

ロボット・マニピュレータの 省エネルギー運転法

泉 照之

電子制御システム工学科

Operation of Robot Manipulator with Minimized Dissipative Energy

Teruyuki IZUMI

Electronic and Control Systems Engineering

(Received September 19, 1997)

Abstract

With the depletion of global energy resources, saving energy has become an important aspect in design of energy consuming equipment. Hence, this paper deals with the determination of the optimal trajectory which can minimize the dissipated energy in an articulated manipulator.

In a horizontally articulated manipulator without friction, the optimal trajectory is found out globally. It is proved that the dissipated energy is monotonously decreased against the operating time in case of zero non-linear-friction, therefore the optimal operating time does not exist. Since a vertically articulated manipulator system is highly non-linear due to gravity and an analytical solution can not be found. Therefore, the system is first linearized around various equilibrium points and the existence of an optimal time is investigated theoretically. The theoretical results and simulations show that an optimal operating time exists when the first link of the manipulator traverses the stable equilibrium point and that it does not exist when the first link traverses the unstable equilibrium point. Finally, the optimal trajectory of the manipulator constrained by an obstacle is obtained.

1. ま え が き

地球上のエネルギー資源の枯渇が指摘されてかなりの年月を経た。また、化石燃料の消費による地球の温暖化や、巨大エネルギーの発生にともなう熱汚染が、地球の環境に悪影響をもたらすことに我々は気づき始めた。したがって、省エネルギーのための努力が各工学分野で懸命になされている。

一方、ロボット・マニピュレータは情報機器としての機能に目が向けられ勝ちで、従来その操作性や制御性を高める研究が主であった。たとえば、マニピュレータが決められた2点を繰り返し往復運動する軌道は、作業性を高めるために動作時間に注目した評価関数のもとで最適化されている¹⁻⁵⁾。また、評価関数の中に時間の項だけでなく、エネルギーも含めて最適化する研究もある⁶⁻⁸⁾。それらに対して、エネルギーだけを取り上げた報告もある^{9,10)}が、いずれも関節可動角度の制約など既存のマニピュレータが持つ様々な拘束条件のもとで

最適軌道を求めている。したがって、これらの軌道は現実的であるが、局所的な最適化であるために省エネルギー効果は大きくない。真に省エネルギーを目指すためには、まず制約条件を付けない条件で、消費エネルギーが最小になるような最適軌道を大域的に探索し、その軌道が実現されるようにマニピュレータを設計したり、動作環境を可能な限り整備すべきである。

本稿は、マニピュレータを少ないエネルギーで運転させることを目的とし、アクチュエータの入力や関節速度や角度に制限を付けずに、PTP制御されるときアクチュエータでの消費エネルギーを最小にする最適軌道や最適動作時間について検討する。最初に水平多関節形マニピュレータの第2関節を遠回りさせるように逆回転させれば相当に消費エネルギーが節約できることを示す¹¹⁾。もし、非線形摩擦力が存在しなければ、アクチュエータでの消費エネルギーは動作時間の3乗¹³⁾や1乗に逆比例するので、最適動作時間は存在しないことを導く。非線形摩擦力がある場合、最適動作時間が存在し、それを求める方法を示す。つぎに、重力の影響を受ける垂直多関節形マニピュレータ¹⁴⁾において最適動作時間について検討する。そのために、概略与えられた複数個の空間経路において、マニピュレータの運動方程式を線形化して、最適動作時間の存在性を理論的に議論する。その中で、最適動作時間が存在する空間経路を示し、その最適軌道における消費エネルギー値を計算する。そして、動作時間の選択によって大きな省エネルギー効果があることを指摘する¹⁵⁾。最後に、マニピュレータが障害物を回避するような状態拘束を受ける場合の最小エネルギー軌道を求め、障害物の回避に伴うエネルギー増加を警告する。

