自然土壌における温度年変化の推定

藤　居　宏　一※

Koichi FUJII

The Annual Temperature Variation of Natural Soil

浅層地温の変化は作物の発芽，甘藷のでん粉蓄積などと密接な関係がある．農業気象の一分野である地温の問題はその人工的調節[1]など作物生育の環境制御に深く関係している．

地中温度の変化を定量的に把握することは重要な課題である．地温変化の解析によって土の物理性，ことに熱的性質を知ることができる[2]．したがって逆に土の物理性が判明しておれば地温変化の様相が推定できる．

筆者は1967〜1970年の間に13回の地温観測（1回：25〜50時間）を行なった．この観測資料を解析することによって自然土壌における地温年変化の推定を行なったので報告する．

I 基礎理論

1. 熱伝導方程式とその特解

温度 u は場所 z と 時間 t の関数

$$u = u(z,\ t)$$

で表わされる．いま微小要素についての熱流収支を考え，密度 ρ，比熱 c，熱伝導率 λ，をそれぞれ時間的にも空間的にも一定すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (1.1)$$

なる熱伝導方程式が成立する．ここで $a = \lambda/(\rho c)$ は熱拡散率である．

境界条件

$$u(0,\ t) = \theta_k \sin k\omega t \qquad (1.2)$$

$$u(\infty,\ t) = 0 \qquad (1.3)$$

を満足する（1.1）の解は

$$u_k = \theta_k \exp\left(-\frac{z}{D_k}\right)\sin\left(k\omega t - \frac{z}{D_k} - \phi_k\right) \qquad (1.4)$$

ただし $\theta_0 = (|u_k|)_{z=0}$

実際の地温変動には種々の周期・振幅・位相をもつ無数の波動が混在している．したがって（1.2）は

$$u(0,\ t) = \sum_0^\infty \theta_k \sin(k\omega t - \phi_k)$$

になると考えればよい．したがって解も重ね合わせの原理によって（1.4）より

$$u(z,\ t) = \sum_0^\infty u_k \qquad (1.5)$$

で表わされる．

しかし，観測資料から解析をすすめるうえでは，有限級数で十分である．

2. 振幅と位相

振幅 $R_k(z)$（$k=0$ は較差を表わす）は（1.4）より

$$\ln\frac{R_k(z)}{R_k(0)} = -\frac{z}{D_k} \qquad (1.6)$$

なる関係で表わされる．D_k（減衰深）は振幅が表面のそれの $1/e$ になる深さを示す指標である．

地温の年変化において $R_1(z)$ を1年項，$R_2(z)$ を半年項，また $R_0(z)$ を年較差という．

振幅・較差とともに重要なのは位相 $-z/D_k$（$z=0$ は最高温度起時を表わす）である．なお ϕ_k は時間基点からの位相を表わす．

※ 農業施設工学研究室

II 解析方法

1. 観測と資料の整理

観測は島根大学農学部構内東南部で行ない，測定個所として自然土壌（赤土）の試験区を設けた．試験区には地表面より深さ約 1, 3, 5, 10, 20, 25～35cm の点に曲管地中温度計を埋設した．計測は1時間ごとに行なった．これらの資料はいずれも晴天時に得られたものであるが，観測直前数日間の天候は多少異なっている．

地温日変化の観測資料から，各深さにおける日平均温度および日較差を算出する．その平均温度でもってその日の温度とする．

2. 推定式の形

(1.5) を変形して次のような式を得る．

$$u(z,\ t) = u_0 + \sum_1^n R_k \sin(k\omega t - \psi_k)$$

$$= u_0 + \sum_1^n u_{2k-1}\sin k\omega t + u_{2k}\cos k\omega t \tag{2.1}$$

ここで $R_k = R(z) = D_k \exp(-z/D_k)$

$$= [(u_{2k-1})^2 + (u_{2k})^2]^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

$$\psi_k = z/D_k + \phi_k$$

$$= -\tan^{-1}(u_{2k}/u_{2k-1}) \tag{2.3}$$

$$k\omega T = 2\pi (= 360°) \tag{2.4}$$

である．

深さ d における地温の変動曲線は (1.5) より $u \equiv u(d,\ t)$ で表わされる．年変化を推定するには (2.1) において $n = 2$ で十分であると思われる．すなわち

