数学の問題を自律的に解決しようとする態度の育成に関する研究

－ヒューリスティックスに焦点をあてて－

安野　洋

Hiroshi YASUNO

Toward Building Students' Attitudes and Perspectives to Overcome Mathematical Problems

－Heuristics as a Pedagogy for Constructing Mathematical Thinking－

【 要 旨 】

本研究は，どのように問題を解決してよいかわからない子供に対して，問題解決につながりうるヒューリスティックスを「解き方がわからない問題を解決するために，解決への漠然とした方向性をもって，具体的な解決行動を起こすための方略」と定義し，中学校 2 年生がヒューリスティックスに対して，どのような意識をもっているのかを質問紙によって明らかにした。また，図形の領域において，ヒューリスティックスの育成を目指し，多様な解法のある問題において「解法を分類する活動」や，解答を発表するときに「思考過程を共有する活動」を行い，これらを実践することによる効果を検討した。その結果，これらの指導を行うことによって，既習事項と関連付けることや文字を用いることなどに関する意識が高まる効果が見られた。

【 キーワード：ヒューリスティックス，問題解決学習，問題空間の遷移，教育の無限定性 】

Ⅰ　研究の目的と方法

1　育成すべき資質・能力と教育の無限定性

2015 年 8 月 26 日に「教育課程企画特別部会 論点整理」がまとめられた（以下，「論点整理」と呼ぶ）。「論点整理」では，今後の日本の教育において目指すべき方向性が示されている。その中で，子供たちに育成すべき資質・能力の要素として，ⅰ）「何を知っているか，何ができるか（個別の知識・技能）」，ⅱ）「知っていること・できることをどう使うか（思考力・判断力・表現力等）」，ⅲ）「どのように社会・世界と関わり，よりよい人生を送るか(学びに向かう力, 人間性等)」の 3 つを挙げ，「三つの柱」として整理している。さらに，「論点整理」では，「教育課程には，発達に応じて，これら三つをバランスよくふくらませながら，子供たちが大きく成長していけるようにする役割が期待されており，教科等の文脈の中で身に付けていく力と教科横断的に身に付けていく力とを相互に関連付けながら育成していく必要がある」（p.10）と述べている。資質・能力を育成するためには，これまでのように，それぞれの教科で育む学力だけを教育の目的とするのではなく，学びの目的があくまでも資質・能力の育成にあると認識を変える必要がある。これは，「教育の無限定性」の認識と考えることができる。ここでの無限定性とは，社会学者パーソンスが提唱した 5 つのパターン変数の 1 つであり，行為の範囲が絞り込まれるのか，広くかかわろうとするのかということについて言及されている。

2　数学教育における問題解決能力

「論点整理」の「三つの柱」の 2 つ目の柱「思考

力・判断力・表現力等」では，「問題発見・解決や協働的問題解決のための思考力・判断力・表現力等」(p.11)と述べられており，問題解決能力を育成することが重要視されている。これまでの数学教育でも，問題解決学習による指導が重要視されている（例えば，Krulik & Rudnick, 1985）。人は生きていく上で，様々な問題場面に遭遇し，解決を迫られる。そのような問題を解決する過程を通して知識・技能や考え方などの習得を行う学習が問題解決学習である。しかし，このような目的で問題解決学習が行われているかというと疑問が残る。限定的な目的，すなわち，教科内容を指導することを目的とした問題解決学習にとどまっていると考えられる。したがって，子供たちは，単に問題解決の方法を憶える学習に陥りがちである。そこで，本研究では，問題解決能力育成のカギとなりうる「ヒューリスティックス」に注目する。

３　問題解決とヒューリスティックス

(1) 問題解決と問題空間

Newell & Simon（1972）は，人が問題に直面している状態を「人が何かを欲しているが，それを手に入れるために，その人がとることのできる一連の行動が即座にわからないとき」(p.72) と定義している。認知科学的な見方をすると，**図 1** に表したように，問題を解決するためには，問題が最初に与えられた状態である初期状態から，問題が解決された状態である目標状態に向け，問題空間と呼ばれる空間内において，常に状態（**図 1** 中の○印）が遷移していく。各状態においては，操作子と呼ばれる，多数の問題解決者がとりうる行動が存在する。ここで，操作子（**図 1** 中の矢印）とは「現在の知識状態から新しい知識状態を生み出す情報プロセス」(Newell & Simon, 1972: p.810)と定義される。

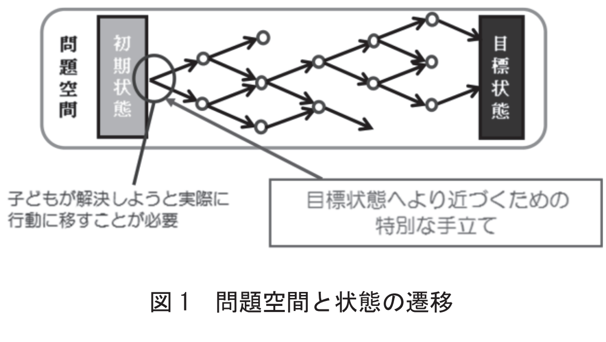

図 1　問題空間と状態の遷移

(2) 問題解決とヒューリスティックス

問題解決のためには，例えば，目標状態へより近づくと考えられる的確な行動を見いだしていくことが必要であると考えられる。その際に，自らの問題解決行動を進めるきっかけとなりうるのが，ヒューリスティックスである。

既に解き方を知っている問題は，その手順どおりに行えば必ず解決に結びつくアルゴリズムにより解決できる。それに対して，解き方が分からない問題を解決するためには，解決方法を探すことから始まるが，これをヒューリスティックス的な解決方法と呼ぶ。ここでは，いくつかのヒューリスティックスに関する先行研究を述べる。

