「教育臨床総合研究16　2017研究」

算数・数学科教材としての「糸かけ曼荼羅」

“Mandalas Made by Strings” as Teaching Material for Mathematics Education

小 浪 吉 史
Yoshifumi KONAMI
（教育学部数理基礎教育講座）

要　旨

「糸かけ曼荼羅」は作り方は簡単であるが，そこには数学的構造として様々なものが含まれている。本稿ではその作り方を簡単に紹介した後，「糸かけ曼荼羅」に包含されている数学的構造を分析し，算数・数学科教材としての可能性を論じる。

〔キーワード〕　糸かけ曼荼羅，シュタイナー学校，動的幾何学ソフトウエア

Ⅰ　はじめに

「糸かけ曼荼羅」とは何か，にきちんとした定義はないようである。そこで本稿では図２のように板に円周状に等間隔に釘を打ち，そこに色とりどりの糸をかけていくことでできあがる幾何学図形のことをいうことにする。

糸かけ曼荼羅の作り方については次節で詳しく述べるが，本稿を読まれる方はできたら実際に手を動かして作ってみられることをおすすめしたい。あるいは作成に必要な材料が入手しにくい方は，動的幾何学ソフトウエアと呼ばれる GeoGebra，Geometric Constructorあるいは Cinderellaなどをインストールして作図されてもいいだろう。これらのソフトウエアはすべて無料だし，GeoGebraと Cinderellaは Windows，Macあるいは Linux等，パソコンの環境に依存せずに動作する。

本稿では「糸かけ曼荼羅」の数学教育の面での教材としての可能性を考察する。それを感じ取っていただくためには実際に糸をかけるという動作を体験していただくのが近道かと思う。また，体験することによってこの教材が子こどもたちにどのような効果を与えそうか，そういったことも実感できるはずである。

Ⅱ　「糸かけ曼荼羅」の作り方 ― 作業手順

材　料

- 30㎝四方の板　１枚
- 30㎝四方の紙　１枚
- 釘（必要なだけ）

・糸，様々な色のものを用意する
・金槌，錐
・コンパス

注意　板の材質，大きさは任意。釘の本数も任意。本稿では24本で説明する。「糸かけ曼荼羅」についてより多くの情報については文献１）を参照。

作り方

1．用意した紙にコンパスを用いて半径12cmの円を描く。
2．描いた円周を24等分する。
3．紙を板の上に乗せ，等分点のところに錐を用いて軽く穴を開ける。
4．紙を外し，穴のあいているところに釘を打っていく。全部は打ち込まず，１cmほど残す。以上が準備。以下実際に糸をかけていく。
5．どの釘でもよいので糸をかけ始めるところを決める。すべての糸かけをこの釘から始める。以下では「基準釘」ということにしよう。
6．糸を一種類選び，基準釘に結びつける。
7．基準釘から右へ11本目の釘に糸をかける。
8．以下，右回りに11本目まで数え，その釘に糸をかける。
9．基準釘に戻るまで上のことを繰り返す。今の場合はすべての釘に１回ずつ糸がかかる。基準釘に戻ったら再び糸を基準釘に結び，切る。
10．次に，糸の色を変えて（もちろん変えなくてもよい）基準釘から右へ10本目に糸をかける。以下，上と同様に10本目ごとに糸をかけていく。
11．今度の場合は全部に糸をかける前に基準点に戻る（図１参照)。このような場合は，基準釘の右隣の釘（第二の基準釘）からはじめ，同じことを繰り返す。第二の基準釘に戻ったら終了。
12．以下９本目ごと，８本目ごと，…，１本目ごとまで選択する糸の色を変えながら同様の作業をする。途中第二の基準釘に戻っても全部の釘に糸がかかっていなければさらに右隣の第三の基準釘から同様の作業をする。

注意　円周を24等分するが，どうやって作図するのかも数学としてのよい課題になるだろう。上に注意したように本稿では24等分で説明する。もちろんこれを他の数で置き換えてもよい。その場合，どうやって作図するかは幾何学のとてもよい問題になる。それによって数学的な現象が見えてくるようになるはずである。低学年の場合，分度器を用いてもよい。

