次元領域にある場合，方程式 (3.1) のすべての非自明解は振動しない．この非振動領域には，不等式 (3.4) で与えられる四角錐が含まれている．暗い影の部分は図 3.2 の部分と同じである．明るい部分と暗い部分の和集合は， $\alpha = 2$ のときの非振動領域の断面である．

Chapter 4

半分線形微分方程式の解の振動問題

4.1 先行研究と主結果

本章では非線形微分方程式

$$(\Phi_p(x'))' + a(t)\Phi_p(x') + b(t)\Phi_p(x) = 0 \quad (4.1)$$

を考える. ただし, 変数係数 a と b は区間 $[0, \infty)$ 上で連続であり, 関数 Φ_p は $p > 1$ に対して

$$\Phi_p(z) = |z|^{p-2}z$$

と定義する. 序文でも述べたように, 線形微分方程式では, 解の定数倍も解になることと, 二つの解の和も解になることは当然の事実であるが, 対象とする方程式 (4.1) は, 前者は成り立つが, 後者は成り立たない. すなわち, 方程式 (4.1) は線形微分方程式の性質の半分だけをもつことから, 一般に半分線形微分方程式と呼ばれる (例えば, [12, 14] を参照せよ).

パラメータ p が 2 のとき, 方程式 (4.1) は 2 階線形微分方程式

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \quad (4.2)$$

となる. 第 1 章及び第 2 章でも述べているように, この方程式 (4.2) は振り子やバネの運動などの振動現象を記述するために用いられ, 広範囲な分野で様々な角度から

研究されている。応用化学や技術では、方程式 (4.2) の $a(t)x'$ は摩擦項、 $b(t)x$ は復元項であり、 a と b はそれぞれ減衰係数と復元係数と呼ばれていることから、方程式 (4.1) のそれぞれの係数に対しても減衰係数と復元係数と呼ぶことにする。

方程式 (4.1) に対しての初期値に関する解の一意性とすべての解の時間大域的存在性は Elbert [15] によって証明されている。そのため、方程式 (4.1) のすべての解に対する振動性を議論することができる。そこで、方程式 (4.1) に対して、第 1 章から第 3 章まで議論している解の振動性についての定義を述べておく。方程式 (4.1) の非自明解が振動するとは、解が発散する無限個の零点列をもつときをいう。すなわち、方程式 (4.1) のある非自明解 $x(t)$ に対して

$$x(t_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$$

を満たす数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するとき、その解は振動するという。逆に、方程式 (4.1) の非自明解が振動しないとは、解が有限個の零点しかもたないときをいう。

半分線形微分方程式 (4.1) は、Sturm の比較定理及び分離定理のような基礎理論は既に構築されている ([14] を参照)。この性質に加えて、半分線形微分方程式 (4.1) の解構造全体 (振動性, 安定性) については、今世紀に入っても尚、多くの研究者によって研究され続けられている (例えば, [1, 28, 32, 35, 37, 43, 45, 51–54, 63] を参照せよ)。特に, Sugie [51] は半分線形微分方程式 (4.1) と同値な方程式系に対して, 相平面解析を利用して, 二つの振動定理と一つの非振動定理を与えた。その振動定理及び非振動定理は方程式 (4.1) がもつ係数 a と b によって描かれる曲線が, ある領域内に留まり続ければ, 方程式 (4.1) のすべての非自明解が振動する (または, 振動しない) のかを判定できる結果である。

方程式 (4.1) の係数 a と b に対して, $u = a(t)$ と $v = b(t)$ とする。このとき, 点 $(a(t), b(t))$ は (u, v) -平面内を移動する。その軌道をパラメトリック曲線と呼ぶことにする。ここで, (u, v) -平面の第 1 象限を曲線 $v = (u/p)^p$ によって, 二つの領域

$$R_1 = \{(u, v): u \geq 0 \text{ and } 0 \leq v \leq (u/p)^p\},$$

$$R_2 = \{(u, v): u \geq 0 \text{ and } v > (u/p)^p\}$$

に分割する。上述した二つの領域とパラメトリック曲線 $(a(t), b(t))$ に対して, Sugie [51]

は以下の二つの振動定理と一つの実振動定理を与えた。

Theorem E. 領域 S は R_1 内で有界閉凸集合とする。十分大きな時刻 t に対して

$$(a(t), b(t)) \in S$$

ならば、方程式 (4.1) のすべての非自明解は振動しない。

Theorem F. 領域 S は R_2 内で有界閉集合とする。十分大きな時刻 t に対して

$$(a(t), b(t)) \in S$$

ならば、方程式 (4.1) のすべての非自明解は振動する。

Theorem G. 領域 S は R_2 の閉包 \bar{R}_2 で有界集合とする。方程式 (4.1) の係数 a が周期関数かつ非定数のとき、十分大きな時刻 t に対して

$$(a(t), b(t)) \in S$$

ならば、方程式 (4.1) のすべての非自明解は振動する。

定理 E と定理 F、定理 G は従来の振動定理及び非振動定理とは全く異なる結果である。また、定理 E は第 1 章の第 1.2 節で紹介した定理 C の拡張でもある。これらの結果の利点は、数値シミュレーションから容易に確かめることができることである。方程式 (4.1) の非自明解が振動する（または、振動しない）のかを判断するには、直接に方程式 (4.1) の解を数値シミュレーションするよりもパラメトリック曲線 $(a(t), b(t))$ を描く方が簡単である。例えば、解の振幅が急激に減少しながら減衰する場合は、高々有限個の零点をもつのか、それとも、無限個に零点をもつかどうかを判断することはできない。一方、定理 E（または、定理 F、定理 G）の条件によって描かれるパラメトリック曲線から判断するのは、さほど困難ではない。しかしながら、定理 E（または、定理 F、定理 G）は、パラメトリック曲線が第一象限に留