Polya（1949）は「ヒューリスティックスは発見に役立つという意味に用いられる」(p.67) と述べている。また，Bruner（1960）は，ヒューリスティックスを「問題解決において役立つことがある方法や方略」(p.27) と説明し，Schoenfeld（1985）は「ヒューリスティック方略は問題解決を成功に導くための経験則（経験的に積み重ねられた自分なりの方略）で，より良く問題を理解したり，その解決に向けて進展したりして，個人を助ける一般的な提案である」(p.23) と述べている。

(3) ヒューリスティックスの分類

ヒューリスティックスの代表的な分類を紹介する。Tverskey &Kahneman（1974）により提唱された確率判断における主なヒューリスティックスには，「代表性」,「利用可能性」,「投錨（係留）と調整」の 3 つがある。「代表性」は，その集団の最も典型的な事象との類似性をもとに判断してしまうというもの,「利用可能性」は，よく使うものほど起こる確率が高いと考えてしまうもの,「投錨（係留）と調整」は，最初に見当をつけ，そこから調整して最終的な解を求めるものである。

シンガポールでは，ヒューリスティックスを数学教育において指導することが試みられている。シンガポールのシラバスでは，ヒューリスティックスを「解き方が明確でない問題に取り組もうとする生徒の一般的な経験則である」(Ministry of Education Singapore，2012；p.17)と説明している。このシラバスは，改良を重ねられていると考えられるが，**表 1** は，Tiong（2005a, p.3）が，シンガポールのシラバス (2001)におけるヒューリスティックスを分類したものである。シンガポールのシラバスには，**表 1** で示したとおり，13 種類のヒュー

リスティックスが挙げられており，それらのヒューリスティックスを４つの上位のヒューリスティックスに分類している。

表１　Tiongによるシンガポール・シラバスのヒューリスティックスの分類

Representation heuristics	Act it out Use a diagram/model Use equations
Simplification heuristics (Simplify the problem)	Restate the problem in another way Make suppositions Solve part of the problem Look for patterns
Generic heuristics	Think of a related problem Use guess-and-check Make a systematic list
Pathway heuristics	Work backwards Use before-after concept

(4)　ヒューリスティックスの特徴

Tversky & Kahneman（1974）は，確率判断の領域において,「ヒューリスティックスは非常に便利であるが，時々，重度で体系的なエラーにつながる」（p.1124）と述べている。場合によっては，解決者自身が誤りに気付かない錯誤を引き起こす原因になることを指摘している。

一方，Tiong（2005b, p.2）は，ヒューリスティックスの特徴として次の２つを挙げている。

① ヒューリスティックスは解決を保証しない。すべてのヒューリスティックスがするのは, 解決策を見付けることができる可能性のある方法に向かって私たちを指し示す。

② ヒューリスティックスは特別な手順を伴わない。私たちがヒューリスティックスを用いるのは, 私たちがすべきことに関して, 自分自身でいくつかの判断を迫られるときである。

このように，ヒューリスティックスを活用することのメリットも多くあると考えられる。

(5)　ヒューリスティックスの定義

以上の先行研究を参考にして，本研究では，ヒューリスティックスを「解き方がわからない問題解決するために，解決への漠然とした方向性をもって，具体的な解決行動を起こすための方略」と定義して研究を進めていく。

５　問題の所在

問題を自律的に解決できるようになるためには，解き方が分からない問題に対してヒューリスティックスを働かせて，問題解決の一歩を踏み出せるようになることが重要であり，それを数学で育成することが大切である。

日本でも，ヒューリスティックスの指導についての研究がなされている事例がある。石田(2008)は，小学生の問題解決能力向上のために,「パターン発見」方略を中心とした問題解決方略の指導についての研究を行い，明示的な問題解決方略の指導とともに，明示的な解法の「振り返り」に関わるメタ認知の指導を行うことの必要性について成果をまとめている。

しかし，数学を通したヒューリスティックスの育成について，前述のように確率などでの錯誤の研究事例はあるが，体系的な成果が得られていない。問題解決方略の直接的な指導や，授業で分からない生徒に対する助言だけでは，問題解決能力の育成は不十分であると考えられる。生徒が自ら発見的に，または協働的な活動を行う中で，ヒューリスティックスを意識して問題を解決していく経験を重ねる必要がある。

６　研究の目的

本研究では，次の２つのことを目的する。

1 つ目は，中学校のある集団を対象とし，ヒューリスティックスに対して，どのような意識をもっているのか，どのように問題を解決するのかを明らかにすることである。2 つ目は，ヒューリスティックスの育成を目指した指導を提案し，それを実践することによる効果を検討することである。

７　研究の方法

1 つ目の目的を達成するために，ある国立大学教育学部附属中学校 2 年生を対象に，質問紙を用いてヒューリスティックスについての意識を調査する。また，調査問題を用いて問題解決行動の実態を調査する。2 つ目の目的を達成するために，ヒューリスティックスの育成を目指した指導を提案し，目的１の調査と同一の集団に対して，授業

実践を行う。また，その指導の効果を検討する。

８　調査や実践に用いた題材設定

本研究では，図形問題の解決に利用することが多い「補助線の引き方」に着目した。例えば，図形の角度を求める問題で，補助線を引くことは，問題を解決へ導くために重要な役割を担っている。それは図形の中に,平行線の性質や三角形の性質,二等辺三角形や直角三角形の角度に関することなどの，既有知識と関連付けた角度を見いだすことによって，問題の状況を緩和することである。どこにどのような補助線を引くかによって，解決への道筋が決まり，引いても解決できるかどうか分からない。これらのことから，適切に「補助線を引くこと」は，ヒューリスティックスの１つであると考えることができる。補助線を引くことで問空間内の状況が変わってくるので,「補助線を引くこと」は，シンガポールのシラバスにおける④ Restate the problem in another way（他の方法で問題を修正する）の１つであると考えられる。

