

氏名	石橋 和葵
学位の種類	博士 (理学)
学位記番号	総博甲第123号
学位授与年月日	平成30年3月23日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項
文部科学省報告番号	甲第619号
専攻名	総合理工学専攻
学位論文題目	Parametrically excited oscillations of the Mathieu equation and the Whittaker-Hill equation (Mathieu 方程式及び Whittaker-Hill 方程式に関する係数励振振動)
論文審査委員	主査 島根大学教授 杉江 実郎 島根大学教授 黒岩 大史 島根大学教授 和田 健志 島根大学准教授 山田 拓身

論文内容の要旨

係数励振現象とは、いくつかのパラメータを周期的に変化させることによって振幅が拡大する振動現象である。例えば、人間がブランコを漕ぐとき、周期的に体の重心を移動させることによって、係数励振を引き起こしている。係数励振の先駆的研究として、フランスの数学者 Mathieu^[5] は楕円型太鼓膜の振動に関する研究を行い、2階線形微分方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta \cos(2t))x = 0$$

を導いた。ここで、パラメータ α と β は任意の実数である。この方程式は彼の名前に因んで、Mathieu 方程式と呼ばれている。Mathieu 方程式は、ファラデー波の実験や音叉と弦の実験などにも登場するだけでなく、偏微分方程式とも重要な関わりがある。実際、電磁波や音響学、地震学などでよく扱われる Helmholtz 方程式を円柱座標変換すると、Mathieu 方程式が導出される。このように、Mathieu 方程式は、物理学や工学分野に深い関係を有している。

Mathieu 方程式は、過去150年以上にわたって研究され続けてきた。ただし、その中心となってきたのは解の安定性理論であり、具体的にパラメータ α と β を決めた Mathieu 方程式の解を数値解法によって近似的に求めるような研究が大部分であった。しかし、Mathieu 方程式の解構造を探るためには、解の安定性だけではなく、振動性や有界性、周期解の存在性などの定性的理論の構築が不可欠である。

本論文の目的は、Mathieu 方程式の解の振動性に関する判定法を与えることである。恒等的に零である関数は Mathieu 方程式の一つの解である。これは自明解と呼ぶ。Mathieu 方程式は、2階線形微分方程式であるから、初期値を与えると、それに依存する唯一の解が未来永劫存在すること（初期値に関する解の一意性と大域的存在性）は保証されている。したがって、解の漸近挙動は無数個の零点をもつ（振動する）のか、それとも高々有限個しか零点を持たない（振動しな

い) かの二つに大別できる。このように、振動・非振動の観点から、方程式の解構造を探るのが振動理論である。既に、Leighton^[2]やEl-Sayed^[1]、Sun, Ou and Wong^[3]らによって、Mathieu方程式の解が振動するための十分条件は得られていた。特に、Leighton^[2]は、Mathieu方程式のすべての非自明解が振動するためにパラメータ α と β が満たすべき条件を、漸化式を用いて与えた。しかし、具体的な α (または β) の値から対応する β (または α) の厳密な値を手計算で与えることは一般には不可能であり、計算機を用いて得られる近似値で我慢しなければならない。しかも、 α (または β) の値を変えれば、また同じプロセスを経なければならず、Mathieu方程式の解構造全体を見通すことは困難である。したがって、計算機を用いずとも手計算によって、非自明解の振動・非振動を容易に判定できる条件を与えることは、極めて有意義であると言える。本研究では、このような判定法の導出を目指した。

本論文は4章からなり、以下に各章の概要を記す。

第1章では、Mathieu方程式の解の振動問題を考察する。特に、Mathieu方程式の係数の角速度を2から任意の正の実数 ω に一般化した2階線形微分方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta \cos(\omega t))x = 0$$

を考える。この一般化されたMathieu方程式のすべての非自明解が振動する (または振動しない) ことを保証する各パラメータ (α, β, ω) に関する十分条件を導出する。得られた条件が満たされるか否かは手計算でも容易に判別できる。また、Leighton^[2]、El-Sayed^[1]、Sun, Ou and Wong^[3]による先行結果と比較する。