2. マニピュレータの運動方程式と消費エネルギー

n 関節からなるマニピュレータの角度ベクトルを $\theta(t) = [\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)]^T$ 、角速度ベクトルを $\dot{\theta}(t) = [\dot{\theta}_1(t), \dots, \dot{\theta}_n(t)]^T$ とする。マニピュレータの運動方程式は、慣性行列を $H(\theta(t))$ 、遠心力とコリオリ力を $C(\theta(t), \dot{\theta}(t))$ 、線形摩擦力を $F_l \dot{\theta}(t)$ 、非線形摩擦力を $F_n(\dot{\theta}(t))$ 、重力を $G(\theta(t))$ とすれば、

$$H(\theta(t))\ddot{\theta}(t) + C(\theta(t), \dot{\theta}(t)) + F_l \dot{\theta}(t) + F_n(\dot{\theta}(t)) + G(\theta(t)) = K\mathbf{i}(t) \quad (1)$$

と表される。ここで、 $K = \text{diag}(K_1, \dots, K_n)$ はトルク定数行列を、 $\mathbf{i}(t) = [i_1(t), \dots, i_n(t)]^T$ は各関節を駆動するDCモータの電機子電流を示す。モータの端子電圧 $v(t)$ は、 $R = \text{diag}(R_1, \dots, R_n)$ を電機子抵抗、 v_0 をチョップ回路を構成する半導体素子の順方向電圧降下ベクトルとすれば、

$$v(t) = R\mathbf{i}(t) + v_0(\mathbf{i}(t)) + K\dot{\theta}(t) \quad (2)$$

で表わされる。このときのモータへの入力電力は、 $p(t) = v(t)^T \mathbf{i}(t)$ であるから、

$$p(t) = \mathbf{i}(t)^T R \mathbf{i}(t) + v_0(\mathbf{i}(t))^T \mathbf{i}(t) + \dot{\theta}(t)^T \{F_n(\dot{\theta}(t)) + F_l \dot{\theta}(t)\} + \dot{\theta}(t)^T \{H(\theta(t))\ddot{\theta}(t) + C(\theta(t), \dot{\theta}(t))\} + \dot{\theta}(t)^T G(\theta(t)) \quad (3)$$

となる。この式の右辺第4項目は、つぎのように運動エネルギー関数の微分に等しく

$$\dot{\theta}(t)^T \{ \mathbf{H}(\theta(t)) \ddot{\theta}(t) + \mathbf{C}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\theta}(t)^T \mathbf{H}(\theta(t)) \dot{\theta}(t) \quad (4)$$

と変形できる。PTP制御における初期と最終速度は零であるから、時刻0から t_f までの式(4)の積分値 J_k は、次式のように0となる。

$$\begin{aligned} J_k &= \int_0^{t_f} \dot{\theta}(t)^T \{ \mathbf{H}(\theta(t)) \ddot{\theta}(t) + \mathbf{C}(\theta(t), \dot{\theta}(t)) \} dt \\ &= \frac{1}{2} [\dot{\theta}(t)^T \mathbf{H}(\theta(t)) \dot{\theta}(t)]_{t=0}^{t=t_f} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

また、式(3)の右辺第5項目の0から t_f までの積分値 J_p は、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} J_p &= \int_0^{t_f} \dot{\theta}(t)^T \mathbf{G}(\theta(t)) dt = \int_0^{t_f} \mathbf{G}(\theta(t))^T \frac{d\theta(t)}{dt} dt = \int_{\theta_0}^{\theta_f} \mathbf{G}(\theta)^T d\theta \\ &= G_I(\theta_f) - G_I(\theta_0) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $G_I(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} G_1(\theta) d\theta_1 + \int_{\theta_0}^{\theta} G_2(\theta) d\theta_2$ である。 J_p は $\theta_0 = \theta_f$ の場合を除き0ではないが、マニピュレータの繰り返し動作における角度ベクトルは、 $\theta_0 \rightarrow \theta_f \rightarrow \theta_f \rightarrow \theta_0$ と変化するもので、繰り返し動作の1サイクルでは $J_p = 0$ となる。一方、式(3)の右辺第2項目を無視すると、マニピュレータで消費されるエネルギーは、

$$J = \int_0^{t_f} [\mathbf{i}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{i}(t) + \dot{\theta}(t)^T \{ \mathbf{F}_n(\dot{\theta}(t)) + \mathbf{F}_l \dot{\theta}(t) \}] dt \quad (7)$$