Ⅲ　「糸かけ曼荼羅」に内在する数学的構造

「糸かけ曼荼羅」の制作過程は非常に単純なので，下は小学生から上は大学生，社会人までどの年代をも対象とできる。さらには以下に見るように，「糸かけ曼荼羅」の中にはいろいろな数学的な構造が含まれているので，製作者の年代，知識量に応じて取り上げるテーマを変え

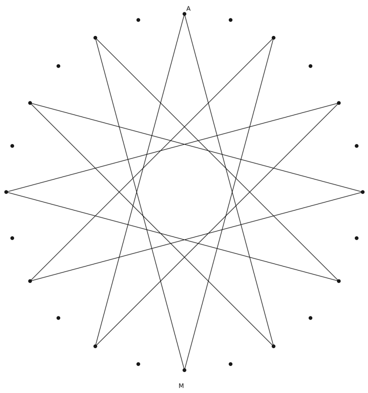


図１

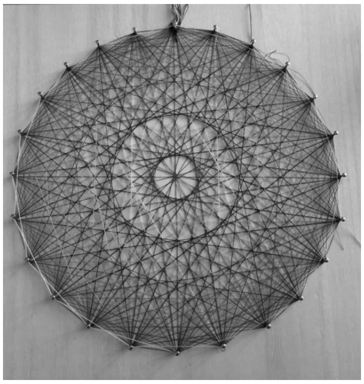


図２

ることができる。本節では「糸かけ曼荼羅」に含まれる数学的構造について検討する。

１．代数的側面

（１）シュタイナー学校における九九の授業

上の「作り方」では釘の数を24本としたが，どうしても24でなければいけないという制限はない。よって，釘の本数を変えることで，色々な代数的な概念と曼荼羅を結びつけることができるようになる。

