内張鋼管を用いたコンクリート円筒の温度応力

白　滝　山　二[※]

Thermal Stresses in Steel-lined Concrete Hollow Cylinders

Yamaji SHIRATAKI

I　まえがき

地中に埋設された逆サイホン管のような，ほぼ一定の温度に保たれている管体構造物に，急に温度の異なる水が流入するような場合，管体内面は急激な温度変化を受け，その管壁内に温度勾配を生じる．そして，それに伴って管体に過渡的な温度応力を生じ，その温度差あるいは伝熱条件のいかんによっては，かなり大きい応力となるおそれがあり，管体設計上無視できない要素となる．そこで，本論文ではそのような管体が，内張鋼管を用いたコンクリート円筒で構成されているときの温度応力についてその解析法を導き，その応力分布の傾向を検討した．

単一材料から成る中空円筒の場合の温度応力については，種々な条件に対し理論的な研究が行なわれ，あるいはその工学的な応用が論じられている[(1)—(5)]．これらを見るに，比較的温度分布の形が単純な定常の場合を除いて，その結果はかなり複雑である．さらに，ここで取扱うような異なった材質のものから構成される円筒の場合については，数理物理の問題として一般的な理論が論じられてはいるが[(6)(7)]，実用に供しうるような形のものは少ない．

そこでここでは，温度分布が与えられた場合を考え，なるべく条件を簡単にして実用的な解析法を導くことを試みた．そして温度分布の変化に伴う温度応力の時間的推移について，一つの典型的な場合の計算結果を示して，その傾向を考察した．

II　温度変化による内張鋼管の応力と変位

内張鋼管はその肉厚が薄く，その外側は比較的熱を伝えにくいコンクリートで被覆されているので，鋼管壁内の温度分布は常に一様なものとする．また円筒は軸方向に長く続くものとして平面ひずみ状態とみなすので，内張管も管軸方向のひずみがないものと仮定する．

いま，温度変化による内張鋼管の応力および変位について考えるため，内張鋼管の温度が一様に T_s だけ上昇したものとする．しかるとき，内圧その他の外力を考えないとしても，内張鋼管の外面側には被覆コンクリートの拘束によって応力が生ずる．この境界面での応力を鋼管に対しては外圧と考えて p_1 とする．内張鋼管の厚さを t，内半径を a，外半径 $(a+t)$ を R とすれば，内張鋼管の円周方向の応力 σ_s は，薄肉管の計算において通常用いられるように，管壁内の応力分布を一様とみなし，つり合いの条件を適用することにより

$$\sigma_s = -\frac{Rp_1}{t} \quad \cdots\cdots (1)$$

次に円周方向のひずみ ε_s は，半径方向の変位を u_s として

$$\varepsilon_s = \frac{u_s}{r} \quad \cdots\cdots (2)$$

一般に弾性体における温度変化を考慮したときの応力とひずみの関係は，円筒座標系 (r, θ, z) を用いて

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_r)] + \alpha T \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3)$$

内張鋼管の場合に適用すると，E_s を鋼管のヤング係数，ν_s をポアソン比，α_s を線膨脹係数，T_s を温度

※　農業施設工学研究室

上昇としてさきに仮定したように $\varepsilon_z=0$ とすると，上の第3式から

$$\sigma_z=\nu_s(\sigma_r+\sigma_\theta)-\alpha_s E_s T_s$$

これを第2式に入れると

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{E_s}\left[(1-\nu_s^2)\sigma_\theta-\nu_s(1+\nu_s)\sigma_r\right]+(1+\nu_s)\alpha_s T_s$$

ここで，σ_r は σ_θ に比べ小さいのでこれを無視し，$\varepsilon_\theta=\varepsilon_s$ $\sigma_\theta=\sigma_s$ とおいて

$$\varepsilon_s=\frac{(1-\nu_s^2)\sigma_s}{E_s}+(1+\nu_s)\alpha_s T_s$$

(2) 式を用いて半径方向変位 u_s を求め，さらに (1) 式を代入し，

$$u_s=r\left[-\frac{(1-\nu_s^2)Rp_1}{E_s t}+(1+\nu_s)\alpha_s T_s\right]\cdots\cdots(4)$$

とくに，内張管の外面 $r=R$ における変位 u_{sR} は

$$u_{sR}=-\frac{(1-\nu_s^2)R^2p_1}{E_s t}+(1+\nu_s)\alpha_s T_s R\cdots(5)$$

となる．

III コンクリート円筒の応力と変位

コンクリート円筒壁内の温度分布は半径方向のみに変化するものとする．しかるときはいわゆる軸対称の問題となり，つり合いの方程式は円筒座標系を用いて，

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

また，温度変化を考慮した応力とひずみの関係の一般式 (3) を変形すると[8]，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\lambda\Delta+2G\varepsilon_r-(3\lambda+2G)\alpha T\\ \sigma_\theta&=\lambda\Delta+2G\varepsilon_\theta-(3\lambda+2G)\alpha T\\ \sigma_z&=\lambda\Delta+2G\varepsilon_z-(3\lambda+2G)\alpha T\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

