

降雨流出に関する解析的考察

(降雨流出の線型性と非線型性について)

豊 国 永 次 (農業工学研究室)

Eiji TOYOKUNI

Analytical Consideration on the Relation between
Rainfall and Runoff.
Linearity and Non-linearity on the Relation
between Rainfall and Runoff

I 序

自然現象としての降雨流出を考える場合、降雨、流出はそれぞれ原因、結果の關係にあり、しかもその降雨にもとづく流出は流域の地表域における Interception, Depression storage, Infiltration, Detention Storage, ならびに河道域における Channel storage など流出機構上あらわれる諸現象に支配されるものである。したがって特定流域に対して観測された Hydrograph は流域条件と降雨条件に基く流出特性を表示するものである。

降雨に基く流出現象は厳密には非線型性をもち、殊に急勾配の地表並びに流路をもつ 我国の中小河川ではその影響が大きい事が指摘され、工学的実用性を考慮した線型的取扱¹⁾²⁾³⁾あるいは非線型的取扱がなされてきた⁴⁾⁵⁾⁶⁾。一方米国におけるような大河川の流域とか、平地部を主要な流域とする排水地域など貯留効果の大きい場合、線型仮定にもとづく Unit-graph method の適合度は高く、この方法の簡明さと共に有用性が高まった。

本文はまず解析方法の基礎となる降雨流出關係の線型性、非線型性を検討するため、線型理論を用いた解析方法を述べると共に、これを山地域(大阪府狭山池流域)、水田地域(滋賀県家棟川流域)について適用し検討考察したものである。ここで用いる線型理論は、「流出が流域の降雨の応答曲線である」と考える自動制御に使用されている方法を援用したもので⁷⁾⁸⁾、すでに M・Cuénod⁹⁾もこれを用いて解析を進めている。

II 線型理論

降雨・流出の始まる時間を原点にとり(降雨後 Initial loss 及び Retardation effect により、流出は一般に遅

れて現れるが、ここでは、流出のあらわれる前の降雨は初期損失として取扱うこととする)、任意時刻の降雨を $Q_I(t)$ 、同時刻に流域を通過してこの一連の降雨による流出量(Base flow をのぞいた流量)を $Q_0(t)$ とする。こゝで2量の間線型性を仮定すると、降雨と流出との間には次の如き第1種 Volterra Integral Equation が成立する。

$$Q_0(t) = \int_0^t w(t-\xi) Q_I(\xi) d\xi \dots\dots\dots (1)$$

この式は Laplace Transformation を適用する演算子法で $Q_0(t)$ 、 $Q_I(t)$ の観測値が分っている場合、パルス近似関数を $Q_0(t)$ 、 $Q_I(t)$ に適用して流域の流出特性を示す $w(t)$ を解析的に求めることが出来る。以下演算子法を用いた解析過程を詳述する。

今(1)式において $t-\xi=\tau$ とおけば

$$Q_0(t) = \int_0^t w(\tau) Q_I(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots (1)'$$

ここに $w(t)$ は Integral Equation の kern である。

演算子法において、原関数 $w(t)$ 、 $Q_0(t)$ 、 $Q_I(t)$ の像関数(Image fn.)を夫々 $W(s)$ 、 $Q_0(s)$ 、 $Q_I(s)$ とし、次の記号であらわす。

$$w(t) \supset W(s), Q_0(t) \supset Q_0(s), Q_I(t) \supset Q_I(s)$$

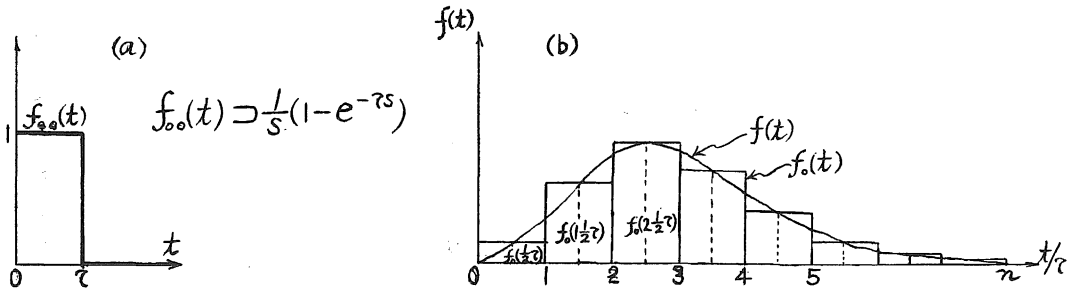
(1)式は Laplace Transformation の合成定理に基づき次式で表わされる。