まらない場合や、曲線 $v = (u/p)^p$ を横切る場合には適用できない。本章では、上述した弱点を克服するため、次の二つの結果を紹介する。

Theorem 4.1. 方程式 (4.1) の係数 a は上に有界な関数とする。もし

$$\int_0^\infty \left\{ b(t) - \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \right\} dt = \infty$$

ならば、方程式 (4.1) のすべての非自明解は振動する。

Theorem 4.2. 定数 $\lambda_p = \max\{1, p-1\}$ に対して、次の関数

$$c_p(t) = b(t) - \lambda_p \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p - \left(\Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) \right)' \quad (4.3)$$

を定義する。もし

$$\int_0^\infty c_p(t) dt = \infty \quad (4.4)$$

ならば、方程式 (4.1) のすべての非自明解は振動する。

定理 4.1 は $p = 2$ のときでさえも新しい振動定理である。もし、パラメトリック曲線 $(a(t), b(t))$ が有界閉集合 R_2 内に留まり続けるのであれば、任意の $t \geq 0$ に対して

$$b(t) - \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p > \mu$$

を満たす正の定数 μ が存在する。したがって、定理 4.1 の条件である

$$\int_0^\infty \left\{ b(t) - \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \right\} dt = \infty$$

は必然的に成立することになる。この事実は定理 F を改善することを意味する（詳細は [54] を参照せよ）。また、定理 4.1 の証明では、相平面解析を利用している。相平面解析とは、方程式 (4.1) を同値変換した方程式系の解を相平面上に射影して、解全体の動きを幾何学的に捉えることである。この解析方法は、解の安定性を論ずるときによく用いられるが、これを振動理論にも持ち込んだことにより、従来の結果

を改良することができている。本章では、定理 4.1 の証明は省略する ([54] の第 2 節を参照せよ)。

定理 4.2 は、第 2 章と第 3 章でも紹介した Leighton-Wintner の振動定理の拡張である (詳細は、第 4.2 節を見よ)。本章では、特に定理 4.2 に焦点を当て、条件 (4.4) を利用することで定理 F が改善できることを確認する。

定理 4.2 に現れる関数 (4.3) の正体を簡単に述べておく。方程式 (4.1) は、Riccati 不等式及び Enaka and Onitsuka [17] によって一般化された Young の不等式を用いることにより、復元係数 (4.3) のみをもつ半分線形微分方程式

$$(\Phi_p(y'))' + c_p(t)\Phi_p(y) = 0 \quad (4.5)$$

に同値変換することができる。ただし、方程式 (4.1) から方程式 (4.5) への同値変換 (または、方程式 (4.5) から方程式 (4.1) への同値変換) は、それぞれの方程式のある非自明解が振動しないという前提条件のもとで変換することができる。この方程式 (4.1) と方程式 (4.5) に関する同値変換は第 4.2 節で詳しく述べる。また、上述した同値変換を利用することにより、定理 4.2 を証明することができる。その証明は、第 4.3 節に記述する。第 4.4 節では、パラメトリック曲線が第一象限に留まらない場合でかつ曲線 $v = (u/p)^p$ を横切る場合の例を与える。そのような例に対しても、定理 4.2 を適用すれば、方程式 (4.1) のすべての非自明解が振動することを確認する。また、第 4.5 節では、数値シミュレーションを用いて、具体例の解の挙動を描画する。

4.2 半分線形微分方程式に関する同値変換

第 1 章の主定理の証明方法を思い出してもらいたい。定理 1.1 及び定理 1.2 を示す際に、一般化された Mathieu 方程式 (1.1) を同値変換し、減衰係数をもつ 2 階線形微分方程式に書き換えて考察したことが特色であった。つまり、方程式 (1.1) を直接に解析するよりも一見複雑そうな減衰係数をもつ 2 階線形微分方程式を解析する方が収穫が大きかったのである。

一般的に方程式 (4.2) に対して

$$y = x \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) d\tau\right)$$

とすれば, 減衰係数を持たない方程式

$$y'' + c(t)y = 0 \tag{4.6}$$

に変換できる. ただし, 復元係数は

$$c(t) = b(t) - \frac{1}{4}a^2(t) - \frac{1}{2}a'(t) \tag{4.7}$$

である. 実際に

$$\begin{aligned} y'' + c(t)y &= \left(x'' + a(t)x' + \left(\frac{1}{4}a^2(t) + \frac{1}{2}a'(t) + c(t) \right) x \right) \times \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) d\tau\right) \\ &= \left(x'' + a(t)x' + b(t)x \right) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(\tau) d\tau\right) \end{aligned}$$