ここに

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\nu)}\cdots\cdots(8)$$

$$\Delta=\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z$$

この場合は，軸対称，平面ひずみの条件を考慮して

$$\Delta=\varepsilon_r+\varepsilon_\theta=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}$$

ただし，u は半径方向の変位を表わす．従って (7) より

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=(\lambda+2G)\frac{\partial u}{\partial r}+2G\frac{u}{r}-(3\lambda+2G)\alpha T\\ \sigma_\theta&=2G\frac{\partial u}{\partial r}+(\lambda+2G)\frac{u}{r}-(3\lambda+2G)\alpha T\end{aligned}\right\}(9)$$

これを (6) 式に入れて整理すると，結局次のような半径方向変位 u に関する基礎方程式が得られる[9]．

$$\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{\partial T}{\partial r}\cdots\cdots\cdots(10)$$

この式の一般解は

$$u=C_1r+\frac{C_2}{r}+\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha}{r}\int_a^r Trdr\cdots\cdots\cdots(11)$$

ここに，C_1, C_2 は境界条件で定まる常数で，また右辺第三項の積分の下限は中空円筒の場合内半径 a にとるのが一般である．この解を用いて応力を表わす一般式を求めると，(9) 式によって結局次のようになる[10]．

$$\sigma_r=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{C_1}{1-2\nu}-\frac{C_2}{r^2}\right)-\frac{\alpha E}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\int_a^r Trdr\cdots\cdots\cdots(12)$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1+\nu}\left(\frac{C_1}{1-2\nu}+\frac{C_2}{r^2}\right)-\frac{\alpha ET}{1-\nu}+\frac{\alpha E}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\int_a^r Trdr\cdots\cdots\cdots(13)$$

そこで，これらの解を内周面に内張管から伝達される半径方向の応力を受けるコンクリート円筒に適用するとこの応力は内圧 p_1 として働くから境界条件として

$r=R$ において　$\sigma_r=-p_1$

外圧は考えないから，円筒の外半径を b とし

$r=b$ において　$\sigma_r=0$

これらを用いて，C_1, C_2 を求め，円筒壁に生ずる応力を表わす式を求めると，コンクリートのヤング係数を E_c，ポアソン比を ν，線膨脹係数を α，半径 r の位置における温度を T として

$$\sigma_r=\frac{\alpha E_c}{1-\nu}\left[\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\left(\frac{1}{b^2-R^2}\int_R^b Trdr-\frac{1}{r^2-R^2}\int_R^r Trdr\right)\right]+\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)\frac{R^2p_1}{b^2-R^2}\cdots(14)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E_c}{1-\nu}\Big[\Big(1+\frac{R^2}{r^2}\Big)\frac{1}{b^2-R^2}\int_R^b Trdr$$

$$+\Big(1-\frac{R^2}{r^2}\Big)\frac{1}{r^2-R^2}\int_R^r Trdr - T\Big]$$

$$+\Big(1+\frac{b^2}{r^2}\Big)\frac{R^2p_1}{b^2-R^2} \cdots\cdots (15)$$

が得られる．いま

$$\Theta_{Rb} = \frac{2}{b^2-R^2}\int_R^b Trdr,\quad \Theta_{Rr} = \frac{2}{r^2-R^2}\int_R^r Trdr \cdots\cdots (16)$$

とおくと，これらはそれぞれ，$R\sim b$，あるいは $R\sim r$ の範囲の平均温度である．これらを用いて (14)，(15) 式を書き直すと，

$$\sigma_r = \frac{\alpha E_c}{2(1-\nu)}\Big(1-\frac{R^2}{r^2}\Big)(\Theta_{Rb}-\Theta_{Rr})$$

$$+\Big(1-\frac{b^2}{r^2}\Big)\frac{R^2p_1}{b^2-R^2} \cdots\cdots (17)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E_c}{2(1-\nu)}\Big[\Big(1+\frac{R^2}{r^2}\Big)\Theta_{Rb}+\Big(1-\frac{R^2}{r^2}\Big)\Theta_{Rr}-2T\Big]$$

$$+\Big(1+\frac{b^2}{r^2}\Big)\frac{R^2p_1}{b^2-R^2} \cdots\cdots (18)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r+\sigma_\theta) - \alpha E_c T$$

$$= \nu\Big(\frac{\alpha E_c\Theta_{Rb}}{1-\nu}+\frac{2R^2p_1}{b^2-R^2}\Big)-\frac{\alpha E_c T}{1-\nu} \cdots\cdots (19)$$

同様に，(11) 式によって半径方向変位を求めると

$$u = \frac{(1+\nu)\alpha r}{1-\nu}\Big[\Big(1-2\nu+\frac{R^2}{r^2}\Big)\frac{1}{b^2-R^2}\int_R^b Trdr$$

$$+\Big(1-\frac{R^2}{r^2}\Big)\frac{1}{r^2-R^2}\int_R^r Trdr$$

$$+\Big(1-2\nu+\frac{b^2}{r^2}\Big)\frac{R^2}{b^2-R^2}\frac{(1-\nu)p_1}{\alpha E_c}\Big] \cdots\cdots (20)$$