$$Q_0(s) = W(s) \cdot Q_I(s) \dots\dots\dots (2)$$

(この $W(s)$ は、自動制御系⁷⁾では、filter の伝達関数(Transfer fn.)と呼んでいる。)この $W(s)$ は(2)式より、

$$W(s) = Q_0(s) / Q_I(s) \dots\dots\dots (3)$$

Fig 1 矩形パルスによる近似的表示



そこで $W(s)$ を求めるため、 $Q_0(t)$ 及び $Q_1(t)$ を矩形パルスによる近似法をとり、その像関数を求める。

Fig-1 (b) に示す $f(t)$ を矩形パルス $f_0(t)$ で近似させ、矩形パルスの各縦距を $f_0(\frac{1}{2}\tau)$, $f_0(1\frac{1}{2}\tau)$, …… とすると次式が成立する。

$$f(t) \simeq f_0(t) = f_0(\frac{1}{2}\tau) f_{00}(t) + f_0(1\frac{1}{2}\tau) f_{00}(t - \tau) + \dots + f_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\} f_{00}\{t - (n-1)\tau\}$$

$$= \sum_{n=1}^n f_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\} f_{00}\{t - (n-1)\tau\} \dots (4)$$

ここに $f_{00}(t)$ は t が 0 から単位時間間隔 τ まで 1 である関数である。

(4) 式の像関数 $F(s)$ を求めると、

$$F(s) \simeq F_0(s) = f_0(\frac{1}{2}\tau) \frac{1}{s} (1 - e^{-\tau s}) + f_0(1\frac{1}{2}\tau) \frac{1}{s} (1 - e^{-\tau s}) e^{-\tau s} + \dots + f_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\} \frac{1}{s} (1 - e^{-\tau s}) e^{-(n-1)\tau s}$$

$$= \sum_{n=1}^n f_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\} \frac{1}{s} (1 - e^{-\tau s}) e^{-(n-1)\tau s} \dots (5)$$

降雨曲線 $Q_1(t)$, 流出曲線 $Q_0(t)$ を矩形パルスで近似させ、両者共単位時間を τ にとると (Fig-2),

$$\left. \begin{aligned} \text{降雨曲線 ; } Q_1(t) &\simeq \sum_{n=1}^m f_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\} f_{00}\{t - (n-1)\tau\} \\ \text{流出曲線 ; } Q_0(t) &\simeq \sum_{n=1}^n g_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\} g_{00}\{t - (n-1)\tau\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

ここに $f_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\}$ 及び $g_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\}$ は夫々降雨曲線、流出曲線の各時間々隔の中央における縦距

$$\left. \begin{aligned} \text{降雨曲線の像関数 ; } \mathcal{Q}_1(s) &= \sum_{n=1}^m f_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\} \frac{1}{s} (1 - e^{-\tau s}) e^{-(n-1)\tau s} \\ \text{流出曲線の像関数 ; } \mathcal{Q}_0(s) &= \sum_{n=1}^n g_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\} \frac{1}{s} (1 - e^{-\tau s}) e^{-(n-1)\tau s} \end{aligned} \right\} (7)$$

$W(s)$ は (7) 式を (3) 式に代入して、

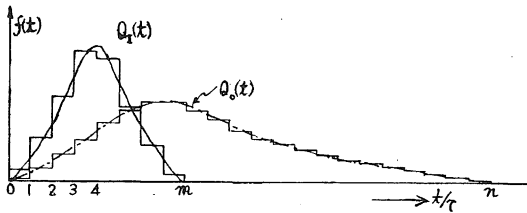
$$W(s) = \frac{\mathcal{Q}_0(s)}{\mathcal{Q}_1(s)}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^n g_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\} \frac{1}{s} (1 - e^{-\tau s}) e^{-(n-1)\tau s}}{\sum_{n=1}^m f_0\{(n - \frac{1}{2})\tau\} \frac{1}{s} (1 - e^{-\tau s}) e^{-(n-1)\tau s}}$$