たとえば釘の数を10本として曼荼羅を作る。つまり，図３のように釘を配置し，０から９までの数字をそばに書いておく。

以下，九九をいいながら１の位の数に糸をかけていくと，図４(ａ)〜図４(ｉ)のようになり，積の交換法則が曼荼羅の対称性として現れてくる。

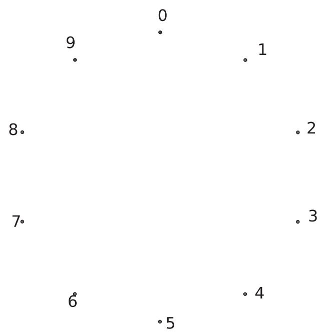


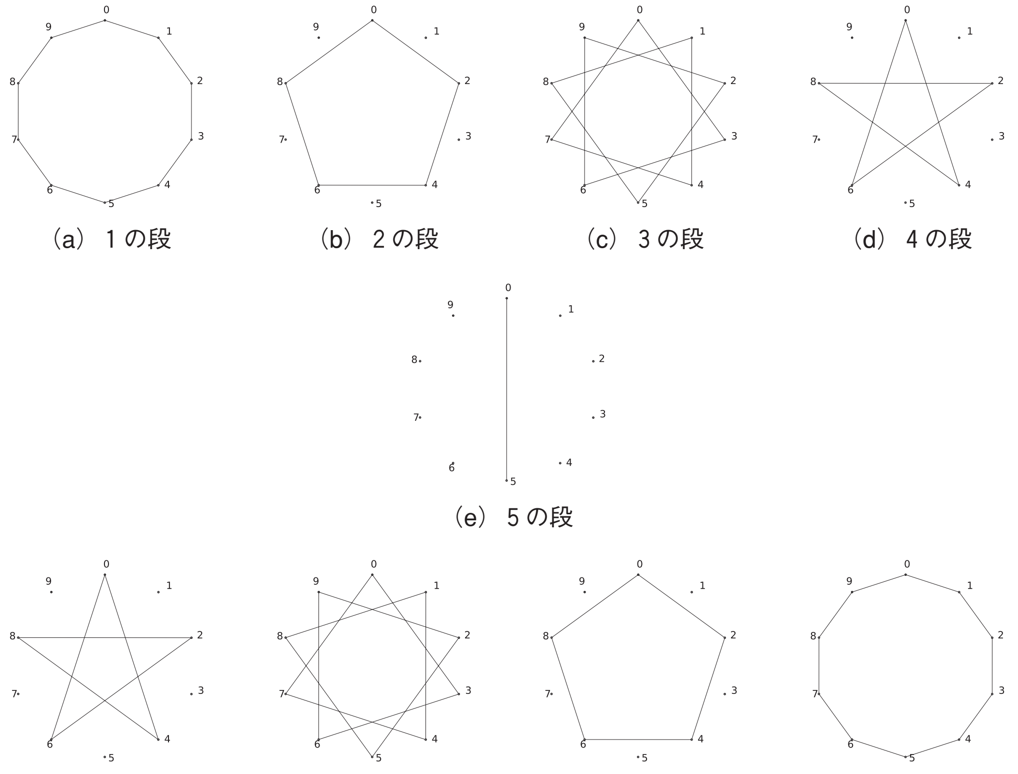
図３

結果の図だけではわからないが，かけていく順番まで考慮すると，より興味深い対称性を見て取ることができる。また，この図だけだと十の位の数が何かはすぐにはわからないが，この図形が閉じるまでに中心を何回回ったかの回数と関係があることに気がつくだろう。

シュタイナー学校における九九については２）を，算数・数学の授業に関しては，文献３)，４)，５）を参照。

（２）最小公倍数と最大公約数

上の作成手順中に記したように，説明した順に糸かけをしていくと，すべての釘に糸がかかる前に基準釘に戻ってくることがある（図１参照)。



（a） 1の段　（b） 2の段　（c） 3の段　（d） 4の段

（e） 5の段

（f） 6の段　（g） 7の段　（h） 8の段　（i） 9の段

図4：九九と糸かけ曼荼羅

図1の場合は2つの数24と10の関係になっているが，この2つの数とこれらの最小公倍数120と最大公約数2が，曼荼羅のどこに現れているかを観察することができる。

数が大きくなると大変であるが，比較的小さな2数を何組か選んで曼荼羅を作るとその予想が正しそうか否かを判定できるだろう。特に互いに素の関係にある2数の場合どうなるか観察すると，面白さが増すだろう。

ただこのようなことを扱う場合，すべて手作業で行うのは効率的ではない。

「はじめに」で紹介した動的幾何学ソフトウエアであるGeoGebra，Geometric Constructorあるいは Cinderellaなどを使うとよいであろう。特にCinderellaのスクリプト機能を使えば，簡単にパラメータを変化させることができるので，色々な場合を比較検討することが容易になるだろう。

シュタイナー学校では低学年ではできる限りパソコンは使わないようにしているようである。実際，こういった作業ははじめのうちは手作業で一つ一つを確認したり，体に染み込ませていく段階が必要だろう。しかし，ある程度原理がわかり，多くの例を観察することで帰納的に何かを発見していこうというときには色々なソフトウエアをツールとして利用したほうが発見がしやすくなるだろうし，法則の成立を確信したり，否定したりするのに役立つだろう。

（3）剰余系

整数全体の集合$\mathbb{Z}$において1つの自然数nをとり，nの倍数全体の集合 $n\mathbb{Z}$ を考える。このとき$\mathbb{Z}$の演算として加法を考えると，$\mathbb{Z}$は可換群，$n\mathbb{Z}$は正規部分群となる。このとき剰余群$\mathbb{Z}$／$n\mathbb{Z}$は有限群となることが知られている。整数のなす加法群でこれは合同式の考え方と同じものであり，nで割った余りのつくる剰余系を考えていることに相当する。数学教育の現代化の際に，「時計の代数」としてカリキュラムに取り込まれていた内容である。

本稿の「糸かけ曼荼羅」でいえば，$n=24$としている。つまり，24による剰余系の場合を見ていることになる。またl本ごとなどと，決まった数ごとに糸をかけていった。これは24による剰余系においてkl（$k=1,2,\cdots$）はいくつになるかという計算を，糸かけ曼荼羅で見ていることになる。