とくに，内張鋼管と接するコンクリート円筒の内面 $r=R$ においては

$$u_R = (1+\nu)\alpha R\Big[\Theta_{Rb}+\frac{(1-2\nu)R^2+b^2}{\alpha E_c(b^2-R^2)}p_1\Big] \quad (21)$$

Ⅳ 内張鋼管を有するコンクリート円筒の温度応力

以上のように，円筒壁内の温度分布 $T(r, t)$ が与えられたとき，内張管とコンクリート円筒との接する面での応力を仮定して，それぞれの応力分布を求める式を示したが，これらの未知の境界応力 p_1 については，この両者の接する位置でのそれぞれの変位が等しいことからその値を求めることができる．すなわち

$$u_{sR} = u_R$$

として，(5) 式と (21) 式を入れて整理すると

$$\Big[\frac{(1-2\nu)}{E_c}\frac{R^2+b^2}{(b^2-R^2)}+\frac{1-\nu_s{}^2}{1+\nu}\frac{R}{E_s t}\Big]p_1$$

$$= \frac{1+\nu_s}{1+\nu}\alpha_s T_s - \alpha\,\Theta_{Rb}$$

そこで，

$$\frac{E_s}{E_c} = n,\qquad \frac{1+\nu_s}{1+\nu} = m$$

とおいて p_1 を求めると

$$p_1 = \frac{(m\alpha_s E_s T_s - n\alpha E_c\Theta_{Rb})(b^2-R^2)t}{n[(1-2\nu)R^2+b^2]t+m(1-\nu_s)(b^2-R^2)R} \cdots\cdots (22)$$

一般に内張管として用いる鋼管の厚さは，その内半径に比べて小さいので

$$R = a+t \doteqdot a$$

とみなしてよいだろう．したがって

$$\frac{t}{R}\doteqdot\frac{t}{a}=\mu,\quad \frac{r}{R}\doteqdot\frac{r}{a}=\rho,\quad \frac{b}{R}\doteqdot\frac{b}{a}=\gamma$$

とおく．また内張管の材料として用いられる鋼材の線膨脹係数は，一般にコンクリートの線膨脹係数とほぼ等しいとして扱ってよいので[11]，$\alpha_s=\alpha$ とすれば，

$$p_1 = \frac{\alpha E_s(mT_s-\Theta_{Rb})(\gamma^2-1)\mu}{(1-2\nu+\gamma^2)n\mu+m(1-\nu_s)(\gamma^2-1)} \cdots\cdots (23)$$

したがって，このようにして求められる p_1 の値を用い，内張鋼管および外側のコンクリート円筒の応力を求めることができる。

1. 内張鋼管の応力

(1) 式を用い，(22) 式を入れれば

$$\sigma_s = -\frac{Rp_1}{t}$$

$$= -\frac{(n\alpha_s E_s T_s - n\alpha E_c\Theta_{Rb})(b^2-R^2)R}{n[(1-2\nu)R^2+b^2]t+m(1-\nu_s)(b^2-R^2)R} \cdots\cdots (24)$$

あるいは，(23)式を用いれば

$$\sigma_s=-\frac{p_1}{\mu}$$
$$=-\frac{\alpha E_s(mT_s-\Theta_{Rb})(\gamma^2-1)}{(1-2\nu+\gamma^2)n\mu+m(1-\nu_s)(\gamma^2-1)} \quad \cdots\cdots (25)$$

ここで，

$$T'=T/T_s$$
$$\frac{\Theta_{Rb}}{T_s}=\frac{2}{b^2-R^2}\int_R^b\left(\frac{T}{T_s}\right)rdr=\frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b T'rdr$$
$$=\frac{2}{\gamma^2-1}\int_1^\gamma T'\rho d\rho=\Theta_\gamma' \quad \cdots\cdots (26)$$

とおいて，無次元応力の形で表わすと

$$\frac{(1-\nu_s)\sigma_s}{\alpha E_s T_s}$$
$$=-\frac{(1-\nu_s)(m-\Theta_\gamma')(\gamma^2-1)}{(1-2\nu+\gamma^2)n\mu+m(1-\nu_s)(\gamma^2-1)} \quad \cdots\cdots (27)$$

2. コンクリート円筒部の応力

(22) あるいは (23) 式で表わされる p_1 を (17)〜(19) 式に代入してコンクリート円筒部の温度応力が求められる。すなわち

$$\sigma_r=\frac{\alpha E_c}{2(1-\nu)}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)(\Theta_{Rb}-\Theta_{Rr})+\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)$$
$$\frac{(m\alpha_s E_s T_s-n\alpha E_c\Theta_{Rb})R^2t}{n[(1-2\nu)R^2+b^2]t+m(1-\nu_s)(b^2-R^2)R} \quad \cdots\cdots (28)$$

$$\sigma_\theta=\frac{\alpha E_c}{2(1-\nu)}\left[\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\Theta_{Rb}+\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\Theta_{Rr}-2T\right]$$
$$+\left(1+\frac{b^2}{r^2}\right)$$
$$\frac{(m\alpha_s E_s T_s-n\alpha E_c\Theta_{Rb})R^2t}{n[(1-2\nu)R^2+b^2]t+m(1-\nu_s)(b^2-R^2)R} \quad \cdots\cdots (29)$$

$$\sigma_z=\frac{\alpha E_c}{1-\nu}\left(\nu\Theta_{Rb}-T\right)$$
$$+\frac{2\nu(m\alpha_s E_s T_s-n\alpha E_c\Theta_{Rb})R^2t}{n[(1-2\nu)R^2+b^2]t+m(1-\nu_s)(b^2-R^2)R} \quad \cdots\cdots (30)$$