$$= \frac{g_0(\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} + \frac{1}{f(\frac{\tau}{2})} \left\{ g_0(1\frac{\tau}{2}) - g_0(\frac{\tau}{2}) \frac{f_0(\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} \right\}$$

$$e^{-\tau s} + \frac{1}{f_0(\frac{\tau}{2})} \left\{ g_0(2\frac{\tau}{2}) - g_0(1\frac{\tau}{2}) \frac{f_0(1\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} - g_0(\frac{\tau}{2}) \frac{f_0(2\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} \right\} e^{-2\tau s} + \dots (8)$$

Fig 2 矩形パルスによる $Q_I(t)$, $Q_0(t)$ の表示



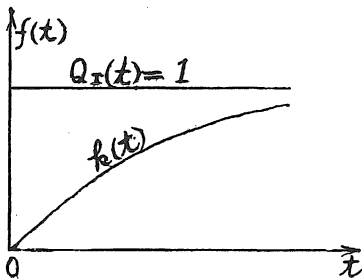
いま (1)' 式において、降雨が単位関数；

$$Q_I(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

のときの流出を $k(t)$ とかくと (Fig-3), (1)' 式より

$$k(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau \dots\dots\dots (9)$$

Fig 3 $k(t)$ の表示



したがって $W(s)$ に対する $K(s)$ は次の如く表示しうる。

$$K(s) = \frac{1}{s} W(s) \dots\dots\dots (10)$$

それゆえ

$$K(s) = \frac{1}{s} W(s)$$

$$= \frac{g_0(\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} \frac{1}{s} + \frac{1}{f_0(\frac{\tau}{2})} \left\{ g_0(1\frac{\tau}{2}) - g_0(\frac{\tau}{2}) \right\} \frac{f_0(1\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})}$$

$$e^{-rs} \frac{1}{s} + \frac{1}{f_0(\frac{\tau}{2})} \left\{ g_0(2\frac{\tau}{2}) - g_0(1\frac{\tau}{2}) \right\} \frac{f_0(1\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})}$$

$$- g_0(\frac{\tau}{2}) \left\{ \frac{f_0(2\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} - \frac{f_0(1\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} \right\} e^{-2rs} \frac{1}{s} + \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots (11)$$

この (11) 式に Inverse Transformation を行えば、単位降雨

$$Q_I(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

に対する流出特性曲線 $k(t)$ が求まる。すなわち、逆変換において、

$$\frac{e^{-as}}{s} \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

なることにより、

$$k(t) = \frac{g_0(\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} + \frac{1}{f_0(\frac{\tau}{2})} \left\{ g_0(1\frac{\tau}{2}) - g_0(\frac{\tau}{2}) \right\}$$

$$\frac{f_0(1\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} \begin{cases} 0, & 0 < t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases} + \frac{1}{f_0(\frac{\tau}{2})} \left\{ g_0(2\frac{\tau}{2}) - g_0(\frac{\tau}{2}) \right\}$$

$$(1\frac{\tau}{2}) \frac{f_0(1\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} - g_0(\frac{\tau}{2}) \left\{ \frac{f_0(2\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} - \left(\frac{f_0(1\frac{\tau}{2})}{f_0(\frac{\tau}{2})} \right)^2 \right\}$$

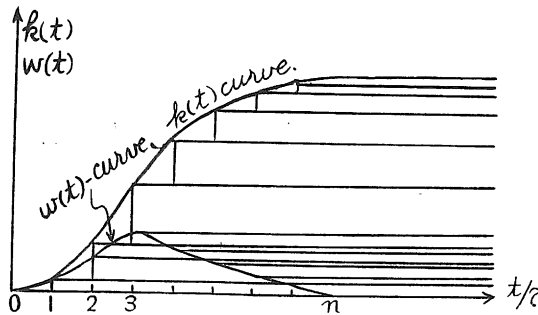
$$\begin{cases} 0, & 0 < t < 2\tau \\ 1, & t > 2\tau \end{cases} + \dots\dots\dots (12)$$