さらに，ヒューリスティックスの育成を目指して，中学校第２学年の図形領域「図形の調べ方」においてヒューリスティックスを取り入れた授業実践を行うこととした。

Ⅱ　生徒のヒューリスティックスに関する調査

１　生徒のヒューリスティックスに関する意識調査とその結果

中学生がヒューリスティックスに関して，どのような意識をもっているかを明らかにするために質問紙を作成し，調査を行った。

(1)　生徒のヒューリスティックスに関する意識を尋ねる質問紙の作成

質問紙の質問項目は,「ヒューリスティックス」に関する項目を 27 項目,「他の人の考え」に関する質問を 2 項目,「多様な解き方への興味」に関する質問を 1 項目作成した。さらに，PISA 調査の質問紙調査から,「数学における興味・関心や楽しみ」,「数学における道具的動機付け」に関わる項目を 4 項目ずつ加え，計 38 項目とした。これらの項目をまとめたカテゴリーを想定し，そのカテゴリー名を【　】を用いて表記する。

「ヒューリスティックス」に関する質問項目については，Tverskey & Kahneman（1974）の確率判断におけるヒューリスティックスをもとにして，【利用可能性】(1 項目）と【係留と調整】(1 項目）に関する質問項目を作成した。また，**表 1** で示したシンガポールシラバス(2001)におけるヒューリスティックスの分類をもとに，【実行する】(2 項目)，【図やモデルを使う】(3 項目)，【方程式を使う】(2 項目)，【別の方法で問題を修正する】(3 項目)，【問題の一部を解く】(1 項目)，【パターンを探す】(3 項目)，【関連問題を考える】(3 項目)，【推測と確認】(4 項目),【体系的なリストを使う】(2 項目)，【逆思考】(2 項目）の 10 カテゴリーの「ヒューリスティックス」に関する質問項目を作成した。それぞれの質問項目に関して「4.かなりあてはまる」,「3.ややあてはまる」,「2.あまりあてはまらない」,「1.全くあてはまらない」の 4 件法で調査を行うこととした。

作成した質問項目は，調査の結果得られた各質問項目に対する平均値と標準偏差, PISA の 8 つの質問項目との相関係数とともに**表 2** に示す。

(2)　調査と分析の方法

作成した質問紙による調査を，2015 年 11 月 9 日に，計 127 名を対象に実施した。欠損値や回答に偏りが見られた生徒を除いた分析対象生徒 123 名が分析対象となった。

質問項目 25，33，27，36 は，逆転項目であり，4 が最も好ましい状態を表すように値を反転した。この上で，質問項目に対して，平均値と標準偏差の算出を行った。また，各質問項目間の強さを検討するために相関係数を算出した。

(3)　調査の結果と考察

38 項目中 29 項目で，回答の平均値が 2.5 を超えており，全体的に高い。平均値が 2.5 を切った質問項目は，7 項目であった。

特に高かったのが,【体系的なリストを作る】に属する項目 11「確率の問題では，樹形図や表などを用いて解こうとする」（*m* : 3.64，*S.D.* : 0.703）であった。その要因として，前単元が確率であり，その学習効果であることが考えられる。逆に低かった項目は,【他の人の考え】に属する項目 36「他の人は, 自分より問題をうまく解決できると思う」（逆転項目，*m* : 1.71，*S.D.* : 0.797）であり，数学の問題を解くことに関する生徒の自己肯定感の低さの現れであると考えられる。【実行する】に属する項目 14「教科書の後ろの付録を作ってみたことがある」（*m* : 1.99，*S.D.* : .991）は平均値が低く，「1.全くあてはまらない」を選んだ生徒が，多かっ

