

氏名	原田 涼平
学位の種類	博士 (理学)
学位記番号	総博甲第 1 1 6 号
学位授与年月日	平成 2 9 年 3 月 2 4 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項
文部科学省報告番号	甲第 5 9 4 号
専攻名	総合理工学専攻

学位論文題目 DC programming and its Lagrange-type duality
(DC 計画とそのラグランジュ型双対性)

論文審査委員	主査	島根大学教授	黒岩 大史
		島根大学教授	中西 敏浩
		島根大学教授	内藤 貫太

論文内容の要旨

最適化問題とは、与えられた条件のもとで関数の値の最小値を求める、あるいは最小値を与える点を求める問題である。最適化問題はたとえば工場で生産効率をよくすることを考えたり輸送コストを削減したりするときなどに利用されており、日常生活および他分野でもしばしば利用されている。最小にする関数のことを目的関数といい、与えられる条件のことを制約という。ここでは特に「ある関数たちすべてが 0 以下」となる制約をもつ最適化問題を考え、その最適値を求める方法について考察する。この制約となっている関数たちのことを制約関数という。最適化問題は制約関数および目的関数がアフィン関数であるときは線形計画問題と呼ばれるなど、制約関数および目的関数の種類に応じて分類されている。

最適化問題の最小値を考える上で、双対問題と呼ばれる問題を考える方法がある。特に目的関数および制約関数が凸関数である凸最適化問題においては Lagrange 双対問題が有名である。Lagrange 双対問題は制約のない凸関数を最小にするを考える問題であり、たとえば各関数が微分可能であれば微分を用いることで解きやすくなるなどのメリットがある。また、適当な仮定のもとではもとの最適化問題と Lagrange 双対問題の最適値が一致する。この仮定のことを制約想定という。Slater 制約想定などのさまざまな制約想定が知られているが、2008 年に M. A. Goberna, V. Jeyakumar, M. A. Lopez らによって Farkas Minkowski(FM)と呼ばれる制約想定が、凸最適化問題において主となる問題と Lagrange 双対問題の最適値が一致するための必要十分条件であることが証明された。(Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities, Nonlinear Analysis. 68(2008)1184-1194)

博士論文において主に考察するのは DC 最適化問題における Lagrange 型双対問題である。凸関数と凸関数の差で表現される関数のことを Difference of Convex functions, これを省略して DC 関数という。そして目的関数と制約関数が DC 関数であるような最適化問題を DC 最適化問題という。2 回連続的微分可能な関数は DC 関数であることが知られており、DC 関数のクラスは広い。そのため DC 最適化問題における結果を得ることができれば多くの問題解決につながる。DC 最適化問題において主となる問題と Lagrange 型

双対問題の最適値が一致するための制約想定は J. E. Martinez-Legaz, M. Volle(Duality in DC programming: the case of several DC constraints, J. Math. Anal. Appl. 237(1999))らによって与えられている。この制約想定は Slater 制約想定に基づいたものである。しかしながらこれらの制約想定は必要十分なものではなく、適用範囲を広げるような制約想定を見つけることは重要である。

本論文では2章において DC 最適化問題における Lagrange 型双対性が成り立つための新しい制約想定について考察する。また得られた制約想定と既存の結果の制約想定を比較し、適用できる範囲に差があるかを考察する。そしてこの結果を逆凸制約をもつ DC 最適化問題に応用することを考える。

3章では、別の視点に立って DC 最適化問題における制約想定について考える。一般に有限個の DC 関数たちの最大値をとる関数はまた DC 関数になるということが知られている。さらに「ある関数たちすべてが0以下」であることと「ある関数たちの最大値をとる関数が0以下」であることは同値である。これらの事実を利用すると主となる DC 最適化問題は「ある関数たちの最大値をとる関数が0以下となる範囲で目的関数を最小にする」問題と同じになることがわかる。そこで3章においてはこの同値となる問題において Lagrange 型双対問題を考察し、主となる問題に応用する方法を考察する。またここで得られた制約想定と2章で得られた制約想定を比較し、適用できる範囲に差があるかを考察する。

論文審査結果の要旨

一般に数理計画問題とは、与えられた制約条件の下で最適値、あるいは最適値を実現するための解（最適解）を求める問題であり、最適値や最適解に関する理論や、これらを求めるための手法に対する研究が盛んに行われている。本提出論文では、DC 関数（すなわち凸関数の差で表現される関数）によって記述される数理計画問題（以下、DC 計画問題という）を考察し、Lagrange 型の双対性について研究を行っている。

数理計画問題の最適値を考える際に、元の問題に対する双対問題の研究が重要である。特に凸関数で記述される数理計画問題については、Lagrange 型の双対問題についての研究が盛んに行われてきた。Lagrange 双対定理の主張は、制約想定と呼ばれる適切な仮定の下で、元の数理計画問題とその Lagrange 双対問題の最適値が一致することである。さまざまな制約想定が発見され研究されてきたが、特に FM (Farkas Minkowski property) と呼ばれる制約想定については、全ての凸関数において Lagrange 双対性が成り立つもののうちで最弱な制約想定であることが 2008 年に Goberna, Jeyakumar, Lopez によって示されている。一方で、DC 計画問題における双対問題の研究はそれほど多くない。Lagrange 型の双対問題に対して、Slater 条件に基づいた二つの制約想定が 1999 年に Martinez-Legaz, Volle によって与えられているが、これらの制約想定は強く、ある DC 計画問題には有効ではなかった。DC 関数は二回連続微分可能な関数を含む非常に広いクラスであるため、より適用範囲の広い制約想定を見つけることが求められていた。申請者はこのような先行研究を鑑み、主として DC 計画問題の Lagrange 型の双対問題に対する制約想定について研究を行った。

本提出論文は、レフリー制度の整った国際誌に掲載済みの2編の関連論文を元にして構成されている。

本提出論文の構成は以下のとおりである。第1章では準備として凸解析および DC 関数に関する基本的な定義やいくつかの重要な先行研究結果を述べている。第2章では、DC 計画問題に対する新しい制約想定を述べ、Lagrange 型の双対性に関する定理を証明した。また既存の結果との比較を行い、実数値の場合に Martinez-Legaz, Volle によって与えられた結果を含むことを示した。さらに制約条件が逆凸の形になる場合には、制約想定が不要になることを証明した。第3章では、

第2章で述べたものと別の Lagrange 型双対定理を証明している。この研究は、DC 計画問題の制約条件をある方法で同値変形した際、既存の結果における制約想定（constraint assumption）の成立に差が出てくることを発見したことに端を発する。このような差は、凸関数で記述される数理計画問題では生じないものである。このことからアイデアを得て、2章で得られた制約想定と異なる制約想定を述べ、Lagrange 型の双対性に関する定理を証明した。また得られた二つの制約想定を統合した双対定理を証明した。

このように、本提出論文には十分に価値のある研究結果が含まれている。これらの結果はDC計画問題に対する既存の研究結果を大きく発展させたものであり、申請者による研究の価値は非常に大きい。以上の理由により、本提出論文は本研究科の課程博士の学位授与に十分に値するものと判断する。