であることから方程式 (4.6) が得られる. この同値変換では, 関係式 (4.7) を満たしておけば, 方程式 (4.2) のすべての非自明解が振動する (または, 振動しない) ことと, 方程式 (4.6) のすべての非自明解が振動する (または, 振動しない) ことは同値である. このような関係式 (4.7) を利用した方程式 (4.2) 及び方程式 (4.6) のすべての非自明解が振動する (または, 振動しない) 結果は多くの研究者によって与えられている (例えば, [1, 17, 20, 44, 51, 56, 59] を参照せよ). 特に, 任意の $t \geq 0$ に対して, 係数が

$$\int_0^\infty c(t) dt = \int_0^\infty \left\{ b(t) - \frac{1}{4}a^2(t) - \frac{1}{2}a'(t) \right\} dt = \infty$$

を満たすならば, 方程式 (4.6) 及び方程式 (4.2) のすべての非自明解は振動することはよく知られている. これは第 2 章と第 3 章でも紹介した Leighton-Wintner の振動定理である. 我々が導出した定理 4.2 に対して, もし $p = 2$ ならば, $\lambda_2 = 1$ であるから, Leighton-Wintner の振動定理と一致する. したがって, 定理 4.2 は Leighton-Wintner の振動定理を半分線形微分方程式にも適用できるように拡張している. 定理 4.2 を

証明するためには、半分線形微分方程式に対応する関係式 (4.7) を利用した同値変換が必要となる。しかしながら、一般的に二つの解の和が解にならない性質を方程式 (4.1) は持っているために、半分線形微分方程式の場合では、このような同値変換がこれまでに与えられていない。本節では、方程式 (4.1) のすべての非自明解が振動しない仮定のもと、方程式 (4.1) から減衰係数を持たない半分線形微分方程式 (4.5) に同値変換できる結果を以下に与える。

Theorem 4.3. 関数 $\Phi_p(a)$ は区間 $(0, \infty)$ 上で連続微分可能な関数とする。このとき、以下の命題は同値である。

(i) 方程式 (4.1) のすべての非自明解は振動しない。

(ii) Riccati 不等式

$$w' + c_p(t) + (p-1)|w|^{p^*} \leq 0 \quad (4.8)$$

がある区間 $[T, \infty)$ において解 $w(t)$ をもつ。ただし、共役数 p^* は $1/p + 1/p^* = 1$ を満たすものである。

(iii) 方程式 (4.5) のすべての非自明解は振動しない。

定理 4.3 を示すために、任意の $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して、実数値関数 F を

$$F(u, v) = \frac{|u|^p}{p} - uv + \frac{|v|^{p^*}}{p^*} \quad (4.9)$$

と定義する。関数 F が不等式

$$F(u, v) \geq 0$$

を満たすことはよく知られており、この不等式を Young の不等式と呼ばれている。第 4.1 節でも述べたように、Enaka and Onitsuka [17] は、一般化した Young の不等式を次のように与えた。

Lemma 4.1. 実数値関数 F は (4.9) によって与えられた関数とする。このとき、以下の不等式が成り立つ。

(i) もし $1 < p \leq 2$ ならば

$$F(u, v) \geq \frac{1}{p^*} |\Phi_p(u) - v|^{p^*}$$

が成立する.

(ii) もし $p \geq 2$ ならば

$$F(u, v) \geq \frac{1}{p^*} |\Phi_p(u) - v|^{p^*} - \frac{p-2}{p} |u|^p$$

が成立する.

補題 4.1 を利用して, 定理 4.3 を証明する.

Proof of Theorem 4.3. (i) から (ii) を示す. 方程式 (4.1) は振動しない解 $x(t)$ をもつと仮定する. このとき, 十分大きな時刻 $T > 0$ が任意の $t \geq T$ に対して

$$r(t) = \Phi_p \left(\frac{x'(t)}{x(t)} \right)$$

とおく. $p/p^* = p - 1$ であり, 区間 $[T, \infty)$ で r は連続微分可能でかつ $x'(t)/x(t) = \Phi_{p^*}(r)$ であるから

$$\begin{aligned} r'(t) &= -(p-1) \left| \frac{x'(t)}{x(t)} \right|^p - a(t) \Phi_p \left(\frac{x'(t)}{x(t)} \right) - b(t) \\ &= -\frac{p}{p^*} |r(t)|^{p^*} - a(t)r(t) - b(t) \\ &= -p \left(\frac{1}{p^*} |r(t)|^{p^*} + \frac{1}{p} a(t)r(t) \right) - b(t) \\ &= -p \left(\frac{1}{p^*} |r(t)|^{p^*} + \frac{1}{p} a(t)r(t) + \frac{1}{p} \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \right) + \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p - b(t) \\ &= -pF \left(\frac{1}{p} a(t), -r(t) \right) + \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p - b(t) \end{aligned}$$

となる. ただし, $F(u, v)$ は (4.9) で与えた関数である. ここで, 上の等式に対して, $p/p^* = p - 1$ であることに注意して, 補題 4.1 の (i) を用いれば, $1 < p \leq 2$ のとき,

$\lambda_p = 1$ であるから

$$\begin{aligned} r'(t) &\leq -\frac{p}{p^*} \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*} + \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p - b(t) \\ &= -(p-1) \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*} + \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p - b(t) \end{aligned}$$

と評価できる. 一方, $p/p^* = p-1$ であることに注意し, 補題 4.1 の (ii) を利用すれば, $p \geq 2$ のとき, $\lambda_p = p-1$ であるから

$$\begin{aligned} r'(t) &\leq -p \left(\frac{1}{p^*} \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*} - \frac{p-2}{p} \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \right) + \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p - b(t) \\ &= -(p-1) \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*} + (p-1) \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p - b(t) \end{aligned}$$

が得られる. したがって, 任意の $p > 1$ に対して, $\lambda_p = \max\{1, p-1\}$ であるから

$$r'(t) \leq -(p-1) \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*} + \lambda_p \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p - b(t)$$

がわかる. ここで, 任意の $t \geq T$ に対して

$$w(t) = \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t)$$

とおけば, $\Phi_p(a)$ は連続微分可能であるから

$$w'(t) = r'(t) + \left(\Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) \right)' \leq -(p-1)|w(t)|^{p^*} - c_p(t)$$

が得られる. したがって, (ii) が示された.