となり、熱損失だけとなる。以上のことは、リンクの減速時や重力方向への運動時、モータが発電機となり、その発電電力がチョップ回路で100%回生されることによって実現できる¹²⁾。本論文は、これらの抵抗による熱損失エネルギーを最小にする最適動作時間 t_f や最適電流 $i(t)$ 、すなわち最適軌道を求める。

3. 最適制御理論の応用

3.1 Eulerの規準方程式

マニピュレータの運動方程式(1)は、関節ベクトル $\theta(t)$ を $\mathbf{x}_1(t)$ 、関節角速度ベクトル $\dot{\theta}(t)$ を $\mathbf{x}_2(t)$ とすれば、

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \{ \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 + \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_2) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) \} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{i} \quad (9)$$

の状態方程式で表される。随伴変数 $\mathbf{p}_1(t)$ 、 $\mathbf{p}_2(t)$ を用いてハミルトニアン H_a

$$H_a = \mathbf{p}_1^T \mathbf{x}_2 + \mathbf{p}_2^T [-\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \{ \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 + \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_2) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) \} + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \mathbf{K} i] - i^T \mathbf{R} i - \mathbf{x}_2^T \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_2^T \mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 \quad (10)$$

を定義して, $\partial H_a / \partial i = 0$ より最適電流

$$\mathbf{i} = (2\mathbf{R})^{-1} (\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \mathbf{K})^T \mathbf{p}_2 \quad (11)$$

を得る. これを式(10)に代入して整理すれば,

$$H_a = \mathbf{p}_1^T \mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_2^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \{ \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 + \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_2) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) \} + \mathbf{p}_2^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \mathbf{K})^T \mathbf{p}_2 / 4 - \mathbf{x}_2^T \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_2^T \mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 \quad (12)$$

が得られる. これより Euler の規準方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \{ \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 + \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_2) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) \} \\ &\quad + \mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \mathbf{p}_2 / 2 \\ \dot{\mathbf{p}}_1 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} [\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \{ \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 + \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_2) + \mathbf{G}(\mathbf{x}_1) \}] \mathbf{p}_2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} [\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \mathbf{p}_2] \mathbf{p}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 &= -\mathbf{p}_1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} [\mathbf{H}(\mathbf{x}_1)^{-1} \{ \mathbf{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 + \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_2) \}] \mathbf{p}_2 \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} [\mathbf{x}_2^T \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_2)] + 2\mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

が導かれる. 一方, 境界条件は初期時刻 $t=0$ と未知の終端時刻 $t=t_f$ において

$$\mathbf{x}_1(0) = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \mathbf{x}_1(t_f) = \boldsymbol{\theta}_f \quad (14)$$

$$\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2(t_f) = \mathbf{0} \quad (15)$$

であるとする. 動作時間 t_f が指定された場合, 式(14), (15)の条件のもとで式(13)を解けば, 式(7)を極小にする最適軌道が求められる. この2点境界値問題の最適解 $\mathbf{p}_2(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ を用いて式(11), (7)から最小エネルギー値が得られる.