実際にこの $k(t)$ を求めるには、まず降雨曲線 $Q_I(t)$ 及び流出曲線 $Q_0(t)$ を単位時間々隔 τ に分け、その中央縦距の値をよみとり、これら一連の数値を series で表示する。series で示された $Q_I(t)$ 、および $Q_0(t)$ について、 $Q_0(t)/Q_I(t)$ を計算する。求められた各項の数値を第1項は原点より const, 第2項では単位間隔 τ だけずらして重ね、第3項では 2τ ずらして重ね、以下同様にして累加する。すなわち流出特性曲線 $k(t)$ は Fig-4 に示すように単位時間間隔 τ 毎に Ordinate の増加する Step fn. で実用的に表示される。ただし本文では降雨・流出関係の線型性、非線型性を判別する手段として $k(t)$ 一曲線の特性をを用いる関係上、原則として単一ピークの降雨・流出資料をとり、ピークが2つ以上現われる降雨・流出資料では単一ピークの降雨・流出に分離できる資料について、 $k(t)$ 一曲線を算出し検討を加えるものとする。したがって単一の降雨でも、いくつかの支川の流出期間のずれにより2つ以上のピークを生ずる流域とか、幹川に狭搾部 (neck) がありピークが2重にあらわれる流域等¹⁰⁾ については除外しなければならぬ。

このようにして求めた流域の流出特性を示す $k(t)$ 一曲線が Fig-4 にみられるスムーズな S 字状の曲線であることは、単位時間、単位降雨に基く流出曲線 $w(t)$ が Fig-4 の如く Rising limb, Crest segment, Recession limb をもつ流出型となり、降雨・流出の関係は $w(t)$ をもとに比例、加算の法則の適用—線型性—が成立することが分る。

したがって、この $k(t)$ 一曲線がスムーズな S 字状となるか、振動する曲線となるかによって、降雨・流出関係の線型、非線型の性格を判別する。

Fig 4 $k(t)$, $w(t)$ の表示



$$S(Q_0) = [q_1; \quad q_2; \quad q_3; \quad \dots]$$

$$q_1; \quad q_1 \frac{p_2}{p_1}; \quad q_1 \frac{p_3}{p_1}; \quad \dots$$

$$0; \quad q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1}; \quad q_3 - q_1 \frac{p_3}{p_1}; \quad \dots$$

$$q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1}; \quad \frac{p_2}{p_1} (q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1}); \quad \dots$$

$$0; \quad q_3 - q_1 \frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} (q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1}); \quad \dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

すなわち

$$S(Q_0)/S(Q_1) = \left[\frac{q_1}{p_1}; \quad \frac{1}{p_1} (q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1}); \quad \frac{1}{p_1} \left\{ q_3 - q_1 \frac{p_3}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} (q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1}) \right\}; \quad \dots \right] \dots (14)$$

上述 (12), (14) の両式を検討すればわかるように、単位降雨に対する流出特性曲線 $k(t)$ は (14) 式右辺の各項を計算し、単位時間々隔 τ づつずらして累加したものである。これらの計算方法を適用すれば、 $k(t)$ を解析的に求めることができる。

III 自然流域に対する本法の適用

まず観測された降雨・流出の両資料に対し、これを時間関数として示す series を次の如く表示する⁸⁾⁹⁾。

降雨曲線 $Q_1(t)$ を示す series として、

$$S(Q_1) = [p_1; p_2; p_3; \dots; p_n; \dots]$$

流出曲線 $Q_0(t)$ を示す series として、

$$S(Q_0) = [q_1; q_2; q_3; \dots; q_n; \dots]$$

ここに p_1, p_2, p_3, \dots および q_1, q_2, q_3, \dots は時間々隔 1, 2, 3, \dots に亘る $Q_1(t)$, および $Q_0(t)$ の平均値 (あるいは Interval の中央値) である。

Series $S(Q_1)$, $S(Q_0)$ を用いた積の計算は次の如くなる。

$$S(Q_1) = [p_1; p_2; p_3; \dots]$$

$$S(Q_0) = [q_1; q_2; q_3; \dots]$$

$$q_1 p_1; \quad q_1 p_2; \quad q_1 p_3; \quad \dots$$

$$q_2 p_1; \quad q_2 p_2; \quad \dots$$

$$q_3 p_1; \quad \dots$$

$$S(Q_1) \cdot S(Q_0) = [q_1 p_1; q_1 p_2 + q_2 p_1; q_1 p_3 + q_2 p_2 + q_3 p_1; \dots] \dots (13)$$