(ii) から (i) を示す. 関数 w が Riccati 不等式 (4.8) を満たすとする. ここで, 新たに

$$r(t) = w(t) - \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right)$$

とおく. 任意の $t \geq T$ に対して, $\Phi_p(a)$ は連続微分可能であるから

$$\begin{aligned}
r'(t) &= w'(t) - \left(\Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) \right)' \\
&\leq -c(t) - (p-1) \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*} - \left(\Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) \right)' \\
&= -b(t) + \lambda_p \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p + \left(\Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) \right)' - \frac{p}{p^*} \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*} - \left(\Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) \right)' \\
&= -b(t) + \lambda_p \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p - \frac{p}{p^*} \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*}
\end{aligned}$$

がわかる. 上の不等式に対して, 補題 4.1 の (i) を利用すれば, $1 < p \leq 2$ のとき, $\lambda_p = 1$ であるから

$$\begin{aligned}
r'(t) &\leq -b(t) - pF \left(\frac{1}{p} a(t), -r(t) \right) + \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \\
&= -b(t) - p \left(\frac{1}{p} \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p + \frac{1}{p} a(t)r(t) + \frac{1}{p} |r(t)|^{p^*} \right) + \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \\
&= -b(t) - a(t)r(t) - (p-1)|r(t)|^{p^*}
\end{aligned}$$

となる. 一方, 補題 4.1 の (ii) を用いれば, $p \geq 2$ のとき, $\lambda_p = p-1$ であるから

$$\begin{aligned}
r'(t) &\leq -b(t) - \frac{p}{p^*} \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*} + (p-1) \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \\
&= -b(t) - \frac{p}{p^*} \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*} + (p-2) \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p + \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \\
&= -b(t) - p \left(\frac{1}{p^*} \left| \Phi_p \left(\frac{1}{p} a(t) \right) + r(t) \right|^{p^*} - \frac{p-2}{p} \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \right) + \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \\
&\leq -b(t) - pF \left(\frac{1}{p} a(t), -r(t) \right) + \left(\frac{|a(t)|}{p} \right)^p \\
&= -b(t) - a(t)r(t) - (p-1)|r(t)|^{p^*}
\end{aligned}$$

と評価できる. ゆえに, 任意の $p > 1$ に対して

$$r'(t) \leq -b(t) - a(t)r(t) - (p-1)|r(t)|^{p^*} \quad (4.10)$$

が得られる。任意の $t \geq T$ に対して関数 ξ を

$$\xi(t) = u(t)r(t)$$

とする。ただし

$$u(t) = \exp\left(\int_T^t a(s)ds\right)$$

である。 $r = \xi/u$ であるから

$$\begin{aligned} r'(t) &= \frac{\xi'(t)u(t) - \xi(t)u'(t)}{u^2(t)} = \frac{\xi'(t)u(t) - \xi(t)a(t)u(t)}{u^2(t)} \\ &= \frac{\xi'(t)}{u(t)} - \frac{\xi a(t)}{u(t)} \end{aligned}$$

がわかる。不等式 (4.10) から、任意の $t \geq T$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{\xi'(t)}{u(t)} - \frac{\xi(t)a(t)}{u(t)} &\leq -(p-1) \left| \frac{\xi(t)}{u(t)} \right|^{p^*} - \frac{\xi(t)a(t)}{u(t)} - b(t) \\ \xi'(t) + (p-1)u(t) \left| \frac{\xi(t)}{u(t)} \right|^{p^*} &\leq -b(t)u(t) \end{aligned}$$

となる。ここで、新たに

$$-C(t) := \xi'(t) + (p-1)u(t) \left| \frac{\xi(t)}{u(t)} \right|^{p^*}$$

とおく。このとき、任意の $t \geq T$ に対して、半分線形微分方程式

$$(u(t)\Phi_p(x'))' + C(t)\Phi_p(x) = 0 \tag{4.11}$$

は振動しない解

$$x(t) = \exp\left(\int_T^t \Phi_{p^*}\left(\frac{\xi(s)}{u(s)}\right) ds\right)$$

をもつ。したがって、方程式 (4.11) のすべての非自明解は振動しない。また、関数 C と関数 ub は連続であり、任意の $t \geq T$ に対して

$$C(t) \geq u(t)b(t)$$

となるから，方程式 (4.11) と方程式

$$(u(t)\Phi_p(x'))' + u(t)b(t)\Phi_p(x) = 0 \quad (4.12)$$

に、半分線形微分方程式の Sturm の比較定理を用いれば，方程式 (4.12) のすべての非自明解も振動しない．方程式 (4.12) は方程式 (4.1) と同値な方程式であることから，方程式 (4.1) のすべての非自明解も振動しないことがわかる．