3.2 最適動作時間の存在性

t_f が自由に変わる場合, 横断性の条件より

$$H_a(t_f) = 0 \quad (16)$$

となるべきである. また, 式(13)が t を陽に含んでいないので, 最適軌道に沿う $\partial H_a / \partial t$ も 0 である. したがって,

$$H_a(0) = 0 \quad (17)$$

が満たされなければならない。したがって、式(14), (15), (17)の条件のもとで式(13)を解いて、式(7)を極小にするマニピュレータの動作時間 t_f とその軌道を求める。

4. 水平多関節マニピュレータ

水平多関節マニピュレータの運動方程式は、式(1)において $G(\theta)=0$ に相当する。また、4.1と4.2節では理論的考察を行うために非線形摩擦力を無視する。

4.1 広域的最小エネルギー軌道

Table 1 の緒量をもつ Fig. 1 に示すような水平2リンクマニピュレータを考える。境界条件の角度 $\theta_0=[\theta_{10}, \theta_{20}]^T$, $\theta_f=[\theta_{1f}, \theta_{2f}]^T$ の値は、 π より小さく $-\pi$ より大きいとする。マニ

Table 1 System parameters used in calculation

Parameters		link 1	link 2
Moment of inertia	I_i [kgm ²]	0.43	0.244
Mass	m_i [kg]	14.25	10.0
Link length	l_i [m]	0.25	0.16
Resistance	R_i [Ω]	1.0	1.0
Torque constant	K_i [Nm/A]	1.0	1.0