さて，糸かけの作業でl本ごとにかけていくと，lによって1回ですべての釘に糸がかかかるときとそうでないときがあることに気がつく。それらの違いはどんなところから生じているのか，を考えることは良い課題である。

2．幾何的側面

（1）円周等分の作図

これは「糸かけ曼荼羅」とは直接関係はないが，作業手順の最初の部分で円周を等分しなければいけなかった。何等分がコンパスと定規だけで作図可能なのか，色々と実験してみることができるだろう。

（2）包絡線，積分曲線

「糸かけ曼荼羅」が完成したときにまず目につくのはおそらく中央の円だろう（図5参照）。もちろんこれは正多角形であって，円ではない。その直線群によって見えてくる包絡線としての円である。

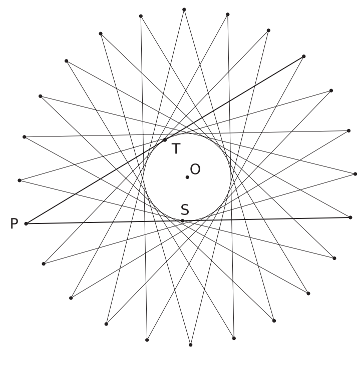


図5

一般の関数のグラフの接線については高校2年生の微分法でその学習が始まる。そして不定積分は各点での接線の傾きが与えられているとき，その点で与えられた接線の傾きを持つような関数を求めることである，という図形的意味を与えることができる。

以上は関数のグラフについてのことであるが，より一般に接線群を与えることでそこから図形を浮き上がらせていく，言い換えれば，はじめに微分方程式を与え，その解としての積分曲線を図示していくことに対応している。

（３）極と極線

上では直線から曲線が得られるというように見た。実際，「糸かけ曼荼羅」では一番外側の円から直線群をとり，内部に円があるように見えている。

しかしここではそれを逆転させて見よう。

図６のように１つの円Oに対して円外の点Pから円に接線を引く。それらの接点をT，Sとするとき，直線TSを点Pの極線という。逆に点Pを直線TSに対する極という。

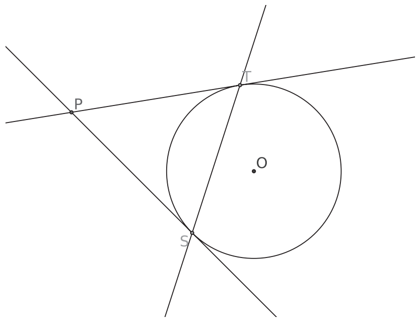


図６

さて，図５を見よう。中央に見えている円上に２点をとり，それらを通る直線を考え，その直線に対する極を考える。図のTとSが円上の点，Pが極である。そして，線分TSの長さを変えないようにしてこれらの点を円上で動かすと，外側の円が得られる。つまり線分TSの長さを変えないときの極の軌跡が外側の円になっていることが，この曼荼羅から見て取れる。

（４）射影幾何学

平面において，次の２つの命題を考える。

(a) 異なる２点を通る直線はただ１つ存在する。

(b) 異なる２直線が通る点はただ１つ存在する。

ユークリッド幾何学でこれらの命題を考えたとき，(a) は正しいが，(b) は誤りである。実際，平行な直線は交点を持たない。しかしこれを拡張して，平行な直線は無限遠点で交わると考えるとこれらの２つの命題は正しくなる。このように平面に無限遠点を付け加えて考える幾何学を射影幾何学という。

そして射影幾何学で上の２つの命題をよくみると，いずれの命題も一方において「点」と「直線」ということばを入れ替えるともう一方の命題になるという大きな特徴を持っている。この性質を双対性，点と直線は双対的な関係にあるという。

さて，通常ユークリッド幾何学では点が連なって線ができ上がると考える。そこで上と似たように考えると，点は直線が集まってできあがっていると考えることができる（図７）。

