

松江地方の降雨特性について (III)^{※※}

宍道湖水位曲線の推定

田中礼次郎[※]

Reijiro TANAKA

A Study on the Characteristic of Rainfall in Matsue District (III)

Estimation of the Water Level Hydrograph of Lake Shinji corresponding to Rainfall

まえがき

一般に農地の排水計画においては、外水位の取り扱いが内水位と同様に重要な課題の一つになる。ここでは宍道湖畔の農地排水計画を想定し、夏期(6~9月)の宍道湖水位が、松江雨量との関連でどのように変化するかを検討することにする。宍道湖は流域面積 $1,227\text{km}^2$ (うち斐伊川流域面積 915km^2)、湖面積 81km^2 をもち、宍道湖→大橋川→中海→境水道→日本海(美保湾)と連なり、他方宍道湖は佐陀川によって日本海と直接連絡しているが、佐陀川の規模は大橋川に比してきわめて小さいので、宍道湖水位に影響を及ぼすのは主として中海水位である。松江雨量に対する宍道湖水位の時間的変化はかなり面倒な計算が必要であるが水文学的に求めることができる。しかし本研究では *stochastic hydrology* の立場からこの問題を取り扱うことにする。すなわち宍道湖水位曲線は、図1のように三角形で近似できるので、三角形にモデル化した宍道湖水位曲線の諸元を松江雨量との相関性を重視して、モンテカルロ法的に推定する方法を提示する。

1. 計算式

1.1 2変量正規分布

x, y が二変量正規分布にしたがっているとき次式が成立する。

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon \quad \dots\dots(1)$$

ここに α, β は回帰係数、 ε は $N(0, \sigma^2)$ の分布をもつ変量、 σ^2 は分散

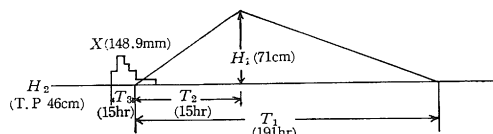


図1 三角形にモデル化した水位曲線

$$\hat{\sigma}^2 = s_y^2(1-r^2) \quad \dots\dots(2)$$

ここに s_y^2 は y の分散、 r は x, y の標本相関係数

(1)式は $\varepsilon = \sigma e'$ とおくと e' は $N(0, 1^2)$ の正規分布にしたがう変量となり(3)式であらわされる。

$$y = \alpha + \beta x + \sigma e' \quad \dots\dots(3)$$

e' に正規乱数をいれれば回帰直線 $y = \alpha + \beta x$ のまわりのちらばりを考慮した y を推定することができる。(前報¹⁾ 参照)

1.2 3変量正規分布

x_1, x_2, y が3変量正規分布にしたがっているとき、大きさ n の標本 ($x_{11}, x_{21}, y_1; x_{12}, x_{22}, y_2; \dots\dots x_{1n}, x_{2n}, y_n$) から、 y の x_1, x_2 に対する重相関係数 $\rho_{y \cdot x_1 x_2}$ を推定するには

$$\rho_{y \cdot x_1 x_2} = \sqrt{1 - \frac{R}{R_{yy}}} \quad \dots\dots(4)$$

を用いる。 R および R_{yy} はつぎのようにして計算される。

x_1, x_2 の相関係数を

$$\begin{aligned} r_{x_1 x_2} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} - n \bar{x}_1 \bar{x}_2}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_{1i}^2 - n \bar{x}_1^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n x_{2j}^2 - n \bar{x}_2^2\right)}} \\ &= \frac{S_{x_1 x_2}}{S_{x_1} S_{x_2}}, \quad y \text{ と } x_1 \text{ の相関係数を} \end{aligned}$$

※ 農業水利工学研究室

※※ 第25回農業土木学会中国四国支部講演会発表(昭和45年10月)

$$r_{yx_1} = \frac{S_{yx_1}}{S_y S_{x_1}}$$

のようにあらわし行列式 R を

$$R = \begin{vmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1y} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2y} \\ r_{yx_1} & r_{yx_2} & r_{yy} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} r_{x_1x_1} = r_{x_2x_2} = r_{yy} \\ = 1 \dots\dots\dots(5) \end{matrix}$$