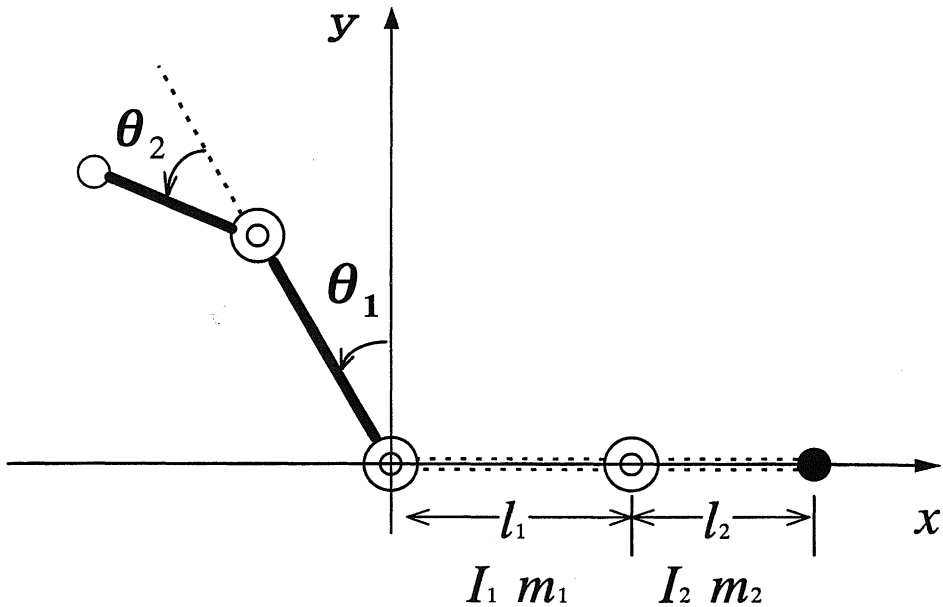


Fig. 1 Configuration of a horizontally articulated manipulator

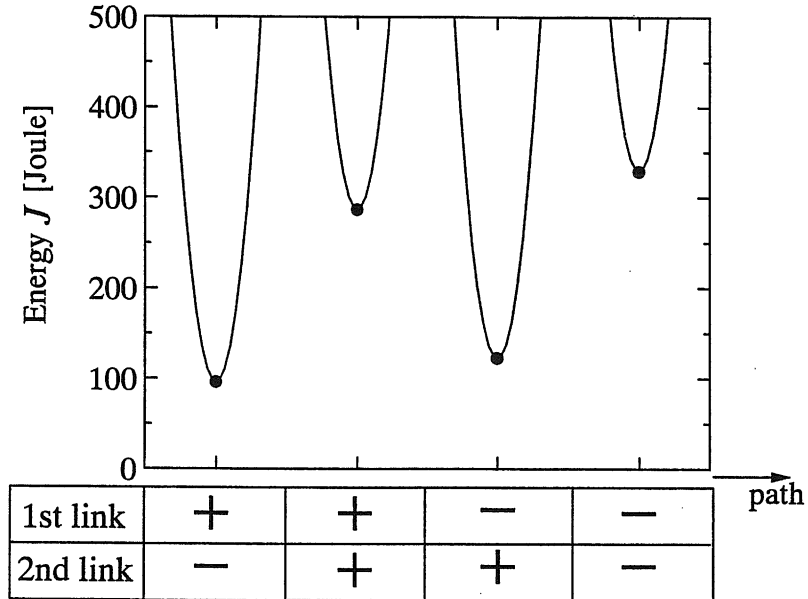


Fig. 2 Extremum energy vs. spatial path

ピュレータの周囲に障害物がなければ、第1リンクと第2リンクはそれぞれ+方向、-方向に回転して、終端目標値に到達できる4種類の経路がある。 $\theta_0 = [-0.5\pi, 0]^T$, $\theta_f = [(3-0.5\pi), 0]^T$ の条件で、それぞれの経路において消費エネルギーを計算すると、Fig. 2のようになり、軌道に対して消費エネルギーは大きく異なる。この図の・印は、それぞれの経路における極小の消費エネルギー値を示す。これから第1リンクと第2リンクの回転方向が逆にすれば消費エネルギーが大きく節約できる。この理由は

- 多くの姿勢で慣性行列の各要素は正であるので、両リンクの加速の方向が逆になることによって、関節駆動電流が減少する
- $\theta_2 = \pi$ において慣性行列が小さくなる

また、逆回転する両リンクの2種類を比較すると、第1リンクの回転角度の小さい+方向の方が消費エネルギーを小さくさせることも理解できる。第1リンクが+方向、第1リンクが-方向における最適角度、速度関数は、Fig. 3のようになった。Fig. 4はそのときの軌道をストロボスコープ的な図で示す。

4.2 動作時間と最小消費エネルギー

前節では、動作時間 t_f が1[sec]と一定となる条件のもとで、最適軌道を求めた。この節では、最小消費エネルギーが動作時間の増加につれて単調に減少することを示す。