表２　ヒューリスティックスに関する意識調査の質問項目及びその回答の集計結果

ヒューリスティックス	Ｎｏ	質問項目	*m* (*SD*)	「数学における興味・関心や楽しみ」「数学における道具的動機付け」との相関							
				4	12	20	28	8	16	24	32
利用可能性	25	数学の問題を解くときに，どこに目をつけてよいか分からない	2.63 (.83)	-.48 **	-.44 **	-.46 **	-.47 **	-.09	-.06	-.10	.02
保留と調整	33	数学の問題を解いているときに，１つのやり方にこだわってしまう	2.15 (.71)	.01	-.06	.00	.01	.00	-.06	.01	.10
実行する	1	空間図形の問題で，イメージしにくいときには模型を作る	2.41 (.82)	.18 †	.13	.01	-.06	.09	.15	.14	.06
	14	教科書の後ろの付録を作ってみたことがある	1.97 (.99)	.02	.10	.10	.17 †	.19 *	.19 *	.04	.24 **
図やモデルを使う	2	文章題を解くときには，図をかくようにしている	2.94 (.73)	.00	.17 †	.09	.04	.06	.07	.19 *	-.02
	36	関数の問題を解くときには，グラフをかくようにしている	2.59 (.76)	-.02	.00	.01	-.15 †	-.03	.10	.12	.02
	37	分かっていることを図に書き込むようにしている	3.44 (.68)	.11	.28 **	.16 †	.19 *	.10	.17 †	.12	.11
方程式を使う	3	関数の問題を解くときには，式に表して考えるようにしている	3.37 (.64)	.17 †	.21 *	.37 **	.21 *	.25 **	.21 *	.16 †	.17 †
	27	文章題は，なるべく文字式を使わないで解こうとする	2.80 (.77)	.04	.03	.00	-.07	.11	.05	-.08	.11
別の方法で問題を修正する	5	１つの解き方で解いたら，他に方法がないか探す	2.50 (.75)	.34 **	.37 **	.39 **	.34 **	.40 **	.25 **	.20 *	.30 **
	17	もっと簡単に解けないか考えようとしている	3.47 (.67)	.19 *	.26 **	.31 **	.34 **	.07	.10	.26 **	.12
	29	他の人が思いつかない解き方を考えようとしている	2.36 (.88)	.33 **	.38 **	.44 **	.40 **	.37 **	.25 *	.19 *	.28 **
問題の一部を解く	19	整数の説明問題では，文字式で考える前に具体的な数で考える	3.07 (.78)	.19 *	.12	.17 †	-.01	.07	.02	.16 †	.05
パターンを探す	6	ある図形で成り立つ性質が，他の図形にも当てはまるか考える	2.74 (.78)	.30 **	.33 **	.33 **	.33 **	.37 **	.23 *	.13	.27 **
	30	数が並んでいたら，それらの数の間に関係がないか調べる	3.12 (.82)	.33 **	.26 **	.32 **	.20 *	.30 **	.22 *	.13	.28 **
	35	問題が解けたら，条件を変えて問題を解きなおす	2.28 (.77)	.20 *	.24 **	.28 **	.15 †	.16 †	.14	.24 *	.15
関連問題を考える	7	解き方がすぐに分からない問題を解くときに，前に分かっている結果が使えないか考える	3.30 (.72)	-.06	.05	.05	-.07	.08	.13	.06	.11
	9	問題を解いてうまくいかないときは，他の単元で習ったことが使えないか考える	2.91 (.74)	.18 *	.30 **	.32 **	.31 **	.16 †	.16 †	.25 **	.18 †
	21	これまでに解いた問題に，似たものがないか考える	3.17 (.73)	.16 †	.15	.19 *	.19 *	.08	.16 †	.18 *	.17 †
推測と確認	10	問題を解くときに，答えの予想を立ててから考える	2.58 (.79)	.09	.31 **	.26 **	.20 *	.06	.07	.05	-.04
	22	問題を解くときに，ひらめいたことが答えを出すことに役立つことがよくある	3.11 (.82)	.29 **	.36 **	.43 **	.31 **	.25 **	.14	.38 **	.27 **
	34	問題を解くときに，問題の答えの見当をつけてから，それが正しいことを確かめていく	2.66 (.80)	.12	.26 **	.30 **	.21 *	.26 **	.30 **	.29 **	.23 *
	38	問題を解くときに，いろいろな方法で試行錯誤して考えている	3.10 (.71)	.29 **	.25 **	.32 **	.22 *	.24 **	.20 *	.20 *	.29 **
体系的なリストを作る	11	確率の問題では，樹形図や表などを用いて解こうとする	3.64 (.70)	-.13	-.13	-.06	-.20 *	.08	.13	-.05	.10
	23	関数の問題を解くときには，表をかくようにしている	2.50 (.77)	.08	.10	.10	-.07	-.03	.07	.28 *	.08
逆思考	15	問題の結果を予想してからそうなるような式を立てることがある	2.59 (.69)	.31 **	.27 **	.31 **	.28 **	.27 **	.30 **	.31 **	.21 *
	31	結果を言うためには何が言えればよいのかを考える	2.87 (.74)	.27 **	.36 **	.31 **	.28 **	.17 †	.19 *	.12	.10
他の人の考え	18	他の人の解き方が気になる	3.52 (.72)	.09	.01	.06	.00	-.05	.04	.03	.07
	36	他の人は，自分より問題をうまく解決できると思う	1.71 (.80)	-.20 *	-.12	-.08	-.19 *	.04	.10	-.00	.04
多様な解き方への興味	13	１つの問題について，できるだけ多くの解き方を知りたい	3.11 (.83)	.26 **	.36 **	.37 **	.37 **	.25 **	.25 **	.21 *	.32 **
数学における興味・関心や楽しみ	4	数学についての本を読むのが好きである	2.19 (1.00)	—	.57 **	.57 **	.62 **	.34 **	.25 **	.24 **	.31 **
	12	数学の授業が楽しみである	2.88 (.82)	.57 **	—	.81 **	.73 **	.38 **	.34 **	.36 **	.27 **
	20	楽しいから数学を勉強する	2.74 (.89)	.57 **	.81 **	—	.71 **	.33 **	.31 **	.37 **	.34 **
	28	数学で学ぶ内容に興味がある	2.93 (.80)	.62 **	.73 **	.71 **	—	.33 **	.31 **	.33 **	.33 **
数学における道具的動機付け	8	数学は，将来就きたい仕事に役立ちそうだから頑張る	2.95 (.82)	.34 **	.38 **	.33 **	.33 **	—	.68 **	.48 **	.74 **
	16	将来の可能性を広げるから数学を頑張る	3.10 (.75)	.25 **	.34 **	.31 **	.31 **	.68 **	—	.53 **	.65 **
	24	勉強したいことに数学が必要だから頑張る	2.78 (.80)	.24 **	.36 **	.37 **	.33 **	.48 **	.53 **	—	.48 **
	32	数学を学んで就職に役立てたい	2.93 (.77)	.31 **	.27 **	.34 **	.33 **	.74 **	.65 **	.48 **	—

† : $p<.1$, * : $p<.05$, ** : $p<.01$

た。近年の数学科教科書は，創意工夫がなされ，教科書の巻末に自ら作って学べる教具が掲載されているが，実際に作ってみたことがある人は少ないことが伺える。

次に，ヒューリスティックスに関する意識調査と PISA の 8 つの質問項目との相関関係について考察する。【利用可能性】に属する項目 25「数学の問題を解くときに，どこに目をつけてよいのか分からない」は PISA における【数学における興味・関心や楽しみ】の全ての項目と負の相関が見られた。すなわち，数学に対する内発的動機付けと問題解決に向けて着眼できることは密接に関わっていることがわかる。したがって，次章で提案するヒューリスティックスの指導は，内発的動機付けを高める効果も期待される。