とし、 R_{yy} を (6)式から求めればよい。

$$R_{yy} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} \end{vmatrix} = 1 - r_{x_1x_2}^2 \dots\dots\dots(6)$$

また変量 y が(7)式であらわされるととき、回帰係数はそれぞれ(8)式で推定される。

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon \dots\dots\dots(7)$$

ここに α, β_1, β_2 は回帰係数、 ε は $N(0, \sigma^2)$ にしたがる変量

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 \\ \hat{\beta}_1 &= \left. \begin{matrix} \begin{vmatrix} S_{x_1y} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_2y} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix} \\ \hat{\beta}_2 &= \left. \begin{matrix} \begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1y} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2y} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} S_{x_1x_1} & S_{x_1x_2} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2x_2} \end{vmatrix} \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

また y を推定するための回帰平面式は (9)式であらわされる。

$$R_{yy} \left(\frac{y - \bar{y}}{S_y} \right) + R_{x_1y} \left(\frac{x_1 - \bar{x}_1}{S_{x_1}} \right) + R_{x_2y} \left(\frac{x_2 - \bar{x}_2}{S_{x_2}} \right) = 0 \dots\dots\dots(9)$$

また分散 σ^2 は(10)式から推定される。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i}) \right\}^2 = s_y^2 (1 - r_{y \cdot x_1 x_2}^2) \dots\dots\dots(10)$$

(7)式は $\varepsilon = \sigma \varepsilon'$ とおくと ε' は $N(0, 1^2)$ の正規分布にしたがる変量となり、(7)式は(11)式となる。

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \sigma \varepsilon' \dots\dots\dots(11)$$

ε' に正規乱数を用いて(3)式と同じように(9)式のまわりのちらばりを考慮した y を求めることができる。

2. 夏期(6~9月)の松江雨量に対する宍道湖水位曲線の推定

2.1 水位曲線のモデル化

松江雨量に対する宍道湖水位曲線をしらべると、大体ピーク水位を高さ、水位上昇継続時間(初期水位から再び初期水位にもどるまでの時間)を底辺とする三角形で近似できることがわかった。そこで水位曲線を図1のように三角形にモデル化し、松江雨量と対応する三角形水位曲線の諸元 (H_1, H_2, T_1, T_2, T_3) を観測記録からとり出してその関係を探り、松江雨量を与えてこの三角形水位曲線を推定することにする。ここで H_1 は宍道湖水位上昇高(ピーク水位と初期水位の差, cm), H_2 は初期水位 ($T.P$, cm), T_1 は水位上昇継続時間 (hr), T_2 は水位曲線の立上り時刻からピーク水位出現時刻までの時間 (hr), T_3 は降雨開始時刻から水位曲線の立

上り時刻までの時間、 X は水位曲線に対応する連続降雨量で、松江地方気象台の時間雨量記録、宍道湖水位は松江市白濁地点の自記水位計記録(建設省)を採用し、いずれも5年間(1964~1968)を対象とする。

2.2 X, H_1, T_1 および T_2 の関係

宍道湖水位に関係をもつ中海水位は、境水道を経て日本海に連なっているため日本海の干満の影響をうけて、大潮差 12.6cm, 小潮差 3.7cm, 平均潮差 8.2cm²⁾(いずれも崎津水位観測所)程度の日変化がみられるが、その値が小さいため、宍道湖には水位記録にあらわれる程の影響は認められない。いま夏期(6~9月)の無降雨時における中海の日平均水位曲線と宍道湖のそれを比較した1例を示すと、図2のとおりで、大体一定の水位差で対応していることがわかる。このことは無降雨時の宍道湖水位は、中海水位に大きく支配されていることを示している。一方豪雨時の比較の1例は図3のようにかなり水位の対応はみられ