4.2.1 慣性項のみの場合

線形摩擦力も無視すると、遠心力・コリオリ力が速度の2次式となるので、時間軸の伸

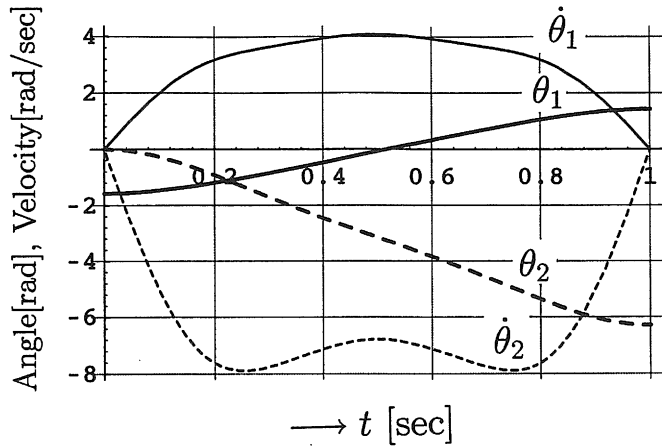


Fig. 3 Optimal angular and velocity functions

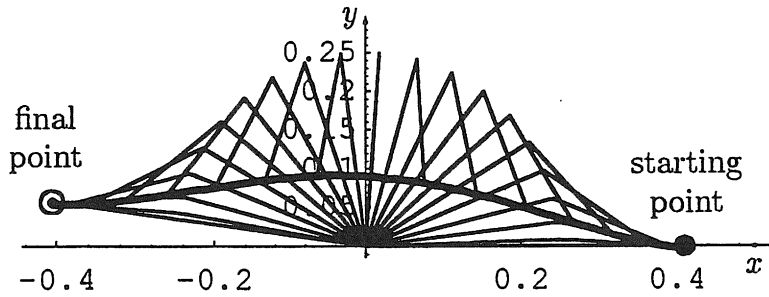


Fig. 4 Globally optimized trajectory

縮に対して、式(13)は同形の微分方程式になる。すなわち、動作時間 t_f における最適解を $\{\mathbf{x}_1^*(t), \mathbf{x}_2^*(t), \mathbf{p}_1^*(t), \mathbf{p}_2^*(t)\}$ 、極小エネルギー値を J^* と置くと、動作時間が t_f/a となった場合、最適解は

$$t_f \rightarrow t_f/a \tag{18}$$

$$\mathbf{x}_1^*(t) \rightarrow \mathbf{x}_1/(at) \tag{19}$$

$$\mathbf{x}_2^*(t) \rightarrow a\mathbf{x}_2^*(at) \tag{20}$$

$$\mathbf{p}_1^*(t) \rightarrow a^3\mathbf{p}_1^*(at) \tag{21}$$

$$\mathbf{p}_2^*(t) \rightarrow a^2\mathbf{p}_2^*(at) \tag{22}$$

となり、最適軌道の相似性が成立する。それから動作時間 t_f/a における消費エネルギー J_a は、

$$J = \frac{1}{4} \int_0^{t_f/a} a^2 \mathbf{p}_2^*(at) \mathbf{H}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{K}^T \mathbf{H}^{-1} a^2 \mathbf{p}_2^*(at)^T dt = a^3 J^* \tag{23}$$

と表され、動作時間の3乗に反比例することが理論的に示される。

4.2.2 線形摩擦力のみの場合

線形摩擦力が大きくて慣性項が無視できる場合、運動方程式(1)と消費エネルギー(7)は、つぎのようになる。

$$\dot{x}_1(t) = F_1^{-1} K i(t) \quad (24)$$

$$J = \int_0^{t_f} i(t)^T R_0 i(t) dt \quad (25)$$

ここで、 $R_0 = R + K^T F_1^{-1} K$ である。これからハミルトニアンを求め、Eulerの規準方程式を導く。その解から速度関数が一定となり、最小エネルギーは、次式で表される。

$$J = \frac{1}{t_f} (\theta_f - \theta_0)^T (K^{-1} F_1 R F_1 K + F_1) (\theta_f - \theta_0) \quad (26)$$

これから、線形摩擦力が支配的なシステムでは、最小エネルギーは動作時間に反比例することが導かれた。

4.2.3 一般の場合

慣性項と線形摩擦項が混在する場合、1リンクマニピュレータにおける最小消費エネルギーは

$$J = \frac{m^3 H^2 R (\theta_f - \theta_0)^2}{K^2 \{m t_f - 2 \tanh(m t_f / 2)\}} \quad (27)$$

と解析的に得られる。ここで、 $m = F_1 (K^2 + F_1 R) / (H^2 R)$ である。 $\tanh x$ は、 $\tanh x \approx x - x^3 / 3$ (for small x), $\tanh x \approx 1 - 2e^{-2x}$ (for large x) と近似できるので、 J はつぎのように t_f と関係づけられ、前節の理論と一致する。

$$J \propto \frac{1}{t_f^3} \quad \text{for small } t_f \quad (28)$$

$$J \propto \frac{1}{t_f} \quad \text{for large } t_f \quad (29)$$

ところが、多リンクマニピュレータにおける最小消費エネルギーは、解析的に求められない。そこで、動作時間に対する最小消費エネルギーの数値解を両対数表にプロットすると、Fig. 5のようになった。この図は、動作時間が少ない場合、最小消費エネルギーは-3の傾度をもつ一点鎖線に、動作時間が大きい場合、-1の傾度をもつ破線に漸近することを示す。