2　中学生の問題解決行動の実態調査

(1) 調査の目的

本調査の目的は，実際に中学生が問題空間をどのように遷移して，問題の解決に結びついたかを把握することである。また，ヒューリスティックスは，きわめて短時間のうちに問題解決に向けてとる方略と考えられるので，問題空間の遷移に要した時間を把握する必要がある。そこで，以下の方法により，1 分の精度での，問題解決行動と開始してからの経過時間を変数として設定する。

(2) 調査方法

調査対象者は, 前述の質問紙調査と同様である。調査は 2015 年 12 月 3，4 日に実施し，調査の授業には，合計 122 人の生徒が参加した。本調査に用いた「平行線にできる角度の問題」を**図 2** に示す。

この問題は, $\angle x$ を求めることが目的であるが, 複数のアプローチがあり，それまでに学習した平行線の性質などを用いることで問題解決に結びつくと考えられる。

目的に述べたように，通常，時間を変数とするこのような調査では，ビデオによる録画などを用いて質的に分析されることが多い。しかし，調査対象者数を多くできないという欠点もあわせもつ。そこで，より大人数での調査を実施するために，次の方法で行った。まず，調査対象者に 5 色のペンを準備してもらった。調査開始後は, 調査者が, 1 分ごとに時間の経過を調査対象者に伝える。その度に，調査対象者は，ペンの色を変えて問題を解く際に考えたことや考え方を記述した。以上のように，1 分毎にペンの色を変えて解く活動を計 8 分間行う。その後，ワークシートの端に，利用したペンの色の順を記入してもらうことで，1 分毎に使用したペンの色が分かるようにした。

なお，ワークシートには，問題に使用する図を複数準備しておき，1 つの方法でうまくいかない場合でも次の図を用いて，それまでの解き方を消さずに後からわかるように配慮した。1 つの方法で解き終えたら他の方法でも解くように指示した。

分析は，生徒が最初に問題を解決するまでにかかった時間の集計を行った。なお，既に問題の解決方法を知っている場合には，ヒューリスティックスが働いているとは考えにくいことから，この問題を既に知っていたかどうかについても調査し，既に知っていた人と，知らなかった人について分けて分析を行った。

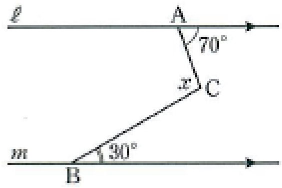

図 2　平行線にできる角度の問題

(3) 調査の結果と考察

まず,「平行線にできる角度の問題」を知っていたかどうかについて尋ねたところ，問題を知っている生徒は，122 名中 75 名（61.5%）であった。

次に,「平行線にできる角度の問題」を解決するまでにかかった所要時間について集計した表を**表 3** に示す。本問題を既に知っていた生徒の平均は 1.09 分である一方，知らなかった生徒の平均は 2.05 分であり，知っていた生徒の倍ほど時間がかかっていた。

生徒がどのようなアプローチを用いて解決しようとしたのかについて集計した表を**表 4** に示す。データの精度は 1 分毎であるため，どの補助線から引き始めたか分からないアプローチについては,「複数」として集計を行った。また，時間内に解決できなかった生徒は「未解決」とした。この結果，直線ℓ，m の平行線を引き，平行線の錯角が等しいことを用いて解決した生徒が多かった。本問題を既に知っていた生徒，知らなかった生徒合わせて 71.3%の生徒がこのアプローチで解いていた。本問題を知らなかった生徒も，22 人（46.9%）がこのアプローチにより解決へ至った。次に多かったアプローチは，平行線内の折れている線分を延

長して，三角形を作る解き方であった。また，上側に向かって延長させるより，下側に向かって延長させる方が多かった。このことからは，下に向かって引く延長線の方が見つけやすい，または，引きやすいことが考えられる。

そして，本問題を知らなかった生徒の方が，アプローチのバリエーションが多かった。また，複数の補助線を引いて解決に至っているのも，本問題を知らなかった生徒にのみ見られた。

(4) 結論

調査問題において，本問題を知らなかった生徒は，問題を解決するために，補助線を引くなどして試行錯誤していることが分かった。その際には，既習事項である平行線の性質や，三角形の内角・外角などに結びつけて考える様子がうかがえた。問題の性質から，ヒューリスティックス【別の方法で問題を修正する】を自然と用いて，問題の解決に繋げていた。【別の方法で問題を修正する】は，違った角度や視点（見通し）から問題を見ようとするヒューリスティックスである。

短時間で解決に向かう生徒がいる一方，一部の生徒は，時間がかかりながらも，問題を解決できていた。授業中の問題解決場面では，ある程度の生徒ができた段階で，教師は思考する時間を打ち切り，答え合わせや解説などを行うことが多いと考えられる。しかし，時間さえかければ解くことができる生徒にとっては，解決時間を打ち切られることで，自分はできないという意識をもってしまうと考えられる。このことがくり返されることで，数学が苦手になってしまっているのではないかと考えられる。