また商の計算は次の如くなる。

$$S(Q_1) = [p_1; p_2; p_3; \dots]$$

$$\left[\frac{q_1}{p_1}; \quad \frac{1}{p_1} (q_2 - q_1 \frac{p_2}{p_1}); \quad \dots \right]$$

(i) 水田地域について

滋賀県家棟川排水地域 (Fig-5) は家棟川を排水河川とし、流域は日野川と家棟川に挟まれ、砂質壤土もしくは壤土からなる沖積層の平坦な水田がその大部分をしめる。そして上流部わずかにしめる山地域に近づくにつれ、

階段状に拓かれた水田地帯である。流域面積は7.33km² (平地77%, 山地23%)で、家棟川水位観測地点より上流の流路延長は5.97kmである。この家棟川排水地域は平坦な水田地帯のうえ、家棟川の通水能力不足のため70~80mm以上の降雨があれば沿岸耕地に浸水している現状である。この水田地帯において、昭和30年7月7日~9日、昭和30年8月27日~29日におこった2つの出水の降雨・流出資料 (Fig-6-a, Fig-6-b)から流出特性曲線 $k(t)$ を上述の方法により計算を行い、その結果を表示したものが Fig-7-(a), Fig-7-(b) である。

Fig 5 家棟川排水地域図

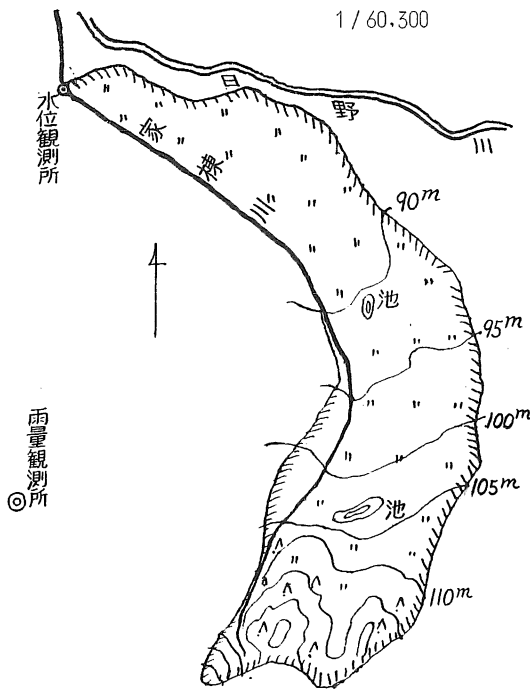


Fig-6-a 家棟川におけるハイトグラフと
ハイドログラフ (S.30.7.7~9)

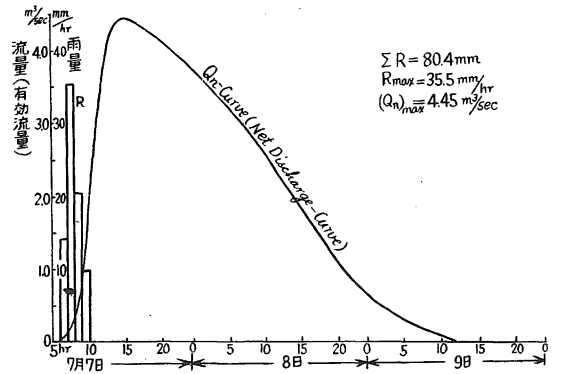


Fig-6-b 家棟川におけるハイトグラフと
ハイドログラフ (S.30.8.27~29)