第2章では、Mathieu方程式の係数項をより一般化した2階線形微分方程式

$$y'' + (\lambda + 4mq \cos(2t) + 2q^2 \cos(4t))y = 0$$

の解の振動性を考察する。ただし、 λ と q は実数であり、 m は自然数である。この方程式は、Whittaker-Hill方程式と呼ばれている。Magnus and Winkler^[4]によれば、Mathieu方程式やInce方程式などの周期係数をもつ線形微分方程式のみならず、合流型超幾何微分方程式など様々な方程式と深い関係をもつことが報告されている。しかし、Whittaker-Hill方程式は、二つの角速度をもっているため、Mathieu方程式に比べて数学解析は一段と難しくなる。本論文では、Whittaker-Hill方程式がもつパラメータを $m = 1$ かつ $q = 1/2$ と定めたとき、残りのパラメータ λ がどのような条件を満たせば、すべての非自明解が振動する (または振動しない) のかを明確に分類する。

第3章では、二つの角速度をもつ2階線形微分方程式

$$x'' + (-\alpha + \beta \cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t))x = 0$$

の解の非振動性を考察する。ただし、二つの角速度 ω_1 と ω_2 は正の実数である。これらの比率 ω_1/ω_2 が有理数ならば、この方程式の係数 $-\alpha + \beta \cos(\omega_1 t) + \gamma \cos(\omega_2 t)$ は周期関数となる。一方、比率 ω_1/ω_2 が無理数ならば、係数は周期関数ではなく、準周期関数となる。したがって、フロッケの理論と呼ばれる、周期係数をもつ線形微分方程式の定性的理論を考察する、よく知られた手法を適用することはできない。我々は、フロッケの理論の穴を埋める解析方法を構築し、係数が準周期関数である場合にも、すべての非自明解が振動しないことを保証する条件を与える。

第4章では、2階非線形微分方程式の解の振動性について考察する。第1章から第3章で扱った線形微分方程式では、解の定数倍も解になり (斉次性)、二つの解の和も解になる (加法性) が、本章では、斉次性のみが成り立つような非線形微分方程式を研究対象とする。このような方程式は、線形微分方程式がもつ性質の半分だけをもつことから、半分線形微分方程式と呼ばれている。本論文では、半分線形微分方程式のすべての非自明解が振動するための十分条件を与える。

論文審査結果の要旨

本学位論文審査委員会は当該提出論文を詳細に査読するとともに、博士論文公聴会を平成30年2月5日（月）に開催し、十分な質疑応答を行った。以下に審査結果の要旨を記す。

本提出論文で扱われている研究テーマは、2階線形微分方程式及び2階半分線形微分方程式の解の漸近的性質の一つとして、国内外で広く注目されている‘非自明解の振動性’である。本研究は数学的理論探究であるから汎用性は広いが、特に、マッシュー方程式（Mathieu equation）とウィッタカー・ヒル方程式（Whittaker-Hill equation）及びそれらを拡張した方程式に焦点を当てている。これらの方程式はいくつかのパラメータを有し、それらの周期的変化が質点運動の振幅を増大させるという「係数励振現象（parametric excitation）」を引き起こすモデルとして良く知られている。係数励振現象の身近な例として、ブランコの立ち漕ぎが挙げられる。この場合、身体の重心移動によって大きな揺れが生じる。係数励振現象を数理的に初めて考究したのは、フランスの数学者 Mathieu による楕円型太鼓膜の振動に関する研究である。また、マッシュー方程式は支点が垂直方向に周期的に振動する倒立振り子の線形近似モデルでもある。それら以外にも、ファラデー波の実験・音叉と弦の実験・鉄道車両のパンタグラフの架線からの離線現象・地震時に地盤が揺れることによる建物の振動増幅現象などにも登場し、理学・工学や実社会において重要な方程式である。ウィッタカー・ヒル方程式はマッシュー方程式の一般化であると考えことができ、これ自体にも理工学分野への応用がある。したがって、本提出論文に関連する研究分野の裾野は広いといえる。

マッシュー方程式などの運動方程式では、質点の変位とその平衡状態とのズレを時間の関数で表すのが基本であり、これを解と呼んでいる。ズレが全くない（ズレが恒等的に零である関数で表されるとき）ときもその運動方程式を満たす。これを自明解という。これ以外の解が非自明解である。ズレの符号が無限回変化するか否かによって、非自明解が振動するか、振動しないかの2通りに大別される。微分方程式の非自明解の振動性に関する研究は古くから行われ、特に、線形微分方程式については膨大な数の先行研究がある。それに比べると、マッシュー方程式やウィッタカー・ヒル方程式の非自明解が振動するか否かを判定する基準は殆ど解明されていないのが現状である。そのように学術的蓄積が少ない状況の中であっても、本提出論文では、計算機を使わずとも手計算程度で容易に非自明解の振動・非振動を決定できる条件を与えるなどしており、申請者の研究は先駆的であり、純粋数学的側面に加えて関連分野への応用面に対しても、今後の発展が大いに期待される。