Ⅲ　ヒューリスティックス育成に向けた指導の実践

１　検討した指導内容

解き方が分からない問題を解決するためには，うまくヒューリスティックスを働かせ，問題解決の方向性を決められるようにならなくてはならない。そこで，中学校第２学年「図形の調べ方」において授業実践を行い，ヒューリスティックスに関する生徒の意識に変化が生じたかどうか質問紙を用いて検討する。様々な問題解決のためのアプローチがある問題で，解き方をたくさん取り上げ，どのようなアプローチで解決しているかに着目し，クラス全体で「分類する活動」を行う。分類することによって，問題を解決することができた考え方に着目する。その結果，角度を求める問題に対して，問題を解決するための第一歩を踏み出せるようになるのではないかと考える。これらの問題

表３　「平行線にできる角度問題」最初に問題を解決するまでにかかった時間

時間(分)		1	2	3	4	5	6	7	8	未解決	合計	平均(分)
既知	人数(人)	68	7								75	1.09
	割合(%)	90.7	9.3								100	
未知	人数(人)	24	9	6	2		1		2	3	47	2.05
	割合(%)	51.1	19.1	12.8	4.2		2.1		4.3	6.4	100	
合計	人数(人)	92	16	6	2		1		2	3	122	1.45
	割合(%)	75.4	13.1	4.9	1.6		0.8		1.6	2.5	100	

※「既知」は本問題を知っていた生徒，「未知」は本問題を知らなかった生徒を示す

表４　「平行線にできる角度の問題」解決した解き方（人）（( )内は割合）

アプローチ		計算	平行線		三角形(上側)		三角形(下側)		垂線		複数	未解決	合計
		のみ	錯角	同側内角	同位角	錯角	同位角	錯角	三角形	四角形			
既知	人数(人)	3	65	1		1	2	3					75
	割合(%)	4.0	86.7	1.3		1.3	2.7	4.0					100
未知	人数(人)		22		1	2	1	11	1	1	5	3	47
	割合(%)		46.9		2.1	4.3	2.1	23.4	2.1	2.1	10.6	6.4	100
合計	人数(人)	3	87	1	1	3	3	14	1	1	5	3	122
	割合(%)	2.5	71.2	0.8	0.8	2.5	2.5	11.5	0.8	0.8	4.1	2.5	100

※「既知」は本問題を知っていた生徒，「未知」は本問題を知らなかった生徒を示す

は，角度を求めるために引く補助線の引き方が，「平行線の性質を利用するため」や「三角形を作るための」であることが多い。発表された解き方を分類する中で，どのような目的でその「補助線」を引いているのかを意識することにより，「何となく」から「見通しをもって引く」ようになることを目指す。

また，授業において，解決に向けてどのように考えていったのか，教師が問いかける働きかけを行い，発表した生徒の解決までの思考過程を共有する活動を行う。クラスの友達の思考過程を知ることによって，数学が苦手な生徒が，「同じように考えていた」や「もう一歩だった」などの感想をもち，次の問題を解くときの動機付けになることが期待される。他の人がどこの部分に着目して，どう考えたか知ることで，その解決への方略を知ることもできると考える。

以上の 2 つの活動，すなわち，問題解決のアプローチを「分類する活動」および，解決に向けてどのように考えたのか，教師が問いかける働きかけを行い，生徒が問題を解決するまでの「思考過程を共有する活動」を行うことによって，ヒューリスティックスに関する生徒の意識に変化が生じたかどうか質問紙を用いて検討する。

2　方法

Ⅱ章において行った生徒のヒューリスティックスに関する調査を行った対象と同一の集団を実験群と統制群の 2 つのグループに分け，実験群において 1 節で述べた 2 つの活動を行った。実験群，統制群ともに，問題の図を自分で作図して学習を進めた。また，考える時間と，伝える時間を確保し，ペアに伝える活動を行った。全体で発表する際には，ICT（書画カメラ，プロジェクターなど）を活用した。前時までに学習した内容のまとめを黒板に掲示し，既習事項を用いやすいようにした。

実験群 64 名，統制群 61 名，計 125 名であった。活動前においては，Ⅱ章において行った生徒のヒューリスティックスに関する調査の結果を使用して事前調査とした。活動は 2015 年 12 月 15～17 日に行った。

単元終了後に事後調査を行い，事前調査と比較した。なお，事後調査では，数学における興味・関心や楽しみ，数学における道具的動機付けに関する項目を除いた 30 項目についての質問紙調査を行った。事後調査は，2015 年 12 月 15～17 日に行った。

以下の分析では，事前調査，事後調査の両方に回答した生徒を分析対象とすることとした。その結果，分析対象となったのは，実験群 60 名，統制群 58 名，計 118 名であった。

授業実践による実験群と統制群の各質問項目の平均値の変化を見るために，実験群・統制群を 1 つの要因（以下，指導方法要因と呼ぶ）とし，指導の前・後の要因を 1 つの要因（以下，事前・事後要因と呼ぶ）とする 2 要因分散分析を行う。これにより，ヒューリスティックスに関する意識の変化が，指導の違いによるものか，図形の学習をすること自体の効果によるものかをはっきりさせることができる。

3　結果と考察

各質問項目の平均値について，指導方法要因及び事前・事後要因の 2 要因分散分析を行った結果を**表 5** に示す。No は質問紙の番号を，No 網掛けは，逆転項目を表す。2 要因分散分析の結果から，「解き方を分類する活動」および，「思考過程を共有する活動」を行ったことによる効果と考えられることを 4 つ挙げる。

第一に，実験群において，【方程式を使う】に属する質問項目 27「文章題は，なるべく文字式を使わないで解こうとする」の交互作用が有意であったことから，問題を解決するために，文字や文字式を用いて考えるようになると考えられる。

第二に，【関連問題を考える】に属する質問項目 7「解き方がすぐに分からない問題を解くときに，前に分かっている結果が使えないか考える」や，質問項目 9「問題を解いてうまくいかないときは，他の単元で習ったことが使えないか考える」の交互作用が有意であったことから，それまでに習ったことと関連付ける力が育成されたと考えることができる。そして，これは，利用可能性ヒューリスティックスの働きが促進されたと考えることができる。