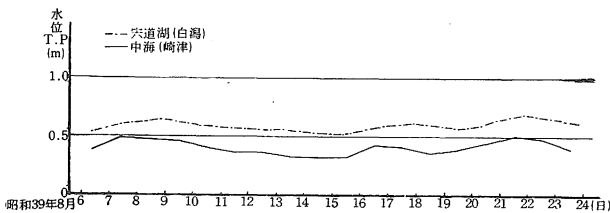


図2 無降雨時宍道湖、中海水位曲線

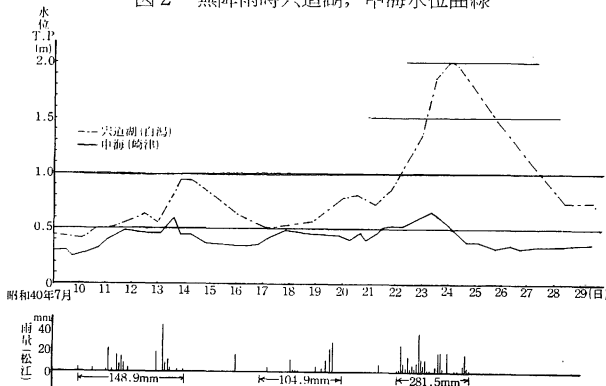


図3 豪雨時宍道湖、中海水位曲線

るが、中海の方がピークが早くあられまた水位の上昇幅も、水位上昇継続時間も大きく異なっている。すなわち宍道湖は大橋川の狭く部を経て中海と連絡しているため、豪雨時には中海水位のほかに降雨の影響が大きくあられ、宍道湖水位は雨量とかなりの相関があることが予想される。そこで松江の連続降雨量を $X(\text{mm})$ とし、降雨終了時刻からピーク水位出現時刻までの時間を $T'(\text{hr})$ とし、 T' の分布をしらべると図4のとおりで、 $T' > 0$ の場合がほとんどで降雨終了後にピーク水位が出現する場合が大部分を占めていることがわかる。このことは、ピーク水位は連続雨量の総量と関係があることを示している。また(6~9月)の水位変動の範囲($T.P. 0.2 \sim 2.0\text{m}$)では宍道湖水位と容積は大体線型関係であるとみてよいため、降雨による水位ハイドログラフの特性を考えると、水位曲線の三角形モデルにおいて、 X と H_1 , T_1 , T_2 および H_1 と T_1 の間にかなりの相関があることが予想される。そこで1.1, 1.2の計算式を適用して解析するために、各観測値の対数値をとって正規化すると、図5に示すように対数確率紙にほぼ直線状に分布するからいずれも対数正規分布とみなすことができる。

2.2.1 X と H_1 , X と T_2 の関係

正規化された観測値 $x (= \log X)$, $h_1 (= \log H_1)$, $t_2 (= \log T_2)$ いずれも43個から x と h_1 の相関係数 r_{xh_1} , x と t_2 の相関係数 r_{xt_2} を求めると

$$r_{xh_1} = 0.8297, r_{xt_2} = 0.4580$$

となる。回帰直線式をそれぞれ

$$h_1 = \alpha_1 + \beta_1 x, t_2 = \alpha_2 + \beta_2 x$$

とすると

$$\hat{\beta}_1 = r_{xh_1} \frac{s_h}{s_x} = 0.8490, \hat{\beta}_2 = r_{xt_2} \frac{s_{t_2}}{s_x} = 0.2703$$

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{h}_1 - \hat{\beta}_1 \bar{x} = -0.2642, \hat{\alpha}_2 = \bar{t}_2 - \hat{\beta}_2 \bar{x} = 1.1099$$

をうる。

また(2)式より

$$\hat{\sigma}_{h_1} = s_{h_1} \sqrt{1 - r_{xh_1}^2} = 0.1988$$

$$\hat{\sigma}_{t_2} = s_{t_2} \sqrt{1 - r_{xt_2}^2} = 0.1814$$

をうるから、(3)式に対応する式は

$$h_1 = 0.8490x - 0.2642 + 0.1988\epsilon_1 \dots \dots (12)_1$$

$$t_2 = 0.2703x + 1.1099 + 0.1814\epsilon_2 \dots \dots (12)_2$$

ここに ϵ_1, ϵ_2 は正規乱数

となり、 $x, \epsilon_1, \epsilon_2$ を順次代入して雨量 $x (= \log X)$ に対する h_1, t_2 , すなわち H_1, T_2 を求めることができる。