また，

$$\frac{\Theta_{Rr}}{T_s}=\frac{2}{r^2-R^2}\int_R^r\left(\frac{T}{T_s}\right)rdr=\frac{2}{r^2-a^2}\int_a^r T'rdr$$
$$=\frac{2}{\rho^2-1}\int_1^\rho T'\rho d\rho=\Theta_\rho' \quad \cdots\cdots (31)$$

とおいて無次元応力の形で表わすと

$$\frac{(1-\nu)\sigma_r}{\alpha E_c T_s}=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)(\Theta_\gamma'-\Theta_\rho')+\left(1-\frac{\gamma^2}{\rho^2}\right)\right.$$
$$\left.\frac{2(1-\nu)(m-\Theta_\gamma')n\mu}{(1-2\nu+\gamma^2)n\mu+m(1-\nu_s)(\gamma^2-1)}\right] \cdots (32)$$

$$\frac{(1-\nu)\sigma_\theta}{\alpha E_c T_s}=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)\Theta_\gamma'+\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)\Theta_\rho'\right.$$
$$-2T'+\left(1+\frac{\gamma^2}{\rho^2}\right)$$
$$\left.\frac{2(1-\nu)(m-\Theta_\gamma')n\mu}{(1-2\nu+\gamma^2)n\mu+m(1-\nu_s)(\gamma^2-1)}\right] \cdots\cdots (33)$$

$$\frac{(1-\nu)\sigma_z}{\alpha E_c T_s}$$
$$=\nu\left[\Theta_\gamma'+\frac{2(1-\nu)(m-\Theta_\gamma')n\mu}{(1-2\nu+\gamma^2)n\mu+m(1-\nu_s)(\gamma^2-1)}\right]-T' \quad \cdots\cdots (34)$$

とくに，内周面の円周方向のコンクリート応力を σi とすると，内周面の温度を T_i，$T_i/T_s=T_i'$ として

$$\frac{(1-\nu)\sigma i}{\alpha E_c T_s}=\Theta_\gamma'-T_i'$$
$$+\frac{(\gamma^2+1)(1-\nu)(m-\Theta_\gamma')n\mu}{(1-2\nu+\gamma^2)n\mu+m(1-\nu_s)(\gamma^2-1)} \cdots (35)$$

外周面の温度を T_u，$T_u/T_s=T_u'$ としたときの外周面の円周方向応力 σ_o については，

$$\frac{(1-\nu)\sigma_o}{\alpha E_c T_s}=\Theta_\gamma'-T_u'$$
$$+\frac{2(1-\nu)(m-\Theta_\gamma')n\mu}{(1-2\nu+\gamma^2)n\mu+m(1-\nu_s)(\gamma^2-1)} \cdots (36)$$

のように表わすことができる．

V．内張鋼管のみ温度が上昇したとき

内張管を有するコンクリート円筒が，その内周面において流水の温度の影響などによって急激な温度変化を受けたとき，その初期の段階では内張鋼管だけの温度が上昇し，まだコンクリート層へは熱の伝わらない状態が考えられる．このときの温度応力を求めるため，鋼管部の温度上昇を T_s とし，コンクリート円筒部の温度は元のままと仮定し，$\Theta_{Rb}=0$，$\Theta_{Rr}=0$ とすると

$$p_1=\frac{(\gamma^2-1)m\mu\alpha E_s T_s}{(1-2\nu+\gamma^2)n\mu+m(1-\nu_s)(\gamma^2-1)}$$

したがって，鋼管の円周方向応力は

$$\sigma_s=-\frac{(\gamma^2-1)m\alpha E_s T_s}{(1-2\nu+\gamma^2)n\mu+m(1-\nu_s)(\gamma^2-1)} \quad \cdots\cdots (37)$$

コンクリート円筒における円周方向応力は

$$\sigma_\theta = \left(1+\frac{\gamma^2}{\rho^2}\right)$$

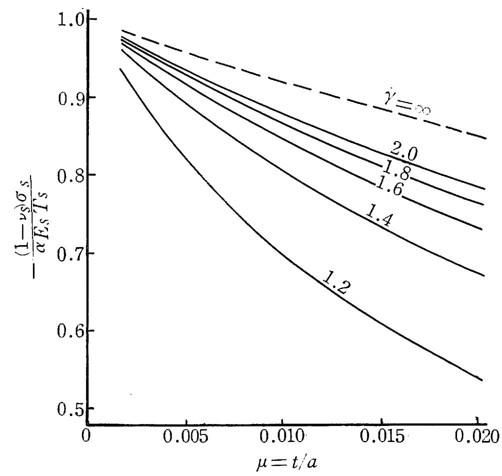
$$\left[\frac{mn\alpha E_c T_s \mu}{(1-2\nu+\gamma^2)\, n\mu+m\,(1-\nu_s)(\gamma^2-1)}\right] \cdots (38)$$