第三に，【推測と確認】に属する質問項目 10「問題を解くときに，答えの予想を立ててから考える」については，統制群の方が，交互作用が有意であったことから，2 つの活動を行うことによって，予想を立てることに関して，効果を抑える何らかの要因があったと考えられる。

表５　指導方法要因及び事前・事後要因の２要因の分散分析の結果

Ｎｏ	質　問　項　目	群	*m*（*SD*） 事前調査	事後調査	F値 事前・事後要因	指導方法要因	事前・事後×指導方法
利用可能性							
25	数学の問題を解くときに，どこに目をつけてよいか分からない	実験	2.72（.85）	2.77（.75）	1.88	0.87	0.32
		統制	2.55（.84）	2.67（.87）			
保留と調整							
33	数学の問題を解いているときに，１つのやり方にこだわってしまう	実験	2.23（.67）	2.18（.83）	2.74	0.93	0.93
		統制	2.09（.76）	1.90（.83）			
実行する							
1	空間図形の問題で，イメージしにくいときには模型を作る	実験	2.37（.84）	2.25（.91）	2.32	0.01	0.01
		統制	2.45（.82）	2.34（.83）			
14	教科書の後ろの付録を作ってみたことがある	実験	1.93（1.04）	1.85（.99）	4.44＊	0.02	1.05
		統制	2.03（.97）	1.79（.97）			
図やモデルを使う							
2	文章題を解くときには，図をかくようにしている	実験	2.98（.77）	3.05（.81）	1.86	0.02	0.09
		統制	2.95（.66）	3.05（.66）			
24	関数の問題を解くときには，グラフをかくようにしている	実験	2.53（.77）	2.48（.83）	0.01	1.57	0.30
		統制	2.66（.76）	2.69（.92）			
37	分かっていることを図に書き込むようにしている	実験	3.38（.74）	3.55（.68）	15.41＊＊	0.90	0.52
		統制	3.45（.63）	3.69（.54）			
方程式を使う							
3	関数の問題を解くときには，式に表して考えるようにしている	実験	3.40（.64）	3.50（.65）	2.49	0.28	0.00
		統制	3.34（.66）	3.45（.65）			
27	文章題は，なるべく文字式を使わないで解こうとする	実験	2.05（.70）	3.03（.76）	41.91＊＊	0.02	4.89＊＊
		統制	2.31（.75）	2.79（.77）			
別の方法で問題を修正する							
5	１つの解き方で解いたら，他に方法がないか探す	実験	2.55（.72）	2.60（.76）	3.04†	0.04	1.13
		統制	2.45（.77）	2.66（.79）			
17	もっと簡単に解けないか考えようとしている	実験	3.35（.71）	3.35（.76）	0.58	1.87	0.58
		統制	3.55（.63）	3.45（.71）			
29	他の人が思いつかない解き方を考えようとしている	実験	2.35（.88）	2.38（.98）	1.75	0.53	3.05†
		統制	2.38（.88）	2.14（.91）			
問題の一部を解く							
19	整数の説明問題では，文字式で考える前に具体的な数で考える	実験	3.03（.74）	3.08（.79）	0.69	0.20	0.05
		統制	3.07（.81）	3.16（.83）			
パターンを探す							
6	ある図形で成り立つ性質が，他の図形にも当てはまるか考える	実験	2.72（.78）	3.08（.81）	19.59＊＊	0.17	0.83
		統制	2.72（.77）	2.97（.88）			
30	数が並んでいたら，それらの数の間に関係がないか調べる	実験	3.13（.75）	3.33（.82）	1.96	1.12	1.38
		統制	3.09（.90）	3.10（.83）			
35	問題が解けたら，条件を変えて問題を解きなおす	実験	2.30（.79）	2.50（.79）	4.10＊	0.70	0.25
		統制	2.24（.76）	2.36（.79）			
関連問題を考える							
7	解き方がすぐに分からない問題を解くときに，前に分かっている結果が使えないか考える	実験	3.28（.69）	3.58（.62）	3.53†	1.51	4.44＊
		統制	3.31（.75）	3.29（.77）			
9	問題を解いてうまくいかないときは，他の単元で習ったことが使えないか考える	実験	2.82（.70）	3.08（.85）	1.21	0.04	4.62＊
		統制	3.02（.76）	2.93（.84）			
21	これまでに解いた問題に，似たものがないか考える	実験	3.10（.75）	3.30（.74）	0.24	0.03	3.83†
		統制	3.24（.71）	3.12（.82）			
推測と確認							
10	問題を解くときに，答えの予想を立ててから考える	実験	2.58（.79）	2.50（.87）	1.15	0.84	4.36＊
		統制	2.53（.80）	2.79（.93）			
22	問題を解くときに，ひらめいたことが答えを出すことに役立つことがよくある	実験	3.03（.88）	3.17（.92）	2.72	0.77	0.01
		統制	3.16（.77）	3.28（.72）			
34	問題を解くときに，問題の答えの見当をつけてから，それが正しいことを確かめていく	実験	2.60（.89）	2.78（.85）	2.63	0.31	0.54
		統制	2.72（.72）	2.79（.64）			
38	問題を解くときに，いろいろな方法で試行錯誤して考えている	実験	3.07（.71）	3.23（.77）	1.61	0.08	0.69
		統制	3.10（.72）	3.14（.69）			
体系的なリストを作る							
11	確率の問題では，樹形図や表などを用いて解こうとする	実験	3.65（.73）	3.65（.69）	0.03	0.01	0.03
		統制	3.67（.66）	3.66（.66）			
23	関数の問題を解くときには，表をかくようにしている	実験	2.40（.74）	2.45（.79）	1.12	3.67†	0.19
		統制	2.60（.79）	2.72（.89）			
逆思考							
15	問題の結果を予想してからそうなるような式を立てることがある	実験	2.50（.65）	2.43（.93）	0.37	1.84	0.04
		統制	2.64（.72）	2.60（.72）			
31	結果を言うためには何が言えればよいのかを考える	実験	2.82（.73）	3.22（.72）	18.02＊＊	0.00	1.83
		統制	2.91（.78）	3.12（.70）			
他の人の考え							
18	他の人の解き方が気になる	実験	3.38（.83）	3.58（.67）	1.49	1.40	4.30＊
		統制	3.64（.58）	3.59（.59）			
36	他の人は，自分より問題をうまく解決できると思う	実験	1.78（.83）	1.53（.77）	1.41	0.03	4.40＊
		統制	1.64（.79）	1.72（.85）			
多様な解き方への興味							
13	１つの問題について，できるだけ多くの解き方を知りたい	実験	3.03（.86）	3.23（.93）	1.26	0.01	1.78
		統制	3.16（.81）	3.14（.81）			