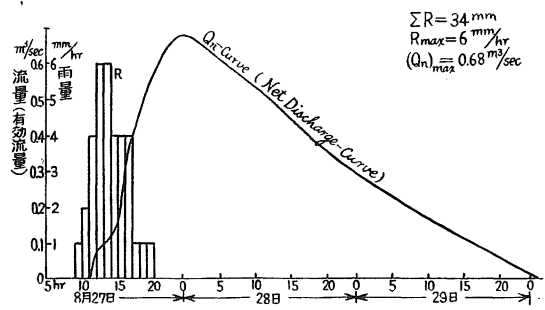


Fig 7-a 家棟川排水地域における昭和30年7月7日~9日 出水の流出特性曲線

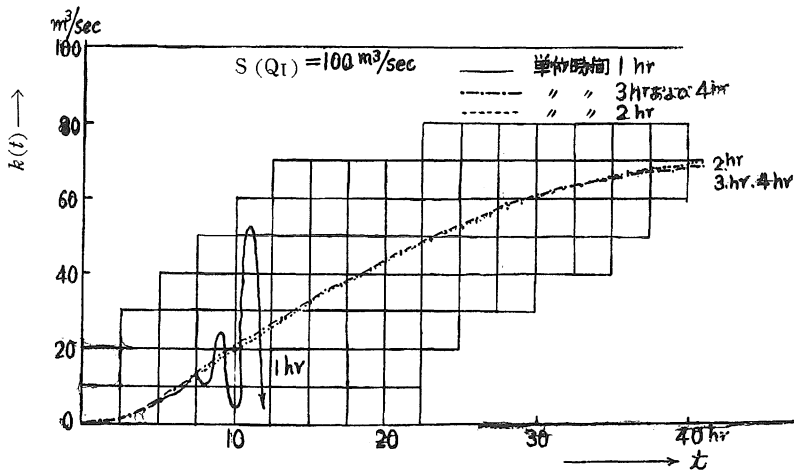


Fig 7-b 家棟川排水地域における昭和30年8月27日~29日出水の流出特性曲線

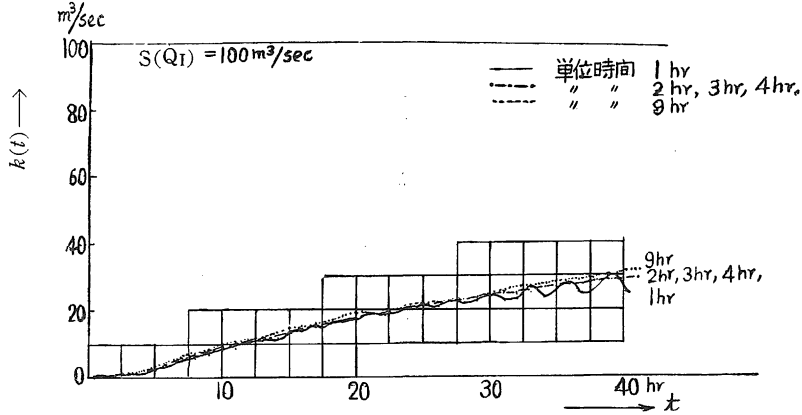
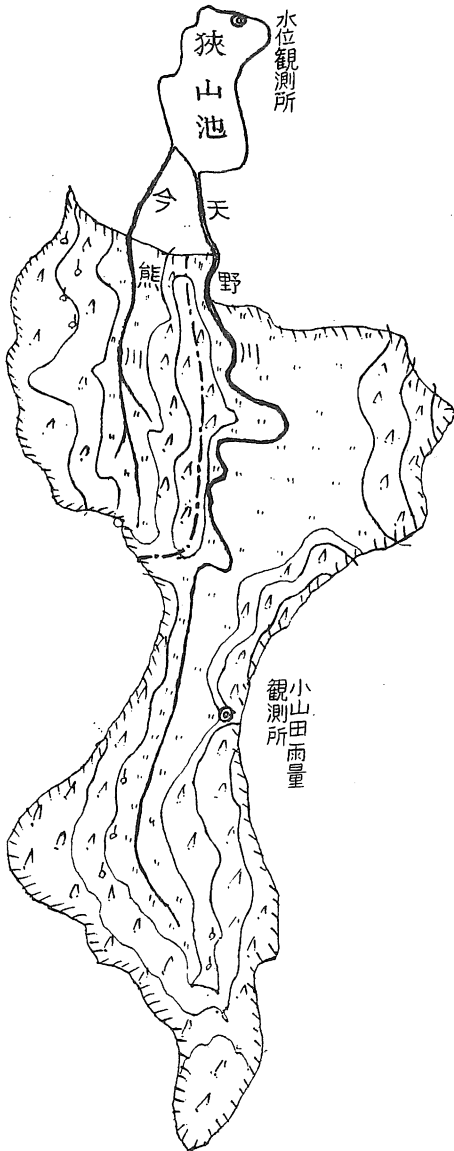