とくに，コンクリート円筒内周面の円周方向応力は

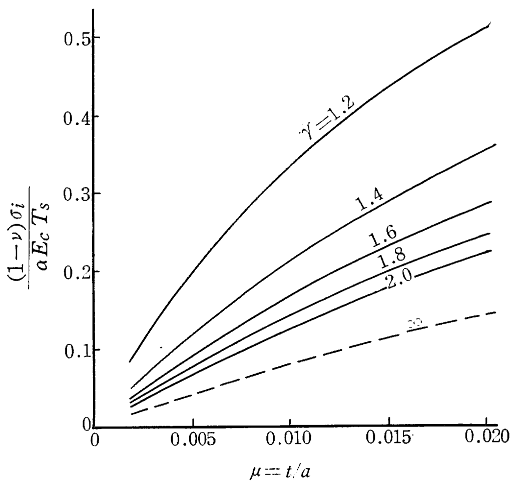
$$\sigma_i = \frac{(\gamma^2+1)\, mn\mu\alpha E_c T_s}{(1-2\nu+\gamma^2)\, n\mu+m\,(1-\nu_s)(\gamma^2-1)} \cdots (39)$$

によって求められる．

そこで，このような場合について，鋼管厚，あるいはコンクリート円筒の厚さと，温度応力との関係を調べてみた．すなわち鋼管比 μ，およびコンクリート円筒内外径比 γ による鋼管応力ならびにコンクリート内周面応力の変化の傾向を示すため，$\nu_s = 0.3$, $\nu=0.15$, $n=7$ と仮定して行った計算の結果を図―1，図―2に示す．



図―1　内張鋼管のみ温度上昇したときの鋼管応力



図―2　内張鋼管のみ温度上昇したときの
コンクリート円筒内周面の応力

とくにコンクリートの円周方向応力に着目した場合，この図で見られるように鋼管の厚さが大きい程その応力の値が大きくなり，コンクリート円筒部の厚さが小さいとき程その傾向が顕著である．

VI. 時間による温度応力の変化

円筒の内周面に与えられた温度変化は，時間とともに円筒壁内に伝えられ，その温度分布は時間的に変化していわゆる非定常の状態となる．したがって温度応力もそれに伴って変化するが，その応力の時間的変化を知るためにはまず壁内の温度分布の時間的推移を知ることが必要である．

円筒座標系による非定常の伝熱の問題は，いろいろな境界条件のもとに多くの解が求められているが[12]，ここでは地中に埋設されたコンクリート円筒の場合に適合するような解析法について考察し，具体的な計算例を示し，それに基づいて温度応力の時間的変化の傾向を調べてみた．

1. 温度分布の時間的変化

いま温度分布は軸対称で，熱流は半径方向にのみ存在するものと仮定する．すなわち円筒座標系をとり，その壁内温度 T は時間 t，および半径 r のみに依存し，θ および z にはよらないものとする．しかるときの熱伝導の基礎方程式は一般に

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \cdots\cdots (40)$$

ここに　T：半径 r の位置における温度
　　　　k：熱拡散係数

したがって，任意点，任意時刻の温度を知るためには上の基礎方程式を，与えられた初期条件ならびに境界条件のもとに解けばよい．

ここで取扱っている地中に埋設されたコンクリート円筒の場合，厳密にはコンクリート円筒からその周囲の土層へと，異なる媒質への伝熱の問題となるが，普通存在するような土層の熱拡散係数は，コンクリートのそれとほぼ同じオーダーであり，従って実用上の近似として，円筒と周囲の土層との間に接触熱抵抗がなく，かつ伝熱条件の等しい媒質が無限に連続するものと仮定する．これはいまわれわれが目的としているような過渡的な温度応力を問題とした場合，特に初期における温度分布が対象となるので，この時期においてはコンクリート円筒の外側の条件は比較的影響が少ないものと思われる．

このように仮定した場合は，無限固体中に長く連続す

る円筒状の空間が存在し，その内周面に温度変化が与えられる場合と考えることができる．ここでは内周面に存在する内張鋼管の温度が急激に T_s だけ上昇し，その温度がそのまま維持されるものと仮定する．しかるときの境界条件は，元の温度を基準として

$$\left.\begin{array}{l} r=a,\ \ t>0 \text{ において } T=T_s \\ r>a,\ \ t=0 \text{ において } T=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

この境界条件に対する (40) 式の解は，Laplace 変換を用いて解くことにより次のごとく与えられている[13]．

$$T=T_s\left(1+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ku^2t}\frac{J_0(ru)\,Y_0(au)-Y_0(ru)\,J_0(au)}{J_0^2(au)+Y_0^2(au)}\frac{du}{u}\right)\cdots (42)$$