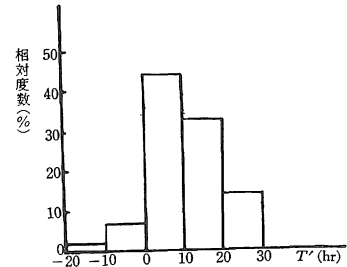


図4 降雨終了時刻より水位ピークまでの時間 T' の分布

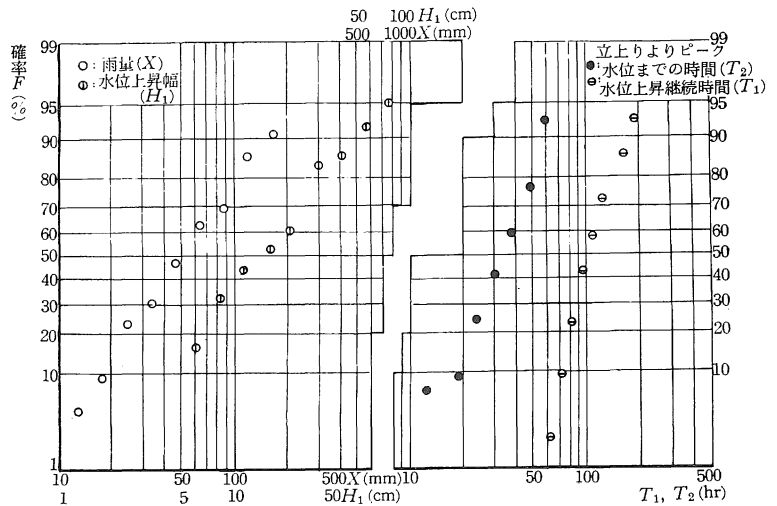


図5 X, H_1, T_1, T_2 の分布図

2.2.2 T_1, H_1, X の関係

前節と同様に正規化された $t_1 (= \log T_1)$ と h_1, t_1 と x の相関係数を求めると

$$r_{t_1 h_1} = 0.7938, r_{t_1 x} = 0.7062$$

となり前項より $r_{xh_1} = 0.8297$ であるから、 t_1, h_1, x の間にはかなり高い相関があるといえる。そこでこれら3変量に1.2の重相関の計算式を使って、 h_1, x より t_1 を推定する回帰平面式をつぎの順序で求める。まず(5)式より

$$R = \begin{vmatrix} r_{h_1 h_1} & r_{h_1 x} & r_{h_1 t_1} \\ r_{x h_1} & r_{x x} & r_{x t_1} \\ r_{t_1 h_1} & r_{t_1 x} & r_{t_1 t_1} \end{vmatrix} = 0.1130$$

(6)式より

$$R_{t_1 t_1} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} r_{h_1 h_1} & r_{h_1 x} \\ r_{x h_1} & r_{x x} \end{vmatrix} = 0.3116$$

$$R_{h_1 t_1} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} r_{xh_1} & r_{xx} \\ r_{t_1 h_1} & r_{t_1 x} \end{vmatrix} = -0.2079$$

$$R_{x t_1} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} r_{h_1 h_1} & r_{h_1 x} \\ r_{t_1 h_1} & r_{t_1 x} \end{vmatrix} = -0.0476$$