(ii) から (iii) を示す．関数 w が区間 $[T, \infty)$ 上で Riccati 不等式 (4.8) を満たすとすする．すなわち， w が任意の $t \geq T$ に対して

$$w'(t) + (p-1)|w(t)|^{p^*} \leq -c_p(t)$$

を満たしている．ここで，

$$-C_p(t) := w'(t) + (p-1)|w(t)|^{p^*}$$

とおく．このとき，任意の $t \geq T$ に対して，半分線形微分方程式

$$(\Phi_p(x'))' + C_p(t)\Phi_p(x) = 0 \quad (4.13)$$

は振動しない解

$$x(t) = \exp\left(\int_T^t \Phi_{p^*}(w(s))ds\right)$$

をもつことから，方程式 (4.13) のすべての非自明解は振動しない．さらに，関数 C_p と関数 c_p は連続であり，任意の $t \geq T$ に対して

$$C_p(t) \geq c_p(t)$$

となるから，方程式 (4.13) と方程式 (4.5) に、半分線形微分方程式の Sturm の比較定理を用いれば，方程式 (4.5) のすべての非自明解も振動しない．

(iii) から (ii) を示す．方程式 (4.5) は振動しない解 $y(t)$ をもつと仮定する．この

とき, 十分大きな時刻 $T > 0$ が任意の区間 $t \geq T$ に対して

$$w(t) = \Phi_p \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)$$

とおけば, 関数 w は Riccati 不等式 (4.8) を満たす. □

4.3 主結果の証明

定理 4.2 の証明に入る前に, 次の補題を提示する.

Lemma 4.2. 任意の $t \geq T$ に対して, 微分不等式

$$v' \geq (p-1)|v|^{p^*} \tag{4.14}$$

は $v(t) > 0$ となる解を持たない.

Proof. $v(t)$ を区間 $[T, \infty)$ において $v(t) > 0$ となる (4.14) の解とする. このとき, $[T, \infty)$ に対して, (4.14) と $(p-1)(p^*-1) = 1$ を利用すれば

$$\begin{aligned} (-(v(t))^{-(p^*-1)})' &= (p^*-1)(v(t))^{-p^*} v'(t) \\ &\geq (p^*-1)(p-1)(v(t))^{-p^*} (v(t))^{p^*} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから, これを両辺 $[T, t]$ 上で積分すれば, 任意の $t \geq T$ に対して

$$-(v(t))^{-(p^*-1)} + (v(T))^{-(p^*-1)} \geq t - T$$

が成り立つ. $v(t) > 0$ であるから, 任意の $t \geq T$ に対して

$$(v(T))^{-(p^*-1)} \geq t - T$$

を得るが, $t \rightarrow \infty$ とすれば, 上の不等式は矛盾が生じる. したがって, 区間 $[T, t]$ において $v(t) > 0$ となる (4.14) の解 $v(t)$ は存在しない. □

以下、上述した補題 4.2 と定理 4.3 を用いて、定理 4.2 を示す。

Proof of Theorem 4.2. 方程式 (4.1) は振動しない解 $x(t)$ をもつと仮定する。半分線形微分方程式に対する Sturm の分離定理から、方程式 (4.1) は一つの振動しない解をもてば、すべての非自明解も振動しないことがわかる。このとき、定理 4.3 から、方程式 (4.1) に対応する Riccati 方程式

$$w' + c_p(t) + (p-1)|w|^{p^*} = 0$$

は $[T, \infty]$ において解 w をもつ。ここで、 $v = -w$ とする。 w は $[T, \infty]$ において微分可能であるから、Riccati 方程式 (4.8) は

$$v'(t) = c_p(t) + (p-1)|v(t)|^{p^*} \quad (4.15)$$

となる。方程式 (4.15) の両辺を $[T, t]$ 上で積分すれば

$$v(t) - v(T) = \int_T^t c_p(s) ds + (p-1) \int_T^t |v(s)|^{p^*} ds$$

を得る。ここで、簡単のために

$$C(t) = \int_T^t c_p(s) ds + v(T)$$

とおけば、任意の $t \geq T$ に対して

$$v(t) = (p-1) \int_T^t |v(s)|^{p^*} ds + C(t) \quad (4.16)$$

が成り立つ。また

$$C(t) = \int_{T_1}^t c_p(s) ds - \int_{T_1}^T c_p(s) ds + v(T)$$

であるから、(4.4) より、 $t \rightarrow \infty$ とすれば、 $C(t) \rightarrow \infty$ となる。すなわち、 $T_1 > T$

を十分大きくとれば, 任意の $t \geq T_1$ に対して

$$C(t) > 0$$

がわかる. したがって, (4.16) から, $[T_1, \infty)$ において $v(t) > 0$ である. そこで

$$V(t) = (p-1) \int_T^t (v(s))^{p^*} ds$$

とおけば, 関数 V は $t \geq T_1 + 1$ に対して

$$\begin{aligned} V(t) &= (p-1) \int_T^{T_1} |v(s)|^{p^*} ds + (p-1) \int_{T_1}^{T_1+1} |v(s)|^{p^*} ds + \int_{T_1+1}^t |v(s)|^{p^*} ds \\ &\geq (p-1) \int_{T_1}^{T_1+1} |v(s)|^{p^*} ds \\ &> 0 \end{aligned}$$