Fig 8 狭山池流域畧図 (1/68,700)



(ii) 山地域について

大阪府狭山池流域 (Fig-8) は天野川, 今熊川両河川沿いに拓けた水田域と流域界から河川に迫る山地, 丘陵地をもった流域で, 大小約 200 の溜池が点在している。

流域面積は 16.25km², うち山地域が 65% をしめ, 水田および溜池による貯溜効果は考えられるが, 主として山地域の流出特性が期待される地域である。

この地域において, 昭和31年台風15号時 (9月26日~28日) の降雨流出資料 (Fig-9) から, 水田地域についてのもと同様に流出特性曲線 $k(t)$ を算定した。その結果を表示すると Fig-10 の如くなり, 前記水田地域の $k(t)$ と異なり降雨流出の非線型性に起因する振動が顕著にあらわれてくる。

Fig 9 狭山池流域のハイログラフと
ハイドログラフ

(S.31.9.26~28.台風No15時)

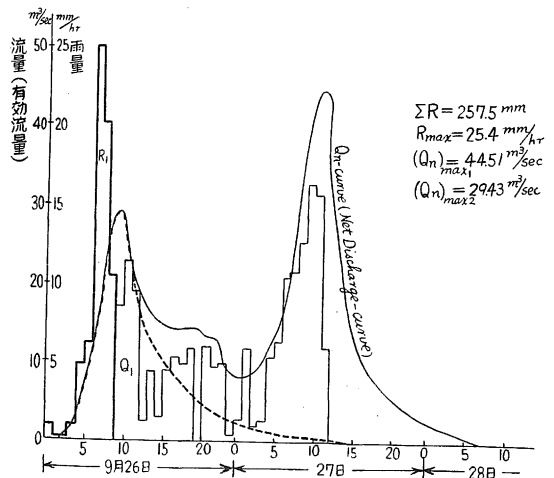
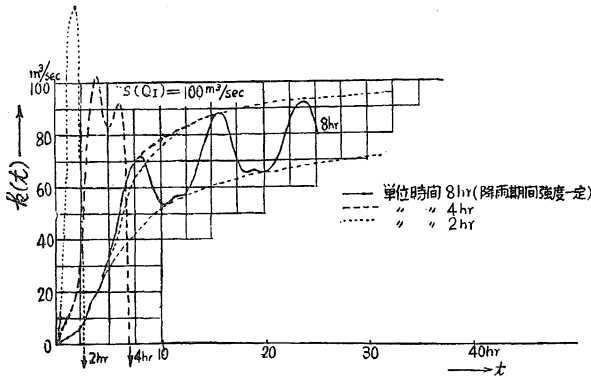


Fig-10 狭山池流域における昭和31年9月26日
出水の流出特性曲線



Ⅳ 考 察

まずこの流出特性曲線 $k(t)$ は、Fig-4 に示されるように線型仮定のもとに、〔註：単位時間一定の降雨強度に対する流出曲線が $w(t)$ -curve の如くなり、これを重ねあわせた $k(t)$ -curve は時間と共に S 字状に smooth に増加し、ある一定値に近づくもので、 $k(t)$ -curve の振動はこの線型仮定の矛盾にもとづく非線型のためである。〕時間的に変動する降雨、流出の関係を強度一定な降雨に対する流出曲線として表示されるもので、時間と共に流出量が S 字状に増加し、次第に一定値に近づく Smooth curve を呈する場合、降雨と流出との間に線型関係が存在し、 $k(t)$ -曲線が時間と共に振動する場合、非線型性を有することが分る。

水田地帯とみなされる家棟川排水地域の流出特性曲線 $k(t)$ について考察すると、

i) 昭和30年7月7日～9日の資料についてみると、単位時間を1時間として求めると、5時間を経過するころから非線型振動が始まり、次第に大きくなってゆく。また同年8月27日～29日の資料においても単位時1時間について $k(t)$ を求めると振動がみられる。