$$u(d,\ t) = u_0 + u_1\sin\omega t + u_2\cos\omega t$$

$$+ u_3\sin 2\omega t + u_4\cos 2\omega t \tag{2.5}$$

とする．なお，周期 T を1年（≒365.25日）とすると (2.4) より

$$\omega = 2\pi = 6.283 \quad (/\text{year})$$

$$= \frac{360°}{365.25} = 0.98563° = 59'02'' \quad (/\text{day})$$

である．

また，$t = t_i$, $d = d_m$ とし，さらに

$$u(d,\ t) = u(d_m,\ t_i) = {}_mU_i$$

とおくと (2.5) は

$${}_mu_0 + {}_mu_1\sin\omega t_i + {}_mu_2\cos\omega t_i$$

$$+ {}_mu_3\sin 2\omega t_i + {}_mu_4\cos 2\omega t_i = {}_mU_i \tag{2.6}$$

となる．

3. 解析方法

$\omega t_{i+1} - \omega t_i = 30°$ or $15°$ であれば，連立方程式の解法を簡略化した12縦線法が適用でき，比較的容易に正弦関数が求めることができる．しかし $t_{i+1} - t_i$ が一定でない場合には一般に12縦線法を用いることができない．このような場合，最小2乗法を用いて ${}_mu_j$ の最確値を求める方法と，選定された t_i および ${}_mU_i$ に関する連立方程式を組立て，それを解く方法とがある．

前者の方法は多用され信頼性が高いが，計算が繁雑である．後者は計算が行ないやすく卓上計算機でも十分精度を上げることができ，くふうしだいで推定値の信性頼を高めることも可能である．筆者は以上の観点から後者の方法によることにした．

(2.6) において t_i, ${}_mU_i$ が既知であるから5個の未知数 u_{ij} ($j = 0, 1, \ldots, 4$) が求まれば，深さ d_m なる場合の ${}_mu_i$ が定まる．いま

$$\sin\omega t_i = A_{i1}, \quad \cos\omega t_i = A_{i2}, \quad (A_{i0} = 1)$$

$$\sin 2\omega t_i = A_{i3}, \quad \cos 2\omega t_i = A_{i4} \tag{2.7}$$

とすると，ある1つの d_m について次のような5元1次連立方程式が成立する．

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{40} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_mu_0 \\ {}_mu_1 \\ {}_mu_2 \\ {}_mu_3 \\ {}_mu_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_mU_0 \\ {}_mU_1 \\ {}_mU_2 \\ {}_mU_3 \\ {}_mU_4 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

あるいは

$$[A_{ij}][{}_mu_j] = [{}_mU_i] \quad (i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ 4) \tag{2.9}$$

多元連元方程式の解法は種々ある．筆者は消去法のうち卓上計算機に適しているといわれる CROUT の方法[3]によった．たとえばほかに CRAMER の方法がある．後者の方法によれば5元1次連立方程式を解く場合120個の行列式（3行3列）を計算しなければならないが，CROUT の方法によればもう少し簡便に解を求めることができる．

CROUT の方法を略記すれば次のようになる．A_{ij} は方程式 (2.8) の係数であり，${}_mU_i = B_{i5}$ である．

1) $B_{i0} = A_{i0}$

2) $B_{0j} = A_{0j}/A_{00}$

3) $B_{ij} = A_{ij} - B_{i0}B_{0j} - B_{i1}B_{1j} - \cdots - B_{i,j-1}B_{j-1,j}$ $\quad (i \geqq j)$

$$B_{ij} = \frac{A_{ij} - B_{i0}B_{0j} - B_{i1}B_{1j} - \cdots - B_{i,i-1}B_{\cdot-1,j}}{B_{ii}} \quad (i < j)$$

4) 以上の係数操作によって，n 元1次連立方程式の解を求めると次式のようになる．

$${}_mu_j = B_{jn} - \sum_{i=j+1}^{n-1} B_{ji} \cdot {}_mu_i$$

以上が解析方法の理論である．得られた資料にもとづいて地温年変化を算出推定する具体的手法を以下に示す．

4．期日 t_i の選定

13回の観測記録のうち，月日が接近しすぎているなど明らかに不適当と思われる資料を棄却し，残った10回分の資料の期日を t_i と t_r に分ける．5元連立方程式を解くのであるから使用する期日 t_i は5個必要である．なお t_r は使用しない期日である．ただし $i = 0, 1, \ldots, 4$； $r = 5, 6, \ldots, 9$ である．

まず適当に t_i を定め $m = 1$ すなわち地表面の年変化曲線式を試算する．この曲線式によって $t = t_r$ のときの値 ${}_0U'_r$ を求める．さらに実測値から求められた年平均地温を ${}_0U_r$ とし，両者の差 $|{}_0U_r - {}_0U'_r|$ を考える．つぎに

$$\max |{}_0U_r - {}_0U'_r| \leqq 1 \qquad (2.10)$$

なる条件のもとで

$$S = \sum_r |{}_0U_r - {}_0U'_r|$$

を最小にする i (あるいは r) を求め，このときの t_i を使用する．試算の結果，求められた t_i に関する要素を **Table 1** に示す．

5．係数 A_{ij} の決定

前項によって t_i が定まれば (2.7) によって連立方程式 (2.8) の係数が求められる．(**Table 2**)