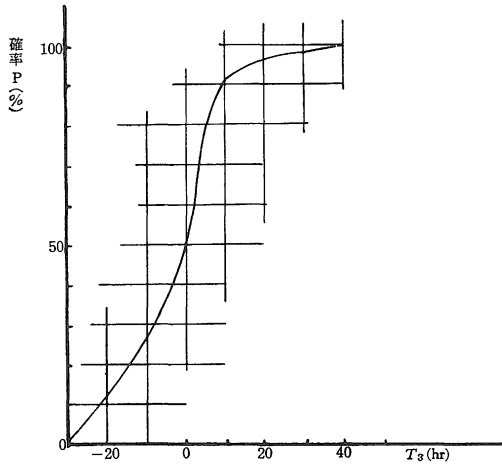


図6 降雨開始時刻から水位曲線立上がり時刻までの時間 T_3 (hr) の確率分布曲線

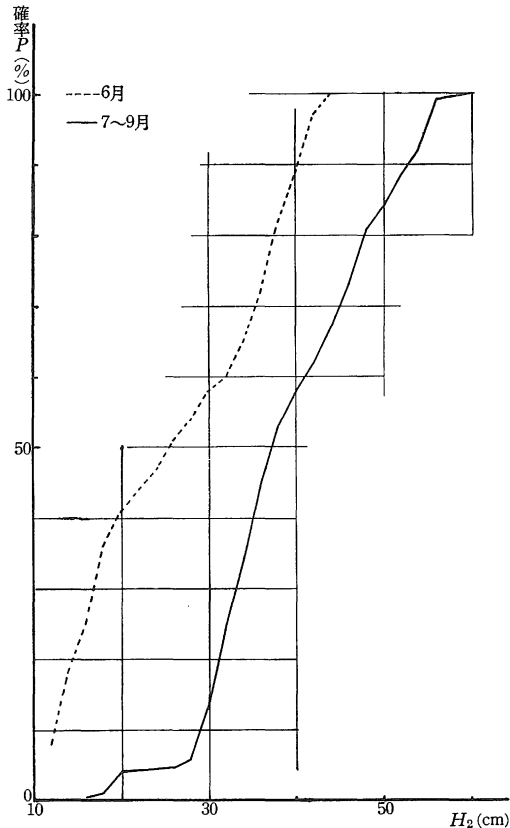


図7 初期水位の確率分布曲線

(7)式より t_1 が次式であらわされるとすると

$$t_1 = \alpha + \beta_1 h_1 + \beta_2 x + \varepsilon$$

(8)式より

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{vmatrix} S_{h_1 t_1} & S_{h_1 x} \\ S_{x t_1} & S_{x x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{h_1 h_1} & S_{h_1 x} \\ S_{h_1 x} & S_{x x} \end{vmatrix}} = 0.2644$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\begin{vmatrix} S_{h_1 h_1} & S_{h_1 t_1} \\ S_{h_1 x} & S_{x t_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} S_{h_1 h_1} & S_{h_1 x} \\ S_{h_1 x} & S_{x x} \end{vmatrix}} = 0.0619$$

$$\hat{\alpha} = \bar{t}_1 - \hat{\beta}_1 \bar{h}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x} = 1.6346$$

(4)式より

$$r_{t_1 \cdot h_1 x} = \sqrt{1 - \frac{R}{R_{t_1 t_1}}} = 0.7984$$

(10)式より

$$\hat{\sigma} = s_{t_1} \sqrt{1 - r_{t_1 \cdot h_1 x}^2} = 0.0850$$

がそれぞれ得られる。したがって(11)式より

$$t_1 = 0.2644h_1 + 0.0619x + 1.6346 + 0.0850\varepsilon_3 \quad \dots\dots (13)$$

をうる。また回帰平面式は(9)式より

$$R_{t_1 t_1} \left(\frac{t_1 - \bar{t}_1}{s_{t_1}} \right) + R_{h_1 t_1} \left(\frac{h_1 - \bar{h}_1}{s_{h_1}} \right) + R_{x t_1} \left(\frac{x - \bar{x}}{s_x} \right) = 0$$

$$0.3116 \left(\frac{t_1 - 2.0909}{0.1411} \right) - 0.2079 \left(\frac{h_1 - 1.2958}{0.3561} \right) - 0.0476 \left(\frac{x - 1.8374}{0.3480} \right) = 0 \quad \dots\dots (14)$$