ここに，J_0，Y_0 はそれぞれ第一種あるいは第二種の零次の Bessel 関数である．

この解を用いて実際の計算をすることはかなり面倒でとくに時間の値が小さい時には適当でない．そこで時間の値が小さい時に適する解として，Laplace 逆変換にあたって，第二種の変形 Bessel 関数の漸近展開を用い，各項別に逆変換を適用した次のような級数解が与えられている[12]．

$$T=T_s\left(\frac{a^{1/2}}{r^{1/2}}\,\mathrm{erfc}\frac{r-a}{2\sqrt{kt}}+\frac{(r-a)(kt)^{1/2}}{4a^{1/2}\,r^{3/2}}\,\mathrm{ierfc}\frac{r-a}{2\sqrt{kt}}+\frac{(9a^2-2ar-7r^2)\,kt}{32a^{3/2}\,r^{5/2}}\,\mathrm{i^2erfc}\frac{r-a}{2\sqrt{kt}}+\cdots\right)\cdots(43)$$

ここに $\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}$ は，誤差関数

$$\mathrm{erf}\ x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}d\xi$$

から導かれる一連の関数で，次のように定義される．

$$\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}\ x=\int_x^\infty \mathrm{i}^{n-1}\mathrm{erfc}\ \xi\, d\xi$$

$$\mathrm{i^0erfc}\ x=\mathrm{erfc}\ x=1-\mathrm{erf}\ x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\xi^2}\,d\xi$$

そこでいま $\rho=\dfrac{r}{a}$，　$\tau=\dfrac{kt}{a^2}$

なる無次元のパラメーターを導入し，$T/T_s=T'$ とおくと，(42) 式によって

$$T'=1+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u^2\tau}\frac{J_0(\rho u)\,Y_0(u)-Y_0(\rho u)\,J_0(u)}{J_0^2(u)+Y_0^2(u)}\frac{du}{u}\cdots\cdots (44)$$

また (43) 式によれば

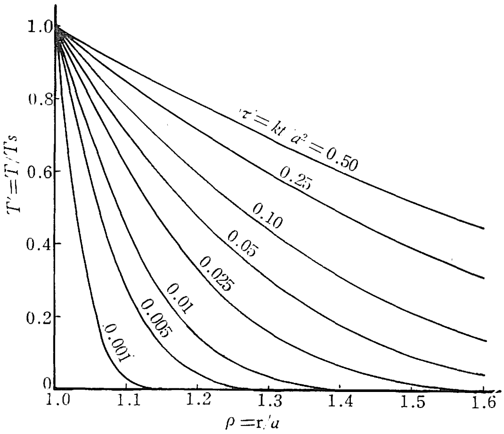
$$T'=\frac{1}{\rho^{1/2}}\,\mathrm{erfc}\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}+\frac{(\rho-1)\tau^{1/2}}{4\rho^{3/2}}\,\mathrm{ierfc}\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}+\frac{(\rho-1)(7\rho+9)\tau}{32\rho^{5/2}}\,\mathrm{i^2erfc}\frac{\rho-1}{2\sqrt{\tau}}+\cdots\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

これらの二つの式の適用について，Jaeger[14] は $\tau<0.3$ の範囲に対し (45) 式を，$0.3<\tau<10$ に対しては (44) 式を適用し，(44) 式の無限積分は変数 u の範囲を 0～0.2, 0.2～∞ に分けて求めるのが便利であるとしている．そしてそれらの値について計算した短い表を与えている．ここで対象としているような，初期の状態を扱う場合，時間の値は小さい範囲が問題となるので，(45)式を用いるのが適当であろう．

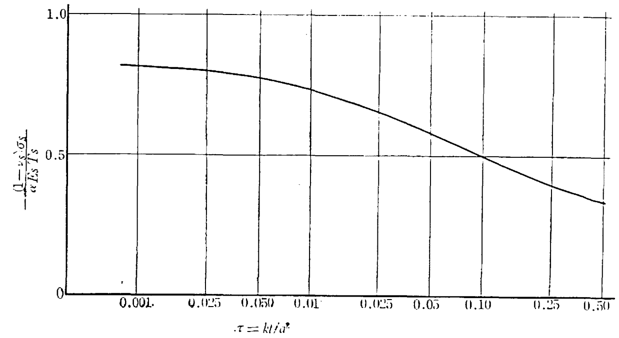
そこで筆者は，温度応力を求める際に必要な平均温度の計算に適するように，ρ の値を比較的細かい間隔にとり，$\tau=0.001$～0.5 について (45) 式を用い無次元温度 $T'(\rho,\tau)$ を求めた．この場合，(45) 式中にあらわれる $\mathrm{i}^n\mathrm{erfc}$ の関数値は Kaye[15] の与えた表を用いて求めた．その結果を τ をパラメータとして図示し，壁内の温度分布が時間とともに変化してゆく様子を表わしたものが図—3 である．

2．温度応力の時間的変化

上のような温度分布の時間的な変化が与えられたときの温度応力の時間的推移を求めた．この場合条件を簡単にするため，円筒の内外径比 $\gamma=1.6$，鋼管比 $\mu=0.01$ の場合を例にとって計算した．また，$\nu_s=0.3$，$\nu=0.15$，