かつ

$$V'(t) = (p-1)|v(s)|^{p^*}$$

を満たす. 以上のことから, (4.16) より, 任意の $t \geq T_1 + 1$ に対して

$$v(t) = V(t) + C(t) > V(t) > 0$$

がわかる. 上の不等式の両辺を p^* 乗してから, 両辺に $p-1$ を掛ければ, 任意の $t \geq T_1 + 1$ に対して

$$(p-1)(v(t))^{p^*} > (p-1)(V(t))^{p^*}$$

が成立する. したがって, 任意の $t \geq T_1 + 1$ に対して, $V'(t) = (p-1)(v(t))^{p^*}$ であるから, 関数 V は区間 $[T_1 + 1, \infty)$ において

$$V'(t) > (p-1)(V(t))^{p^*}$$

かつ $V(t) > 0$ を満たす. 上述した事実は補題 4.2 に矛盾する. したがって, 方程式 (4.1) のすべての非自明解は振動する. \square

4.4 具体例

定理 4.2 は、方程式 (4.1) の係数 a と b が周期的でない場合でも適用できるが、ここではパラメトリック曲線が単純な場合である閉曲線の例を示す。第 4.1 節でも述べたように、パラメトリック曲線が第一象限に留まらない場合及び曲線 $v = (u/p)^p$ を横切る場合の例を与える。任意の $t \geq 0$ に対して、次の係数

$$u = a(t) = c + r \cos t \quad \text{かつ} \quad v = b(t) = d + r \sin t \quad (4.17)$$

をもつ方程式 (4.1) を考える。係数 a と b によって描かれたパラメトリック曲線は、半径 r を中心とする円であり、その中心は (c, d) であることは明らかである。

パラメータ p を $p = 4$ とする。このとき、係数 (4.17) に対して、(4.3) を直接計算すれば

$$\begin{aligned} b(t) - 3 \left(\frac{|a(t)|}{4} \right)^4 - \left(\Phi_4 \left(\frac{1}{4} a(t) \right) \right)' \\ = d + r \sin t - \frac{3}{28} (c + r \cos t)^4 - \frac{3}{26} r (c + r \cos^2 t) \sin t \\ = d + r \sin t - \frac{1}{256} \left(c^4 + 3c^2 r^2 + \frac{3}{8} r^4 \right) \\ - \frac{1}{256} \left(cr (4c^2 + 3r^2) \cos t + r^2 \left(3c^2 + \frac{1}{2} r^2 \right) \cos 2t + cr^3 \cos 3t + \frac{1}{8} r^4 \cos 4t \right) \\ + \frac{3}{64} r \left(c^2 - \frac{r^2}{2} \right) \sin t + \frac{3}{32} cr^2 \sin t \cos t + \frac{3}{128} r^3 \sin t \cos(2t) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$d > \frac{1}{256} \left(c^4 + 3c^2 r^2 + \frac{3}{8} r^4 \right) \quad (4.18)$$

を満たせば、条件 (4.4) は成立する。

Example 4.1. $p = 4$ かつ $c = 2$, $d = 6$, $r = 7$ のとき、(4.17) をもつ方程式 (4.1) のすべての非自明解は振動する。

直接計算をすれば、 $p = 4$ かつ $c = 2$, $d = 6$, $r = 7$ のとき、条件 (4.17) を満たすことがわかる。また、上述したような各パラメータの値の (4.17) をもつ方程式 (4.1) のパラメトリック曲線 $(a(t), b(t))$ 及び解軌道については、図 4.1 と図 4.2 を見よ。

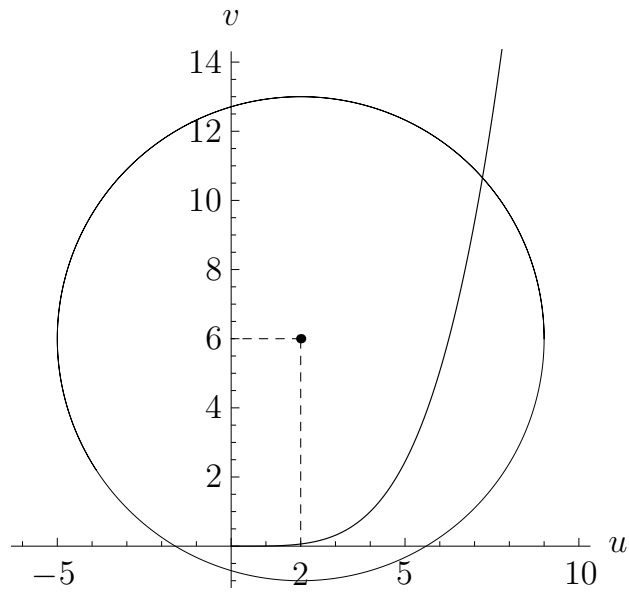


Figure 4.1: (u, v) -平面における $p = 4$ かつ $c = 2$, $d = 6$, $r = 7$ のときのパラメトリック曲線 $(a(t), b(t))$