となり整理すると(13)式と同じ回帰係数が得られる。 h_1, x から t_1 を推定するとき(14)式よりもばらつきを考慮した(13)式がよい適合度を与えることは二変量正規分布の場合と同じである。

2.3 T_3, H_2 の分布

2.3.1 T_3 の分布

松江雨量 X と、この降雨開始時刻から宍道湖水位曲線の立上り時刻までの時間 T_3 の関係は、相関性が全く認められずおのおの独立の変量であることがわかる。また T_3 は $-30 < T_3 < 40$ 時間の範囲に分布しその確率分布曲線は図6となる。これからわかるように $0 \leq T_3 < 10$ 時間の確率が42%を占めて最も多い。また $T_3 < 0$ は松江の降雨開始前に宍道湖の水位上昇が始まっていると予想される場合でその確率は49%と約半分を占め、宍道湖流域の降雨に地域性があることを示している。

2.3.2 H_2 の分布

降雨による水位上昇期間を除いた期間の水位を初期水位 H_2 (T, P であらわす) とし、夏期(6~9月)について月別に初期水位(午前9時の水位)の分布をしらべると図7のとおりで、6月は5月以前の水位が一般に低いのでこれに影響されて相当に低く、また分布の上

限、下限附近が比較的多く中間が少ない不規則な分布であるが、7、8、9月は分布が近似してしかも6月に比していずれの月も水位が高く、中央値附近が多い正規分布状の確率分布となるので、図7に示すように夏期の初期水位の確率分布曲線は6月と7~9月に大別することができる。一方初期水位 H_2 は前期降雨、降雨間隔および流域の流出係数などに関係するが、図2のように無降雨時の宍道湖水位は中海水位に大きく支配されるので、前期降雨との相関はかなり小さくなることが予想される。したがって実用的な立場から簡便な取扱法として、(0-1)の一樣乱数を使用し、これを図7の確率 P に等しいとおいて H_2 をきめることにする。

2.4 三角形にモデル化した水位曲線の推定

水位の観測値から、いくつかの水位曲線を三角形にモデル化して示したのが図8で、2.2、2.3で検討した H_1 、 T_1 、 T_2 、 T_3 および H_2 の諸特性をよくあらわしていることがうかがえる。これら相互間に関係のある変量をすべて盛り込んだ数学モデルを作ることはきわめて困難であり、たとえ各変量の関係を忠実に表現できる式が得られたとしても、これを解析的に解くことは非常に困難が予想される。このようなときに比較的容易に近似解が得られるモンテカルロ法を用いて、つぎの手順で三角形水位曲線を推定することにする。

- a) 松江雨量 X と正規乱数 ϵ_1 、 ϵ_2 を与えて(12₁)、(12₂)式から H_1 、 T_2 を求める。
- b) (12₁)式より求めた H_1 およびこれに用いた X と、正規乱数 ϵ_3 を与えて(13)式より T_1 を求める。
- c) T_3 は X の大きさに関係なく独立に図6の確率分布にしたがうから、(0-1)の一樣乱数 P_1 を用いこれを図6の確率 P に等しいとおいて T_3 を推定する。
- d) H_2 についても c) と同様に(0-1)の一樣乱数 P_2 を図7の確率 P に対応させれば求められる。この場合 X の生起月に属する確率分布曲線を用いることはいうまでもない。

以上 a)-d) について適用例を示すと $X = 148.9$ (mm) とすると $x = 2.1729$ 、 $\epsilon_1 = 1.3457$ として(12₁)式より $h_1 = 1.8481$ 、 $H_1 = 71$ (cm)、 $\epsilon_2 = 0.8901$ とすると(12₂)式より $t_2 = 1.8587$ 、 $T_2 = 72$ (hr)、つぎに $x = 2.1729$ 、 $h_1 = 1.8481$ 、 $\epsilon_3 = 0.2655$ を与えて(13)式より $t_1 = 2.2803$ 、 $T_1 = 191$ (hr)、 $P_1 = 0.94$ ならば図6より $T_3 = 15$ (hr)、 $P_2 = 0.68$ で9月ならば