NO 網掛けは逆転項目を表す

†：ｐ＜.1，＊：ｐ＜.05，＊＊：ｐ＜.01

第四に，実験群において，交互作用が有意であった【他の人の考え】に属する質問項目 18「他の人の解き方が気になる」，質問項目 36「他の人は，自分より問題をうまく解決できると思う」の結果から，今回の実践を行ったことによって，他の人の解き方に興味をもつようになったことと，他の人の方が自分より問題をうまく解くと，より感じさせてしまうということが分かった。

また，今回調査で行った問題において，問題解決に用いられていると考えていた【別の方法で問題を修正する】に関しては，交互作用・主効果ともに有意ではなかった。これは，生徒にとって，問題を「修正している」という意識がなかったからだと考えられる。

４　結論

中学校第 2 学年「図形の調べ方」の単元において，問題解決のアプローチをを「分類する活動」を行い，平行線や三角形の性質を使うために，平行線や三角形を作る補助線を引いていることを共有したり，どのようにその解法を思いついたか「思考過程を共有する活動」を行ったりしたことによって，次の 4 つのことが明らかになった。1 つ目に，文字や文字式を利用しようとする。2 つ目に，習ったことと関連づける力が育成される。3 つ目に，予想を立てることに関して，効果を抑える何らかの要因がある。4 つ目に，他の人の考えに興味をもち，他の人の方が自分より問題をうまく解くと，より感じさせてしまう。

Ⅳ　研究のまとめと今後の課題

本研究の目的は，問題解決のきっかけとなりうるヒューリスティックスに着目して，中学校 2 年生がヒューリスティックスに対して，どのような意識をもっているのかを明らかにすること及び，ヒューリスティックスの育成を目指した指導を提案し，それを実践することによる効果を検討することであった。

「図形の調べ方」において，「分類する活動」及び「思考過程を共有する活動」を行うことによって「関連付ける」などの既習事項を用いるヒューリスティックスに関わる意識の変化が見られた。

今後の課題として，次の 3 つが挙げられる。1 つ目に，図形領域以外で，ヒューリスティックスに対する生徒の意識を明らかにすることである。その領域のみで用いられるもの，どの領域でも用いられるものなど，その特徴をより明らかにしていく必要がある。最終的には，独自にヒューリスティックスの分類を行いたいと考えている。2 つ目に，授業実践で，「分類する活動」及び「思考過程を共有する活動」を行ったが，他領域において，同じ活動を行うことでどのような効果が得られるか検証する必要がある。これらの活動以外にヒューリスティックスを育むためにどのような活動が有効か実践検証する必要もある。3 つ目に，ヒューリスティックスに対する意識を捉えるための質問紙の精度をあげることである。もう一度，質問紙を見直し，より良いものを作成する必要がある。

【謝辞】

本研究をご指導いただいた御園真史先生をはじめ，島根大学の関係の皆様，ご協力くださった所属校の皆様には心から感謝の気持ちとお礼を申し上げます。

【引用・参考文献】

[1] Bruner, J. S., (1966), *The process of education*, HARVARD UNIVERSITY PRESS.

[2] 石田淳一, (2008), 算数科における「パターン発見」方略の指導に関する実証的研究－問題解決指導の充実・発展のためにー, 大学教育出版, p.37.

[3] Krulik, S. and Rudnick, J. A.（著），伊藤説朗（訳・解説）（1985），算数・数学科 問題解決指導ハンドブック，明治図書出版.

[4] 教育課程企画特別部会, (2015), 論点整理, p.10, 11. http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2015/12/11/1361110.pdf , 2016/1/31 確認.

[5] Ministry of Education Singapore, (2012), *Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus,* p.17.

[6] Newell, A. & Simon, H. A., (1972), *Human Problem Solving*, Prentice-Hall.

[7] Polya, G., 柿内賢信訳, (1949), いかにして問題を解くか, 丸善, p.67.

[8] Parsons, T. & Shils, E. A. (編著), 永井道雄ほか (訳), (1960), 行為の総合理論を目指して, 日本評論社.

[9] Schoenfeld, A. H., (1985), *Mathematical problem solving*, ACADEMIC PRESS.

[10] Tiong, Y. S. J., (2005a), *A Metacognitive Approach to Support Heuristic Solution of Mathematical Problems*, NIE Singapore.

[11] Tiong, Y. S. J., (2005b), *Top-Down Approach to Teaching Problem Solving Heuristics in Mathematics*, NIE Singapore.

[12] Tversky, A. & Kahneman, D., (1974), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*, Science, Vol.185, p.1124-1131.