本提出論文は、序文を述べるとともに数学的準備の整えた後、本文は4つの章で構成されている。そのうち、第1章は関連論文(a)を、第2章と第3章は現在査読中の2編の学術論文をそれぞれ再構成したものである。また、第4章は関連論文(b)の内容を別の視点からまとめたものである。関連論文2編はどちらもレフェリー制度の整った国際一流雑誌に既に掲載されている。

第1章では、一般化されたマッシュー方程式に関する振動問題を考察している。通常のマッシュー方程式の係数の角速度は2であるが、ここでは、角速度を任意の正の実数 ω にして適用範囲を広げている。そのことによって、一般化されたマッシュー方程式は3つのパラメータを含むことになる。これらのパラメータ間の簡単な関係式によって、すべての非自明解が振動することを保証する条件や振動しないことを保証する条件を与えている。これらの成果は先行研究の結果を大きく改良するとともに、Q1雑誌（SJR Journal Ranks 調べ）に掲載された論文に記述されていた予想（Conjecture）が間違っていることを明らかにしている。第2章では、ウィッ

タカー・ヒル方程式に関する振動問題を考察している。ウィッタカー・ヒル方程式はインス方程式 (Ince equation) や合流型超幾何微分方程式など様々な方程式と深い関係をもっている。ウィッタカー・ヒル方程式の係数は角速度 2 をもつ項と角速度 4 をもつ項に分かれている。そのため、マシュー方程式より解析が一段と難しくなる。第 1 章で用いた方法では不十分な結果しか得られない。そこで、ウィッタカー・ヒル方程式に効果的な変数変換を施すことによって、減衰項をもつ 2 階線形微分方程式に変換し、その係数間のある合成関数に着目して、ウィッタカー・ヒル方程式のすべての非自明解が振動するためのパラメータに関する必要十分条件を与えている。この章で導いた解析手法が適用できる方程式はウィッタカー・ヒル方程式だけに限らない。この点からも今後の研究の進展に期待がもてる。

第 1 章で考察された一般化されたマシュー方程式の係数は 1 つの角速度をもつので、その係数は常に周期関数である。しかし、実際の現象を記述するモデルとして、しばしば係数が非周期関数であるマシュー型方程式が物理学や工学分野の研究で提案されている。第 3 章では、そのようなマシュー型方程式にも適用可能な結果を与えている。考察しているマシュー方程式の係数は任意の正の実数 ω_1 と ω_2 を角速度とする項に分かれている。もし、2 つの角速度の比 ω_1/ω_2 が有理数であれば、係数は周期関数となる。一方、比 ω_1/ω_2 が無理数であれば、周期関数ではない。後者の場合、準周期マシュー方程式 (Quasi-periodic Mathieu equation) と呼ばれており、最近、安定性理論は活発に研究されてきた。しかし、まだ振動理論に関する研究は報告されていない。

第 1 章から第 3 章までの研究対象は線形微分方程式であったが、第 4 章では、非線形微分方程式を扱っている。この非線形微分方程式は半分線形微分方程式 (Half-linear differential equation) と呼ばれている。その理由は、線形微分方程式では、解の定数倍も解になり (斉次性, Homogeneity), 2 つの解の和も解になる (加法性, Additivity) ことがよく知られているが、この非線形微分方程式では、2 つの性質のうちの半分の斉次性しか成立しないからである。ただし、半分線形微分方程式は特別な場合として線形微分方程式を含んでいる。関連論文 (b) では、相平面解析を用いて、半分線形微分方程式のすべての非自明解が振動するための十分条件を与えているのに対して、この章では、一般化されたリッカチ変換を用いて、同じ問題に取り組んでいる。得られた成果は、線形微分方程式に対する既知の結果 (Leighton-Wintner oscillation criterion) を半分線形微分方程式にも適用できるように拡張することに成功している。

以上のように、申請者は微分方程式の振動理論に関する様々な優れた結果を導いており、本審査委員会一同は島根大学大学院総合理工学研究科の課程博士の学位授与に十分に値するものと認定した。