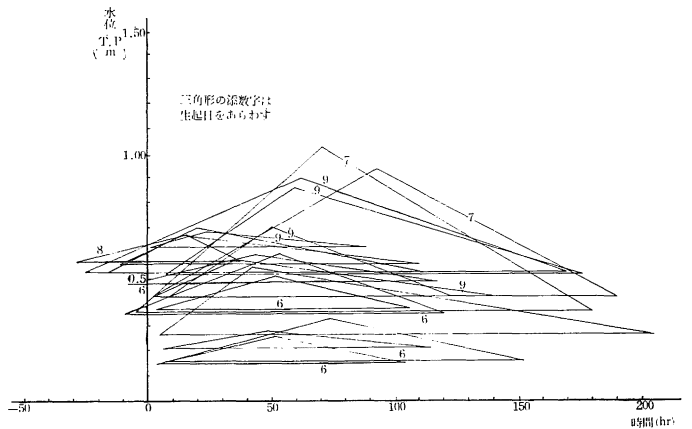


図8 三角形水位曲線の観測値

図7より $H_2 = 46$ (cm)、よってピーク水位 $H = H_1 + H_2 = 71 + 46 = 117$ (cm) となり図1の三角形水位曲線が得られる。

3. む す び

水工計画で2個あるいは3個の水文量の間にそれぞれ相関がある場合に、そのうちの1個あるいは2個の既知量から他を推定する方法として、回帰直線式あるいは回帰平面式がしばしば用いられているが、これはあくまでも平均的な取扱いで観測値はこれらの式のまわりにある程度のちらばりをもって分布しているはずである。したがって従来から用いられているこれらの回帰式に、このちらばりを考慮した残余項 ϵ をもたせることにより、観測値の母集団によりよく適合する推定値が得られることが予想される。この理論を松江雨量と相関をもつ宍道湖水位曲線の諸変量に適用し大へん良好な結果が得られた。この方法は比較的短期間の水文記録しかないとき、これと相関のある長期の水文記録を使って、その母集団に適合する標本値を推定するのにきわめて有用と考えられる。

またこの手法にモンテカルロ法を組合わせて松江雨量から三角形にモデル化した宍道湖水位曲線を比較的確かたんに推定する方法を提示した。前報³⁾の降雨の模擬発生法を用いて発生した豪雨に対する宍道湖水位曲線を、上述の方法で推定することができるから、宍道湖畔の内水排除計画に想定される外水位を任意の期間について、比較的確かたんに検討することができる。

引用文献

1. 田中礼次郎：島根大農研究報4：129-133, 1970
2. 中海地区全体実施設計書1中国・四国農政局, 岡山

1966, p. 31

3. 田中礼次郎：島根大農研究報 377-82, 1969

Summary

This paper proposes a method by which to estimate the Water level hydrograph of Lake Shinji corresponding to rainfall in summer (Jun. ~Sept.). By transforming the hydrograph into a simple triangle model as in Figure 1, the relations between X (rainfall depth in mm at Matsue) and H_1 (increment in water level in cm from the initial water level to the peak), T_1 (time in *hr.* from the beginning to the end of hydrograph), T_2 (time in *hr.* of the rising limb) can be expressed by

$$h_1 = 0.8490x - 0.2642 + 0.1988\varepsilon_1$$

$$t_2 = 0.2703x + 1.1099 + 0.1814\varepsilon_2$$

$$t_1 = 0.2644h_1 + 0.0619x + 1.1346 + 0.0850\varepsilon_3$$

where x is $\log X$, h_1 $\log H_1$, t_1 $\log T_1$, t_2 $\log T_2$, and $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_3$ stochastic variables.

Based on the observed data, the initial water level H_2 (*T. P.*, cm) and the time lag from the rainfall beginning to the rising of hydrograph T_3 (*hr.*) can be estimated by Monte Carlo Simulation Method. When X is given, a triangle model of the hydrograph is obtained with the combination of H_1 , H_2 , T_1 , T_2 , and T_3 above mentioned.