

氏名	山本 俊輔
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	総博甲第110号
学位授与年月日	平成28年3月25日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項
文部科学省報告番号	甲第575号
専攻名	電子機能システム工学専攻
学位論文題目	Constraint qualifications and characterizations of solutions in convex optimization (凸最適化における制約想定と解の特徴付け)
論文審査委員	主査 島根大学教授 黒岩 大史 島根大学教授 内藤 貫太 島根大学教授 和田 健志

## 論文内容の要旨

最適化問題とは、与えられた集合上で目的となる関数を最小化する問題であり、数理経済学、工学、統計学、物理学など、実社会と係わる様々な分野と関連し、研究されている。最適化問題は一般的には以下の形

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条件} & x \in S \end{array}$$

ただし、 $S = \{x \in X \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$  で表記される。最適化問題は、目的関数  $f$  や制約関数  $g_i$  の種類で分類されているが、本論文では主として凸最適化問題、すなわち  $f$  や  $g_i$  が凸関数である場合について考察する。凸最適化問題の研究で特に重要なテーマは「Lagrange 双対定理」と「最適性条件」であり、これらに関連して、制約関数についての技術的な仮定である制約想定の研究が盛んに行われている。

Lagrange 双対定理の主張は、適切な仮定の下で最適化問題とその Lagrange 双対問題の最適値が一致する、ということ述べている定理である。一般的に、元の問題に比べて双対問題の方が最適値を求めることが容易である場合が多い。あらゆる目的関数に対して双対性が成り立つために必要な仮定を制約想定という。最も有名な制約想定として Slater 制約想定が知られている。Slater 制約想定は条件としてわかりやすい等の利点がある一方で、Slater 制約想定が成り立たないが双対性は成り立つような問題も少なくないため、より条件の弱い制約想定の研究が行われてきた。Farkas Minkowski property (FM と略される) と呼ばれる制約想定は双対性に関する必要十分な制約想定であり、また conical epigraph hull property (conical EHP と略される) と呼ばれる制約想定は FM の十分条件であることが知られている。

また最適性条件は、最適解(または局所最適解)となるための必要または十分な条件のことであり、Karush-Kuhn-Tucker (KKT と略される) 条件がよく知られている。特に、凸最適化問題におい

ては、KKT条件は最適解となるための十分条件であるが必ずしも必要条件ではない。この場合、あらゆる目的関数に対してもKKT条件が最適解の必要条件であることが保証されるような仮定を制約想定という。basic constraint qualification(BCQと略される)と呼ばれる制約想定は最適性に関する必要十分な制約想定であることが示され、最適性に関するより弱い制約想定を見つけ出す研究は終着を迎えた。

しかしながら、これらの制約想定が成り立つかどうかを調べるのは非効率な場合がある。例えば、BCQの判定には劣微分と有効添字集合、および法線錐を求める必要があり、これらの集合は各点に依存するため、制約集合上のすべての実行可能解においてこれらの集合を計算することは非常に手間がかかり、容易ではない。

本論文では、凸最適化における制約想定と解の特徴付けに重きをおいて研究を行った。本論文の構成は次の通りである。

1章では、まずは準備として、凸解析における基本的な定義やいくつかの重要な結果について述べる。

2章では、双対性定理を示す上で重要な二者択一の定理の研究を分離可能凸関数に対して行う。まず、その過去の研究結果を紹介する。2.1節では分離可能凸関数に関する二者択一の定理を述べる。2.2節では、目的関数 $f$ 及び制約関数 $g_i$ が原点を通るという特殊な場合の二者択一の定理について研究を行う。

3章では、制約集合上の点におけるBCQの判定についての研究を行う。3.1節では、FMやconical EHPの特徴錐を用いたBCQの判定のための定理を与える。特徴錐は実行可能解による影響を受けず、conical EHPやFMが成り立っているとき、すべての制約集合上の点においてBCQが成り立つことができる。一方で、これらの特徴錐が閉ではない場合、与えられた点においてBCQが成り立つかどうかはわからないが、この定理によりBCQの特徴付けを行えるようになり、その結果をいくつかの例を用いて述べる。3.2節と3.3節では、特別な関数のクラスに3.1節の主定理を適用し観察を行う。