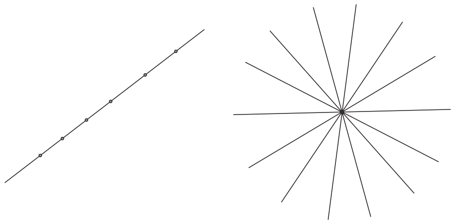


図７

同様のことを円で考えたらどうなるだろうか。

ユークリッド幾何学では点の集まりとして考える。では直線が集まってできたものと考える

ことができるか？

まさに，「糸かけ曼荼羅」で立ち現れる円はそのようなものである。

このように「糸かけ曼荼羅」の中には射影幾何学の見方も含まれているのである。

この観点からの射影幾何学については文献６），７），８）を参照。

Ⅳ　議　論

前節で見たように，「糸かけ曼荼羅」には様々な数学的構造が内在している。本節では，「糸かけ曼荼羅」の算数・数学教材としての意義，さらに発展させた扱い方，他教科との連動について検討する。

１．「糸かけ曼荼羅」の算数・数学教材としての意義

「糸かけ曼荼羅」を作っていくことにはまず美術科的，技術家庭科的な意味で，実際に手を動かすところに大きな意義があると思われる。これは特に低学年で扱うときには重要であると考えられる。実際シュタイナー学校では材料である板を切り出すところから始めると聞いた。そして実際に糸をかけて曼荼羅を作っていく過程において糸がどの釘を通るか，一度その規則性を見つけると，徐々に製作のスピードが上がる。この「規則性を見つける」という部分に前節の「代数的側面」で述べた数学的構造が深く関与している。代数的構造というと大変抽象的に感じられるが，「糸かけ曼荼羅」を作っていくことでそれを体感できるであろう。

またでき上がった曼荼羅を眺めることで，そこに美しい幾何学模様が浮かび上がっていることにおそらく感嘆するであろう。そして直線から円という曲線が切り出せること，すなわち数学でいう積分曲線の概念がここに潜んでいることを無意識のうちに体得するであろう。

「数学は何の役に立つのか」

しばしば子どもたちから発せられ，しばしば教師は沈黙する。あるいは「将来使うことがあるから」などと抽象的に擁護する。

しかしこういった教材と出会いうことで，規則性や図形的な美しさの裏側に数学的な構造があることを感じ取れるようになるだろう。そういったものを記述しようとするとき，自然を語ることばとしての数学へと導かれていく。まさに「自然は数学によって書かれた本である」。

逆に，抽象的な数学を学習しても，ではその元となっている自然現象や図形はどんなものなのだろう，と考え，さらに深い数学を学習する，あるいは探求していく発端を得ることも可能となろう。

このように「糸かけ曼荼羅」は手作業のような具体的なものと数学のような抽象的なものをつなぐ役割を果たす総合的な部分に存在していると見ることができる。そういったことを体感させてくれる教材の１つとしてこの「糸かけ曼荼羅」は大きな可能性を秘めていると考えられる。

２．発展的扱い方

前項では「糸かけ曼荼羅」の算数・数学教育における意義を検討したが，この教材はさらに発展させることもできる。そのいくつかの方向を本項で紹介しよう。

（１）円を他の図形で置き換える

本稿では釘を円周上にとって曼荼羅を作っていった。しかし他の図形で同様のことを行うとどうなるか，興味深いものがある。

たとえば正三角形で実行すると，図８のようになる。

このように現れてくる曲線は円ではない。ではこれはどのような曲線なのか？

また中央に現れている図形はどのような性質を持っているだろうか？

これらを探求することは，高校生くらいには適当な課題になるだろう。

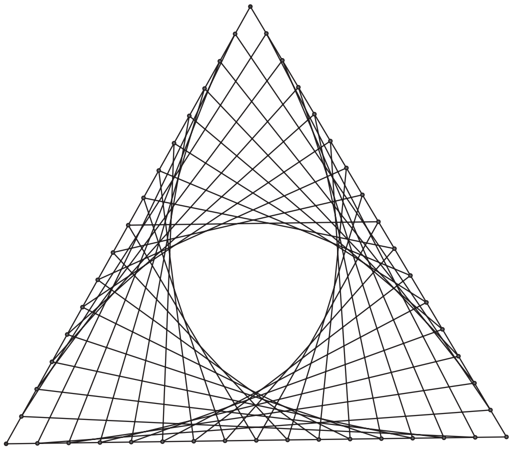


図８：正三角形をもとにした曼荼羅

また図８では正三角形で描いたが，他の図形，たとえば二等辺三角形や正五角形だとどうなるか，あるいは逆に，我々の知っている曲線を「糸かけ曼荼羅」として浮かび上がらせることはできないか，といった研究も興味深い。さらに極と極線の考え方は楕円などにも拡張できる。そのときにはどのようなことが起きるかを調べるのもおもしろいテーマとなろう。