図—3　円筒壁内の温度分布



図―4 内張鋼管応力の時間による変化

$n=7$ と仮定した．

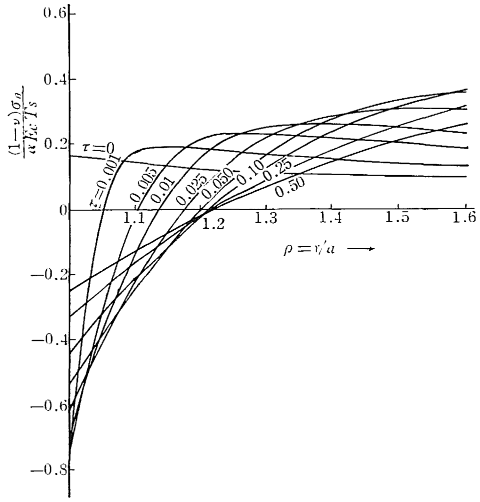
しかるとき，鋼管の円周方向応力については，上の各数値を (27) 式に入れると，結局

$$\frac{(1-\nu_s)\sigma_s}{\alpha E_s T_s}=0.747\ \Theta'_r-0.844$$

コンクリート円筒部について，円周方向の応力を考えると，

$$\frac{(1-\nu)\sigma_\theta}{\alpha E_c T_s}=\frac{1}{2\rho^2}\Big[(\rho^2+1)\ \Theta'_r+(\rho^2-1)\ \Theta'_\rho+(\rho^2+2.56)(0.0920-0.0814\ \Theta'_r)\Big]-T'$$

となり，Θ'_r および Θ'_ρ が求まれば，ただちに鋼管の応力および各 ρ の点におけるコンクリート円周方向応力が計算できる．そこで，先に求められたそれぞれの時間における T' の分布から，$T'\rho$ を計算し，数値積分によって，Θ'_r，Θ'_ρ の値を求め，各時点の温度応力の分布を求めた。

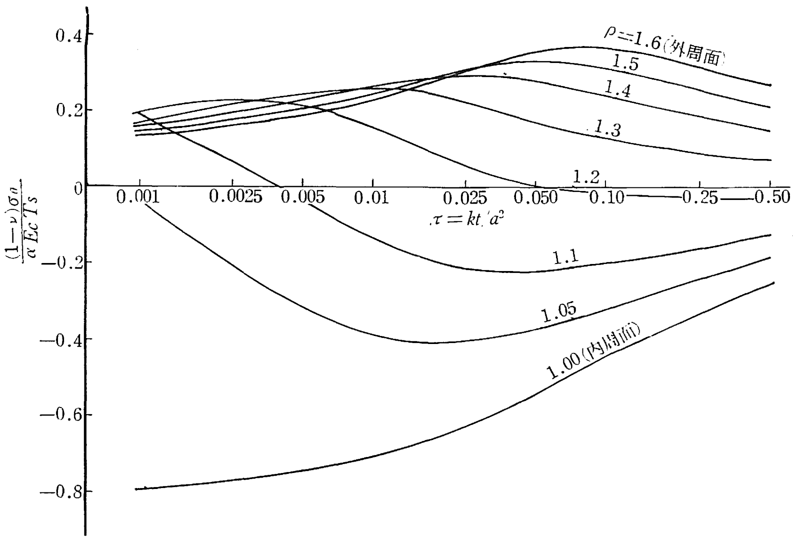


図―5 コンクリート円筒壁内の円周方向応力の分布

その結果により，鋼管に生ずる円周方向応力の時間的変化を図―4に示した．当然のことながら，初期に最も大きな応力が生じ，温度変化が外側の層へ拡がるにつれて徐々に減少する．

次に，コンクリート円筒壁内の円周方向の温度応力の分布を無次元の時間 τ をパラメータとして図―5に示す．温度が上昇した場合について考えると，温度上昇の影響がコンクリート層へ伝わり始めるとともに，内周側の表層にかなり大きい圧縮応力が生じ，外周側には比較的小さな引張応力があらわれる．さらに温度変化が円筒壁内に進むにしたがって，圧縮応力の値は小さくなるが，圧縮応力の分布する範囲が広くなり，外周側の引張応力の値が大きくなる．その後時間が経過して，内外面の温度差が小さくなるようになると，温度勾配がゆるくなって，内周側の圧縮応力も外周側の引張応力も小さくなり，温度応力は時間とともに減少する．

そこで，円筒壁内各点の円周方向応力の時間的経過を表わしたのが図―6である．円筒内周面においては，最初生じた圧縮応力が時間とともに減衰してゆく．外周側の引張応力は，最初の値から徐々に増加し，この例



図―6 コンクリート円筒の円周方向応力の時間的変化

の場合は $\tau=0.05\sim0.1$ のところで最大となり，それから再び減少する．この最大の値は，α を1°C当り 1×10^{-5}，$E_c=3\times10^5$ (kg/cm²)，$\nu=0.15$ と仮定すれば，$\sigma_\theta=1.1\,T_s$ (kg/cm²) となり，仮に円筒内面の温度が10°C上昇したものとすると，$\sigma_\theta=11$kg/cm² の温度応力が生ずることになる．