なお，この係数 A_{ij} はすべての m に共通である．

また (2.8) の右辺の ${}_mU_i$ は前項で選定された t_i における各深さの日平均地温である．

6．未知数 ${}_mu_j$ の決定

前述の CROUT の方法により A_{ij} から B_{ij} を求め，さらに ${}_mu_j$ を求める．$n = 5$ としてこの方法をそのまま行なうのが普通であるが，筆者は $A_{i0} = 1$ であることに着目して若干の簡便化を行なった．(2.9) に相当する式として

$$[A_{ij}][{}_mu_j] = [{}_mU_i - {}_mu_0]$$
$$(i, j = 1, 2, 3, 4)$$

なる4元1次連立方程式を作る．CROUT の解法において1)，2)は $B_{i1} = A_{i1}$ および $B_{1j} = A_{1j}/A_{11}$ となり，3)はそのままである．こうして求められた ${}_mu_j$ は未知数 ${}_mu_0$ を含んだ形式

$${}_mu_j = p_j - q_j({}_mu_0) \qquad (2.11)$$

になる．これを方程式

$$[A_{0j}][{}_mu_j] = [{}_mU_i - {}_mu_0]$$

に代入にして p_j, q_j および ${}_mu_0$ を決める．つづいて (2.11) から ${}_mu_j$ すべてが決定される．

Table 1 Concrete value of time factor i

i	date	t_i	ωt_i(deg)	ωt_i(rad)
0	Jul. 24	0.564	203° 02′	3.48
1	Sep. 2	0.637	242 13	4.00
2	Sep. 23	0.729	262 25	4.58
3	Oct. 7	0.769	276 43	4.83
4	Dec. 5	0.930	334 35	5.84

Table 2 Coefficients of simultaneous equation (2.8) ($t = 0$ for Jan., 1st.)

i \ j	1	2	3	4
0	−0.226	−0.920	0.720	0.694
1	−0.885	−0.466	0.825	−0.567
2	−0.991	−0.136	0.262	−0.965
3	−0.993	0.117	−0.232	−0.973
4	−0.425	0.905	−0.769	0.639

III　解析結果とその考察

1. 年平均地温 ${}_mu_0$

年平均地温 ${}_mu_0$ は理論上深さに関係しないが，実際 **Table 4** に示されているように，z の増加につれて ${}_mu_0$ は減少し，ある値に漸近している．

年単位で熱収支をみると浅層から深層への熱伝導が完全でない．浅層で吸収された熱エネルギーが深層土壌への伝導のみに消費されるのではなく，一部はたとえば土中水の蒸発熱など他のものに対して消散されると考えられる．

いま ${}_mu_0$ を z の関数として

$${}_mu_0 \equiv u_0(z) = u_x + {}_0u_0\exp(-kz)$$

と仮定し，**Table 4** より k を定め収束値 u_x を推定すると $z\to\infty$ のとき $u_x\to 12.9$ になる．したがって深層（推定の許される範囲は概略 0.5～2m）の年平均地温はおよそ13°Cであると考えられる．($k = 0.0715$)

2. 1年項 R_1

点 $(z, \ln R_1(z))$ は $d_1(=5\text{cm})$ のところを除いてほぼ直線上に分布しており，理論とかなり一致していることがわかる．z と $\ln R_1(z)$ の関係式を求めると

$$\ln R_1(z) = \ln R_1(0) - 0.00764\,z$$

すなわち

$$R_1(z) = 16.21\exp(-0.00764\,z) \quad (°\text{C})$$

となる．これより年減衰深 ${}_yD_1$ を求めると (2.2) より

$${}_yD_1 = 1/0.00764 = 131 \text{ (cm)}$$

である．

3. 位相 ${}_m\phi_1$

Table 3 の資料（特に ${}_m\phi_1 - {}_0\phi_1$）を解析することによって，z と ϕ の関係を明らかにすることができる．その近似曲線を求め，角度で表わすと

$$\phi_1(z) = \begin{cases} {}_0\phi_1 + 25.1\exp(-0.1\,z) & (z \leqq 20) \\ {}_0\phi_1' + 0.335\,z & (z \geqq 20) \end{cases}$$