4章では、局所リプシッツ制約付き凸最適化問題の最適性に関する制約想定の研究を行う。この章の最適化問題は、制約集合 $S$ が凸集合となるものを取り扱うことで従来の凸最適化問題の拡張となっている。4.1節では、局所リプシッツ制約付き凸最適化問題における解の最適性に関する制約想定を紹介すると共に微分可能最適化問題でよく知られている一次独立制約想定、Cottle制約想定、Abadie制約想定、Guignard制約想定を元にした条件を提示する。4.2節では、提示された条件の関係性について研究しそれらが最適性に関する制約想定となっていることを述べる。また、凸最適化問題において、有名なSlater条件は制約想定ではないことも例を用いて示す。

# 論文審査結果の要旨

一般に数理最適化問題とは、与えられた制約条件の下で目的関数の値を最大（または最小）にする点やその値を求める問題である。本提出論文では、目的関数が凸関数で制約集合が凸集合であるような最適化問題を考え、制約想定と解の特徴付けを考察している。

凸最適化問題の研究において、最も重要なテーマは最適解と最適値の発見であり、そのために最適解がみたすべき性質に関する研究や、Lagrange 双対定理といった最適値に関する研究はこれまで盛んに行われてきた。Lagrange 双対定理の主張は、適切な仮定の下で、元の最適化問題とその Lagrange 双対問題の最適値が一致することを述べており、FM 呼ばれる制約想定が、全ての凸関数において Lagrange 双対性が成り立つもののうちで最弱な制約想定であることが示されている。また conical EHP と呼ばれる制約想定は、FM の十分条件であることが知られている。一方、解の特徴付けに関して、最適性条件として最も良く知られているのが KKT 条件であり、BCQ と呼ばれる制約想定が、全ての凸関数において KKT 条件が最適性の条件となることと必要かつ十分であることが示されている。しかしながら、BCQ のチェックは各実行可能解に依存し、理論的には重要な制約想定であるものの、応用面では問題も多かった。また、制約関数が凸関数でない場合の制約想定の研究において、最適性条件に関する必要かつ十分な制約想定は発見されておらず、また制約想定も網羅的には観察されていなかった。申請者はこれらの先行研究を鑑み、主として凸最適化問題に対する制約想定と解の特徴付けについて研究を行った。

本提出論文は、レフリー制度の整った国際誌に掲載済みまたは採録決定済みの4編と投稿中の1編、計5編の関連論文から構成されている。

本提出論文の構成は以下のとおりである。第1章では準備として凸解析における基本的な定義やいくつかの重要な先行研究結果を述べている。第2章では双対理論の構築の際に非常に重要となる二者択一の定理についての研究を行っている。特に、分離可能凸関数に対して、二者択一の定理が成り立つための必要かつ十分な条件を与えた。第3章では、実行可能解における BCQ の判定についての研究を行っている。Lagrange 双対性で有効であった FM や conical EHP の特徴錐と閉集合の拡張概念を用いることで、実行可能解における BCQ の同値関係を導いた。得られた研究結果は先行研究と比べて実行可能解の影響が小さくなっており、具体例を用いて有用性を説明している。第4章では、局所 Lipschitz 関数を制約にもつ凸最適化問題の制約想定と解の特徴付けについて研究を行っている。Dutta と Lalitha の先行研究を元にして、このような最適化問題に対する必要かつ十分な制約想定を発見し、また既存の制約想定との対応を明らかにし、制約想定網羅的な観察を行っている。

このように、本提出論文には十分に価値のある研究結果が含まれている。特に、いくつかの結果は、微分可能計画問題、凸計画問題などにおける既存の研究結果と並ぶ重要なものであり、申請者による研究の価値は非常に大きい。

以上の理由により、本提出論文は本研究科の課程博士の学位授与に十分に値するものと判断する。