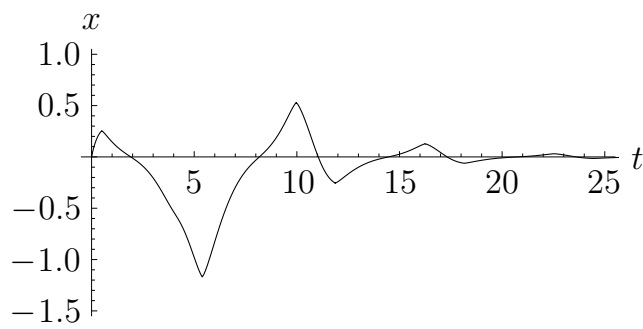


Figure 4.2: $p = 4$ かつ $c = 2$, $d = 6$, $r = 7$ のとき, 初期値 $(x(0), x'(0)) = (0, 1)$ を満たすような (4.17) をもつ方程式 (4.1) の解

参考文献

- [1] R. P. Agarwal, S. R. Grace and D. O'Regan, *Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [2] T. B. Benjamin and F. Ursell, The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A.*, **225** (1954), 505–515.
- [3] J. Binney, Twisted and warped disks as consequences of heavy halos, *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **183** (1978), 779–797.
- [4] J. Binney, Resonant excitation of motion perpendicular to galactic planes, *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **196** (1981), 445–467.
- [5] H. Broer, J. Puig and C. Simo, Resonance tongues and instability pockets in the quasi-periodic Hill-Schrodinger equation, *Commun. Math. Phys.*, **241** (2003), 467–503.
- [6] D. Çakmak, A note on M. K. Kwong and J. S. W. Wong's paper, *Dynam. Systems Appl.*, **15** (2006), 409-414.
- [7] E. A. Cerda and E. L. Tirapegui, Faraday's instability in viscous fluid, *J. Fluid Mech.*, **368** (1998), 195–228.
- [8] W. A. Coppel, *Disconjugacy*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 220, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.

- [9] S. Davis and S. Rosenblat, A quasiperiodic Mathieu-Hill equation, *SIAM J. Appl.*, **38** (1980), 139–155.
- [10] P. Djakov and B. Mityagin, Simple and double eigenvalues of the Hill operator with a two-term potential, *J. Approx. Theory*, **135** (2005), 70–104.
- [11] P. Djakov and B. Mityagin, Asymptotics of instability zones of the Hill operator with a two term potential, *J. Funct. Anal.*, **242** (2007), 157–194.
- [12] O. Došlý, *Half-linear differential equations*, in: A. Cañada, P. Drábek, A. Fonda (Eds.), *Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations*, vol. I, Elsevier, Amsterdam, 2004, pp. 161–357.
- [13] O. Došlý, A. Özbekler and R. Šimon Hilscher, Oscillation criterion for half-linear differential equations with periodic coefficients, *J. Math. Anal. Appl.*, **393** (2012), 360–366.
- [14] O. Došlý and P. Řehák, *Half-linear Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, **202**, Elsevier (Amsterdam, 2005).
- [15] Á. Elbert, A half-linear second order differential equation, *Colloq. Math. Soc., János Bolyai* **30** (1979), 153–180.
- [16] M. A. El-Sayed, An oscillation criterion for a forced second order linear differential equation, *Proc. Amer. Math. Soci.*, **118** (1993), 813–817.
- [17] Y. Enaka and M. Onitsuka, Integral averaging technique for oscillation of damped half-linear oscillators, *Czechoslovak Mathematical Journal*, accepted.
- [18] M. Faraday, On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **121** (1831), 299–340.
- [19] W. B. Fite, Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **19** (1918), 341–352.

- [20] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Corrected reprint of the second (1982) edition, With a foreword by Peter Bates, Classics in Appl. Math., vol. 38 (Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2002).
- [21] A. D. Hemery and A. P. Veselov, Whittaker-Hill equation and semifinite-gap Schrödinger operators, *J. Math. Phys.*, **51** no. 7, 072108 (2010), 17 pp.
- [22] G. W. Hill, On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and the moon, *Acta. Math.*, **8** (1886), 1–36.
- [23] P. Humbert, Some hyperspace harmonic analysis problems introducing extensions of Mathieu’s equation, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **46** (1927), 206–209.
- [24] R. H. Hunt, R. A. Leacock, C. W. Peters and K. T. Hecht, Internal-rotation in hydrogen peroxide: the far-infrared spectrum and the determination of the hindering potential, *J. Chem. Phys.*, **42** (1965), 1931–1946.
- [25] E. L. Ince, A linear differential equation with periodic coefficients, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **23** (1925), 56–74.
- [26] E. L. Ince, The real zeros of solutions of a linear differential equation with periodic coefficients, *Proc. London Math. Soc.*, (2) **25** (1926), 53–58.
- [27] K. Ishibashi and J. Sugie, Simple conditions for parametrically excited oscillations of generalized Mathieu equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **446** (2017), 233–247.
- [28] J. Jaroš, T. Kusano and T. Tanigawa, Nonoscillatory half-linear differential equations and generalized Karamata functions, *Nonlinear Anal.*, **64** (2006), 762–787.
- [29] K. Klotter and G. Kotowski, Über die Stabilität der Lösungen Hillscher Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Parametern, I, Über die Gleichung $y'' + (\lambda + \omega_1 \cos x + \omega_2 \cos 2x)y = 0$, *Z. Angew. Math. Mech.*, **23** (1943), 149–155.

