Constraint qualifications and characterizations of solutions in convex optimization

(Abstract)

Shunsuke Yamamoto

Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering

Shimane University

March, 2016

第1章　はじめに

凸最適化問題の研究で特に重要なテーマは「Lagrange 双対定理」と「最適性条件」であり，これらに関連して，制約関数についての技術的な仮定である制約想定の研究が盛んに行われている。凸最適化における制約想定として，Slater 制約想定，Farkas Minkowski property (FM と略される)，conical epigraph hull property（conical EHP と略される），basic constraint qualification(BCQ と略される) がよく知られており，特に FM と BCQ はそれぞれ双対性，最適性に関する必要十分な制約想定である．また，双対性に関する制約想定が成り立つとき，すべての実行可能解において BCQ が成り立つことも知られている．しかしながら，FM が成り立たない場合の各点における BCQ 特徴付けはなされてこなかった．近年では，制約集合が凸集合となる局所リプシッツ制約付き凸最適化問題の最適性に関する制約想定の研究が行われている．

本論文では，FM や conical EHP を用いて各点における BCQ の判定を行い解の特徴付けと局所リプシッツ制約付き凸最適化問題の最適性に関する制約想定について考察を行う．本論文の目的は，この論文で扱う凸最適化における解の特徴付けと制約想定について議論することである．

第2章　凸最適化問題と制約想定

本論文では，次のような凸最適化問題を考える．

$$\begin{cases} \text{最小化} & f(x) \\ \quad\text{条件} & x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}, \end{cases}$$

ただし，I は添字集合，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は下半連続な真凸関数，$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} (i \in I)$ は下半連続な真関数である．本論文では，主に 3 つの凸最適化問題の制約想定と解の特徴付けについて考察している．

1 つ目は，I が有限集合，f が実数値凸関数，g_i 実数値分離可能凸関数となる凸最適化問題の二者択一の定理についてである．二者択一の定理は双対定理を示す上で重要な役割を持つ．二者択一の定理を満たすための制約想定として次のような条件を扱う．

$$\operatorname{epi} \inf_{\lambda_i \geq 0} \left(\sum_{i \in I} \lambda_i f_i \right)^* = \bigcup_{\lambda_i \geq 0} \operatorname{epi} \left(\sum_{i \in I} \lambda_i f_i \right)^*, \tag{1}$$

$$\text{ある}\delta > 0\text{が存在して,任意の } x \in B(0, \delta) \text{ と } i \in I \text{ に対して,} f_i'(0; x) = f_i(x). \tag{2}$$

2 つ目は，g_i が下半連続な真凸関数となる凸最適化問題の解の特徴付けである．凸最適化における最適性の制約想定として，次の BCQ と呼ばれる制約想定を扱い，

$$\text{(BCQ)}\ N_S(\bar{x}) = \operatorname{coneco} \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial g_i(\bar{x}).$$

双対性の制約想定として，次の FM や conical EHP と呼ばれる制約想定を扱う．

$$\text{(FM)}\ \mathrm{coneco}\bigcup_{i\in I}\mathrm{epi}g_i^* + \{0\}\times[0,+\infty)\ \text{が閉},$$

$$\text{(conical EHP)}\ \mathrm{coneco}\bigcup_{i\in I}\mathrm{epi}g_i^*\ \text{が閉}.$$

FM や conical EHP の特徴錘を用いて各点における BCQ の判定を行い解の特徴付けについて考察し，特徴錘を図示し観察を行う．

3 つ目は，I が有限集合，f が実数値凸関数，S は凸集合であるが実数値局所リプシッツ不等式制約で表現されるような凸最適化問題の制約想定について考察している．最適性に関する制約想定として次のような条件を扱う．

(A) $N_S(\bar{x}) = \mathrm{coneco}\bigcup_{i\in I(\bar{x})}\partial^\circ g_i(\bar{x})$,

(B) $T_S(\bar{x}) = \bigcap_{i\in I(\bar{x})}(\partial^\circ g_i(\bar{x})^-)$ かつ $\mathrm{coneco}\bigcup_{i\in I(\bar{x})}\partial^\circ g_i(\bar{x})$ は閉,

(C) ある $y_0\in\mathbb{R}^n$ が存在して，任意の $i\in I(\bar{x})$, $\xi_i\in\partial^\circ g_i(\bar{x})$ に対して，$\langle\xi_i, y_0\rangle < 0$,

(D) $0\notin\mathrm{co}\bigcup_{i\in I(\bar{x})}\partial^\circ g_i(\bar{x})$,

(E) $\mathrm{int}S\neq\emptyset$ かつ任意の $\forall i\in I(\bar{x})$ に対して，$0\notin\partial^\circ g_i(\bar{x})$,

(F) 以下の二条件が成立する．

  (a) ある $x_0\in\mathbb{R}^n$ が存在して， 任意の $i\in I$ に対して，$g_i(x_0)<0$,
  (b) 任意の $i\in I(\bar{x})$ に対して，$0\notin\partial^\circ g_i(\bar{x})$.

(G) 任意の $y_i\in\partial^\circ g_i(\bar{x})$ $(i\in I(\bar{x}))$ に対して，$\{y_i\}_{i\in I(\bar{x})}$ は一次独立.

第 3 章　結論

本論文では，これら 3 つの凸最適化問題に関して次のような結果を得ている．1 つ目は，(1) が分離可能凸制約付き凸最適化問題における二者択一の定理に関する必要十分な制約想定であり，(2) が f と g_i が原点を通る場合の二者択一の定理に関する必要十分な制約想定であることを示した．

2 つ目は，FM や conical EHP の特徴錘を用いて BCQ の判定を可能とする定理を示した．この定理により，BCQ の特徴付けを行えるようになり，実行可能解 $\bar{x}$ に依存する部分を少なくすることができた．また，二次凸関数や凸合成関数に主定理をそれぞれ適用し観察を行った．

3 つ目は，制約集合が凸である局所リプシッツ制約付き凸最適化問題の最適性条件について研究を行い，(A) と (B) が最適性に関する必要十分な制約想定であることを示した．また，(A) から (G) の制約想定の関係について観察した．