これに対し，低温の水が管内に流入し，内周面の温度が急に低下した場合は，その符号が逆になり，内周側にはかなり大きな引張応力が生ずることになる．内張管の温度低下 $(-T_s)$ が，そのままコンクリート内周面に伝ったときは，その表層には $\sigma_i=2.5\,T_s$ (kg/cm²) の引張応力が生ずることとなり，10°C 温度低下の場合は $\sigma_i=25$kg/cm² に達することとなる．そしてこの値はコンクリートの引張強度を考えた場合かなり問題である．しかし，このような大きな応力は，熱の伝わり始めた初期にだけ，しかも表層の狭い範囲にだけ集中するものであり，円筒壁厚の 1/10 程度内部へ入ったところでは最大の応力は表層の約半分になる．したがってこのような一時的なしかも局部的な応力を，どのように設計上考えるかは，検討の余地があるといえよう．いずれにしても，急激な温度変化を与えることは，コンクリートのような引張に弱い材料では好ましくない．

Ⅶ. む す び

内張鋼管を用いたコンクリート円筒から成る管体構造物の温度応力の問題について，その具体的な解析法を示した．しかしその応用にあたっては，温度分布の条件をどのように与えるかが問題である．ここでは，円筒の内周面の温度が一定に保たれるという条件のもとに，その解析例を示し，温度応力の分布ならびにその変化の傾向をとらえることを試みた．その結果，内面の温度が上昇したときは外周側に円周方向の引張応力があらわれ，ある時間が経過した後に最大の値に達するが，低温の水が急に管内に流れ込むときのような温度低下の場合は，内周側のコンクリート層に局部的にかなり大きな引張応力が生じ，実際の構造設計上問題となることを示した．しかし，逆サイホン管のような場合，その管の内周面と流水との間の熱の伝達現象は，材料の熱的性質のほか，管内の流れの状態によっても大きく左右され，その条件によっては急激な温度変化の影響が緩和され，初期における集中的な温度応力が幾分軽減されることも考えられる．したがって今後流水と管体との間の熱の伝達の問題をも含めてこのような管体構造物を設計する場合に，どのような温度応力の条件を考慮すべきかを考究してゆきたい。

引 用 文 献

1. Dahl, O. G. C.: Temperature and Stress Distribution in Hollow Cylinders, Trans. ASME, **46**: 161－208, 1924
2. Kent, C. H.: Thermal Stresses in Spheres and Cylinders Produced by Temperatures Varying With Time, Trans. ASME, **54**: 185－196, 1932
3. Jaeger, J. C.: On Thermal Stresses in Circular Cylinders, Phil. Mag. ser. 7, **36**, (257): 418－428, 1945
4. 中原一郎：圧延用中空ロールの熱応力と加熱速度，日本機械学会論文集，**26**，(170)：1395－1401，1960
5. 小泉堯：流体によって加熱される中空円筒の熱応力，日本機械学会論文集，**28**，(194)：1314－1323，1962
6. Gatewood, B. E.: Thermal Stresses in Long Cylindrical Bodies, Phil. Mag. ser. 7, **32**: 282－301, 1941
7. Gatewood, B. E.: Note on the Thermal Stresses in Long Cylinder of m+1 Concentric Materials, Quart. Appl. Math. **6**: 84－86, 1948
8. Boley, B. A. and J. H. Weiner: Theory of Thermal Stresses, 1966, John Wiley, New York, p. 246
9. Parkus, H.: Instantionäre Wärmespannungen, 1959, Springer-Verlag, Wien, p. 51
10. Timoshenko, S. and J. N. Goodier: Theory of Elasticity, 2nd ed. 1951, McGraw-Hill, New York, p. 409
11. 土木学会コンクリート委員会：鉄筋コンクリート標準示方書，1967，土木学会，東京，p. 95
12. Carslaw, H. S. and J. C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, 2nd ed. 1959, Oxford, London, p. 188－229, 327－352
13. Carslaw, H. S. and J. C. Jaeger: Some Two-Dimensional Problems in Conduction of Heat with Circular Symmetry, Proc. London Math. Soc. (2) **46**: 361－388, 1940
14. Jaeger, J. C.: Numerical Value for the Temperature in Radial Heat Flow, J. Math. Phys. **34**: 316－321, 1956
15. Kaye, J.: A Table of the First Eleven Repeated Integrals of the Error Functions, J. Math. Phys. **34**: 119－125, 1955

Summary

This paper deals with the problem of thermal stresses in steel-lined concrete hollow cylinders used for barrels of inverted siphons.

It is assumed that the temperature of steel liner changes suddenly with flowing water. Then, heat flux takes place from the liner to the outside concrete cylinder and temperature gradient through the cylinder wall is established. In this case, the liner is prevented from free expanding by the outside concrete layer and stresses are set up at the boundary. The boundary stresses may be determined on condition that the displacement must be continuous on the junction surface. If such stresses at the boundary are obtained, the thermal stresses in each parts of the cylinder are determined by considering both effects of the temperature gradient and the boundary stresses.

Practical procedures of computing the thermal stresses in steel-lined concrete cylinders are described in this paper. The results of some computations are showed for the case where the temperature change occurs only in the steel liner and does not reach the concrete layer. Furthermore, in order to illustrate the stress changes with time, an example of non-steady state is given assuming the temperature of inner aurface of the cylinder to be constant.