となる．(2.3) より年減衰深を計算すると

$${}_yD_1 = \frac{360/2\pi}{0.335} = 171 \text{ (cm)}$$

である．前述の振幅 R_1 より求めた ${}_yD_1$ にくらべ位相差より求めた ${}_yD_1$ のほうが大きい．$z = 20$ で分割せず，全体を直線で近似させると ${}_yD_1 = 125$～140cm なる値が求められる．両者より ${}_yD_1$ は 125～170cm の間にあることが判明する．40～60cm の温度記録があれば，もう少し確定した値を推定することができる．

4. 半年項 ${}_mR_2$，半年項の位相 ${}_m\phi_2$

Table 4 に示されている R_2 をみると R_1 にくらべ非常に小さな値である．したがって半年項の地温年変化に及ぼす影響も少ないことがわかる．

ϕ_2 もあまり問題にする必要はない．R_2 が小さいとき，${}_mU_i$ のわずかな変動によって ${}_m\phi_2$ はかなり左右される．しかし実際の地温変化に与える影響は R_2 の大きさによって規制されている．この点が ${}_m\phi_1$ と異なる点であり，${}_m\phi_2$ から ${}_mD_2$ を推定するには大きな誤差を伴い困難である．したがって R_2 が小さいとき，${}_m\phi_2$ は信頼性が乏しくあまり問題にする必要はない．

W. R. VAN WIJK[4] らによると地温年変化は単一正弦関数 ${}_mR_1\sin(\omega t - {}_m\phi_1)$ で十分に表現しうるとしている．$R_1 \gg R_2$ であることは筆者の観測・解析結果もそれをほぼ実証しているといえよう．

Table 3 Annual amplitude, phase and phase difference of first harmonic at each depth.

m	d_m	${}_mR_1$	${}_m\phi_1$*	${}_m\phi_1 - {}_0\phi_1$
0	0	16.21°C	91° 57′	0° 00′
1	5	14.87	102　16	10　19
2	10	15.11	108　33	17　36
3	20	13.97	114　18	22　21
4	30	12.80	117　23	25　26

* ${}_m\phi_1 = 0°$ at Jan., 1st.

Table 4 Annual average temperature, and annual amplitude and phase of second harmonic, at each depth.

m	d_m	${}_mu_0$	${}_mR_2$	${}_m\phi_2$*
0	0	18.57°C	1.78°C	147° 48′
1	5	16.95	0.64	170　41
2	10	15.02	0.50	58　29
3	20	14.23	1.22	23　56
4	30	13.56	2.22	29　37

* ${}_m\phi_2 = 0°$ at Jan., 1st.

む　す　び

本報告で示されている地温年変化の式は，土の物理性などの平均化を前提とした近似推定式である．この式は十数回の観測結果からも十分有用なものと考えられる．

自然土壌（粘土質の赤土）の地年変化推定に際して含水状態などが問題になる．この点を推定値と観測値との照合から検討した結果，年変化の振幅・位相に及ぼす影響は比較的小さいと判断できた．

また観測期日の間隔が一定でなく，季節的にかたよっていても条件（2.10）を設けることによって年変化を推定することが十分に可能であることが明らかになった．

最後に，半年項を無視して大胆な近似を行なうと

$$u(z,\ t)=(13\pm2)+5.7\exp(-0.0715z)$$
$$+16.2\exp(-0.00764z)\cos(\omega t-0.4z)$$

で表わせる．ただし単位は z：cm，u：°C，ωt：deg で1月1日を $t=0$ とする．なお $\omega t \fallingdotseq 59'\times n=n^\circ-n'$ とおけば1月1日から n 日目の地温 $u(z,\ n)$ がただちに求められる．

参　考　文　献

1．藤居宏一：第23回農業土木学会中国四国支部講演会要旨：38〜39，1968

2．藤居宏一：島根大学農学部研究報告 **3**：94〜97，1969

3．一松　信：数値計算　至文堂　東京　1966，p. 68〜80

4．VAN WIJK, W. R. and DERKSEN, W. J.: Physics of Plant Environment, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963, p. 102〜143

Summary

The equation to forecast the annual temperature variation of natural soil is derived from the author's investigation. It is determined on referring the average temperature over the diurnal variation. It is expressed as a harmonic (2.1).

A procedure is proposed to analyse the harmonic. It is a method to solve the simultaneous equation (2.8).

The solutions are transformed into the amplitude and the phase lag in the harmonic. In the case of the annual variation, the terms higher than third order in the harmonic can be neglected since their effect is small. The special discussion is focused on the first harmonic. Judging from the results of these analysis, the method produces a good approximation.