次に単位時間を2時間、3時間、……と大きくとって $k(t)$ を求めたところ両資料共に Smooth な S 字状に一定に近づく曲線となり明らかに線型性がみられる。このことは、この水田地域に降った1時間単位の連続降雨が線型的に流出量の分布を示さないが、単位時間が2時間、あるいはそれ以上であれば流出量が降雨に対し、線型的に分布することを示すものである。

ii) 異なる2つの降雨・流出資料より求めた流出特性曲線 $k(t)$ は同一の極値に近づかないで total rainfall 83.2mm の方は $70\text{m}^3/\text{sec}$ 、31.0mm の方は $30\text{m}^3/\text{sec}$ なる値をとり、降雨量により流出特性曲線がことなるこ

とを示している。これは家棟川の排水能力が不足し70～80mmの降雨量に対して沿岸耕地に浸水するので、70～80mmの降雨量を境にしてそれ以上の降雨がある場合とそれ以下の場合夫々ことなる線型関係が成立することを示すものと考えられる。

山地域とみなされる狭山池流域の流出特性曲線 $k(t)$ について考察すると、

水田地域とことなり、一般に $k(t)$ -curve は時間と共に振巾の大なる振動を示し、非線型性が強いことを表わす。単位時間を4時間、2時間等と小さくすると、振動が激しく本来 $100\text{m}^3/\text{Sec}$ 以下なるべき $k(t)$ -curve が $100\text{m}^3/\text{sec}$ 以上の値をとると共に、振動が \oplus 、 \ominus の範囲にまで及んでくる。

単位時間を大きく、全期間降雨を均一とした場合 Fig-10 の如く時間と共に振動しながら、終極値に近づく Curve を呈し、近似的に線型性を帯びるようになる。

これは山地域における降雨・流出の関係は水田地域とは異なり一般に線型性がうすい事を示すものであろう。

Ⅴ む す び

本文は線型理論より、流出特性を表示する流出特性曲線 $k(t)$ を解析的に誘導した。そしてこの解析方法を用いて降雨・流出関係の線型性、非線型性を水田地域(家棟川排水地域)、ならびに山地域(狭山池流域)について検討した。その結果、流域における降雨・流出関係の線型・非線型の程度を $k(t)$ 曲線の振動と関係づけ表示できる様に思う。

水田地域からの流出は山地域からのそれに比し線型性が強くあらわれるという現象を家棟川排水地域、狭山池流域の資料を用いてグラフィカルに表示することができた。またこれに關聯して、一般に単位時間を大きくすると線型化する傾向がみられる。

さらに他の流域についても豊富な資料より検討を加え、線型仮定にもとづく解析法の適用限界を調べたい。

Ⅵ 参 考 文 献

- 1 石原藤次郎・田中要三・金丸昭治：「わが国における単位図の特性について」土木学会誌 41 (3) (昭31年3月)。
- 2 石原藤次郎・金丸昭治：「降雨条件の変動による単位図の変化について」土木学会論文集第32号、(昭32年3月)。
- 3 石原藤次郎・高瀬信忠：「流出関数による由良川洪水の解析」土木学会論文集第57号、(昭33年7月)。

- 4 岩垣雄一・高棹琢馬：「降雨および流域特性が流出関係に及ぼす効果について」京大防災研・創立5周年記念論文集。(昭31年11月).
- 5 末石富太郎：「特性曲線による出水解析について」土木学会論文集第29号。(昭30年12月).
- 6 石原藤次郎・高棹琢馬：「単位図法とその適用に関する基礎的研究」土木学会論文集第60号。(昭34年3月.)
- 7 近藤次郎：「演算子法」, p.160. 培風館 (昭34年1月).
- 8 A. TUSTIN : "A Method of Analysing the Behavior of Linear Systems in Time Series. The Journal of the Institution of Electric Engineer Vol. 94 n^o 1, part II A, 1947.
- 9 M. CUÉNOD : "Contribution à l'étude des crues determination de la relation dynamique entre les précipitations et le debit des cours d'eau au moyen calcul à l'aide de suites, La Houille Blanche. Juillet-Aout 1956 N^o3
- 10 F. A. NAGLER : "Certain flood-flow phenomena of Iowa River, Trans. A. G. U, 1932. 野満隆治, 河川学 p 124.