（２）「地球と金星の結びの軌跡」

太陽を中心とした金星と地球の動きを考える。そして数日ごとに２つの惑星を結ぶ線分を描いていく。これを２つの惑星が元の位置に戻るまで続けると図９のような曼荼羅が浮かび上がる。

詳細は文献９）参照。GIF動画も存在する。文献10）参照。

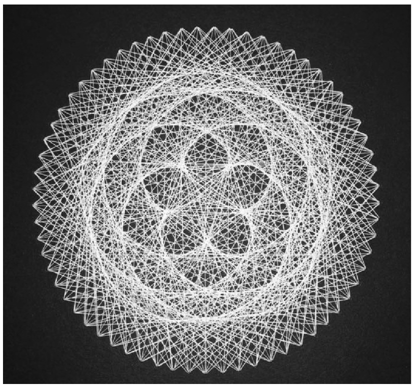


図９：「地球と金星の結びの軌跡」
（杣澤久美子氏作）

３．他教科との連動

本節のはじめに述べたように「糸かけ曼荼羅」の製作は単に数学だけでなく，手を動かすことで具体物と抽象的なものを結びつける総合の位置を担っていると考えられる。それゆえ，他教科との連携もいろいろと考えられるであろう。そのうちのいくつかを挙げてみよう。

（1）プログラミング

「はじめに」で紹介したCinderellaではスクリプトを書くことで図形を生成させることができる。そこで「糸かけ曼荼羅」を生成させるスクリプトを書く，という課題が考えられる。そのさい，釘の数を変えるとどのような変化が観察できるか，などを考察することもよい課題となるだろう。

これができると，「発展」で触れた他の図形で曼荼羅がどのように変わっていくかを観察しやすくなるであろう。

さらに釘の数や糸の色などの指定が簡単にできるインタフェースを持つアプリケーションを開発すれば，この題材をさらに多くの方法で扱えるようになる可能性があるだろう。

（2）美術

本稿は「糸かけ曼荼羅」の算数・数学教育への活用を検討したので，曼荼羅作成の際の色についてはまったく触れてこなかった。当然のことながら，ここに注目した教材開発可能性も十分考えられる。

V　おわりに

「糸かけ曼荼羅」を材料としてそこに内在する数学的構造を検討し，算数・数学科の教材として活用する可能性を見てきた。しかし本稿はその方面への第1歩に過ぎない。実際，これらの題材をどのように授業化していくか，は重要かつ興味深い検討課題である。

参考文献

1）山中啓江，「はじめての糸かけ曼荼羅」，トランスワールドジャパン，2016年

2）「R. シュタイナーから学ぶ『九九の糸かけ』」
http：//1861steiner. blogspot. jp/2014/05/blog-post_23. html
（2017年 3 月27日アクセス）

3）ベングト・ウーリン，「シュタイナー学校の数学読本」，三省堂，1995年

4）エルンスト・シューベルト，「シュタイナー学校の算数の時間」，水声社，1995年

5）学校法人シュタイナー学園，「シュタイナー学園のエポック授業 ― 12年間の学びの成り立ち ―」，せせらぎ出版，2012年

6）丹羽敏雄，「射影幾何学入門」，実教出版，2001年

7）Edwards. L., The Vortex of Life，Floris Books，1993年

8）Adams，G., Physical and Ethereal Space，Rudolf Steiner Press，1978年

9）ジョン・マティヌー，「太陽系の美しいハーモニー」，創元社，2013年

10）https：//www. facebook. com/Nassim. Haramein. official/videos/421928101331787/
（2017年 3 月28日アクセス）