- [30] V. Komkov, A technique for the detection of oscillation of second order ordinary differential equation, *Pacific J. Math.*, **42** (1972), 105-115.
- [31] Q. Kong and M. Pašić, Second-order differential equations some significant results due to James S. W. Wong, *Diff. Eqn. Appl.*, **6** (2014), 99–163.
- [32] T. Kusano and V. Marić, Nonoscillatory linear and half-linear differential equations having regularly varying solutions, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **14** (2004), 351–357.
- [33] M. K. Kwong and J. S. W. Wong, Oscillation and nonoscillation of Hill’s equation with periodic damping, *J. Math. Anal. Appl.*, **288** (2003), 15–19.
- [34] M. K. Kwong and J. S. W. Wong, On the oscillation of Hill’s equations under periodic forcing, *J. Math. Anal. Appl.*, **320** (2006), 37–55.
- [35] C. F. Lee, C. C. Yeh, C. H. Hong and R. P. Agarwal, Lyapunov and Wirtinger inequalities, *Appl. Math. Lett.*, **17** (2004), 847–853.
- [36] W. Leighton, Hill’s equation revisited, *J. Math. Anal. Appl.*, **114** (1986), 497–502.
- [37] W. T. Li, C. K. Zhong and X. L. Fan, Oscillation criteria for second-order half-linear ordinary differential equations with damping, *Rocky Mountain J. Math.*, **33** (2003), 927–951.
- [38] W. Magnus and S. Winkler, *Hill’s Equation*, Dover, New York, 1979.
- [39] É. Mathieu, Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique, *J. Math. Pure. Appl.*, **13** (1868), 137–203.
- [40] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu functions*, Dover, New York, 1964.
- [41] R. Mennicken, On Ince’s equation, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **29** (1968), 144–160.

- [42] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [43] R. Oinarov, Kh. Ramazanov and A. Tiryaki, Sturm comparison theorems for half-linear equations with a damping term, *Eurasian Math. J.*, **6** (2015), 85–95.
- [44] A. Özbekler and A. Zafer, Leighton-Coles-Wintner type oscillation criteria for half-linear impulsive differential equations, *Adv. Dyn. Syst. Appl.*, **5** (2010), 205–214.
- [45] M. Pašić and J. S. W. Wong, Rectifiable oscillations in second-order half-linear differential equations, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **188** (2009), 517–541.
- [46] J. Rajchenbach and D. Clamond, Faraday waves: their dispersion relation, nature of bifurcation and wavenumber selection revisited, *J. Fluid Mech.*, **777** (2015), R2, 12 pages.
- [47] R. Rand and T. Morrison, 2: 2: 1 resonance in the quasi-periodic Mathieu equation, *Nonlinear Dynam.*, **40** (2005), 195–203.
- [48] L. F. Roncaratti and V. Aquilanti, Whittaker-Hill equation, Ince polynomials, and molecular torsional modes, *Int. J. Quant. Chem.*, **110** (2010), 716–730.
- [49] H. J. Stoß, Ein Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der Differentialgleichung $y'' + (\lambda + 2\lambda_1 \cos x + 2\lambda_2 \cos 2x)y = 0$, *Numer. Math.*, **10** (1967), 423–436.
- [50] C. Sturm, Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *J. Math. Pures Appl.*, **1** (1836), 106–186.
- [51] J. Sugie, Geometrical conditions for oscillation of second-order half-linear differential equations, *Acta. Math. Hungar.*, **118** (2008), 369–394.
- [52] J. Sugie and K. Matsumura, A nonoscillation theorem for half-linear differential equations with periodic coefficients, *Appl. Math. Comput.*, **199** (2008), 447–455.

- [53] J. Sugie, Global asymptotic stability for damped half-linear oscillators, *Nonlinear Anal.*, **74** (2011), 7151–7167.
- [54] J. Sugie and K. Ishibashi, Integral condition for oscillation of half-linear differential equations with damping, *Appl. Math. Lett.*, **79** (2018), 146–154.
- [55] Y. G. Sun, C. H. Ou and J. S. W. Wong, Interval oscillation theorems for a second-order linear differential equation, *Comput. Math. Appl.*, **48** (2004), 1693–1699.
- [56] C. A. Swanson, *Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 48, New York and London, Academic Press, 1968.
- [57] E. T. Whittaker, On a class of differential equations whose solutions satisfy integral equations, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **33** (1914), 14–23.
- [58] J. S. W. Wong, Second order nonlinear forced oscillations, *SIAM J. Math. Anal.*, **19** (1988), 667–675.
- [59] J. S. W. Wong, On a theorem of Sobol, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **27** (1999), 253–264.
- [60] J. S. W. Wong, On Kamenev-type oscillation theorems for second-order differential equations with damping, *J. Math. Anal. Appl.*, **258** (2001), 244–257.
- [61] J. Yan, A note on an oscillation criterion for an equation with damped term, *Proc. Amer. Math. Soci.*, **90** (1984), 277–280.
- [62] J. Yan, Oscillation theorems for second order linear differential equations with damping, *Proc. Amer. Math. Soci.*, **98** (1986), 276–282.
- [63] Z. Zheng, Note on Wong’s paper, *J. Math. Anal. Appl.*, **274** (2002), 466–473.
- [64] R. S. Zounes and R. H. Rand, Transition curves in the quasi-periodic Mathieu equation, *SIAM J. Appl. Math.*, **58** (1998), 1094–1115.