以上のことより、動作時間が少ない場合、慣性項が支配的になるので最小消費エネルギーは、動作時間の3乗に逆比例して、動作時間が大きい場合、線形摩擦項が支配的になるので最小消費エネルギーは、動作時間に逆比例することがわかった。いずれにしても、非線形摩擦力が存在しなければ、マニピュレータがゆっくり動くほど消費エネルギーが減少するので、最小消費エネルギーを最小にする最適動作時間は存在しない。

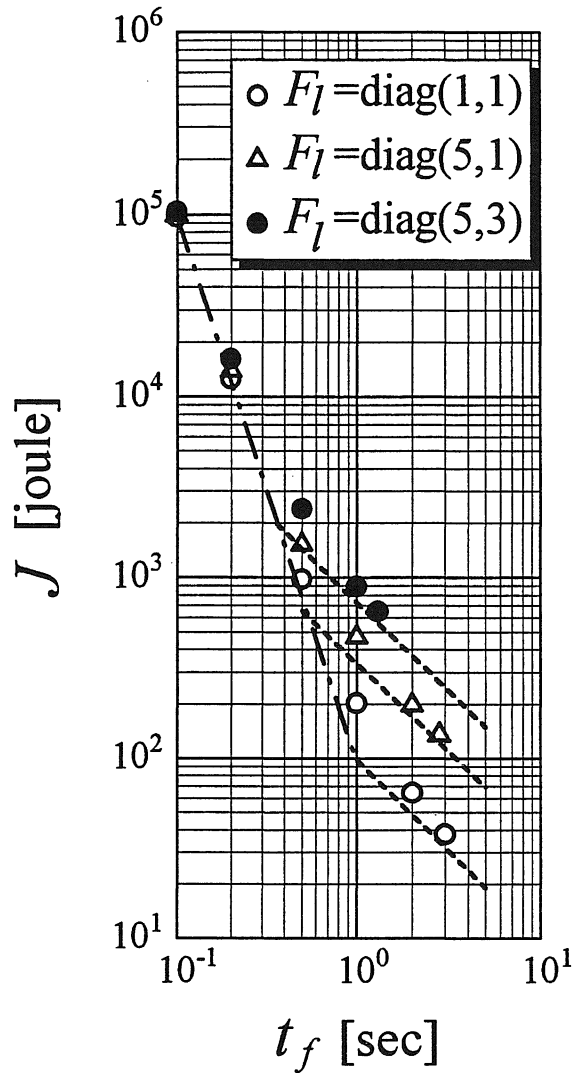


Fig. 5 Relation between dissipated energy and operating time without nonlinear friction

4.3 非線形摩擦があるときの最適動作時間

4.3.1 理論的考察

第2リンクを逆回転させれば、多くの場合 Fig. 3 のように速度は一定方向になるので、 $F_n(\dot{\theta}(t)) = F_n$ と仮定できる。また、 $H(\theta(t)) = \bar{H}$, $C(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = 0$ として運動方程式(1)を線形化すれば、次の状態方程式が得られる。

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (30)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = -\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{F}_n - \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{F}_l\mathbf{x}_2 + \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{K}\dot{\mathbf{i}} \quad (31)$$

この場合、式(12)の H_a は、つぎのようになる。

$$H_a = \mathbf{p}_1^T \mathbf{x}_2 + \mathbf{p}_2^T \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{R}^{-1} (\bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{K})^T \mathbf{p}_2 / 4 \\ - \mathbf{x}_2^T \mathbf{F}_n - \mathbf{x}_2^T \mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 - \mathbf{p}_2^T \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{F}_n - \mathbf{p}_2^T \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{F}_l \mathbf{x}_2 \quad (32)$$

これより Euler の規準方程式

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (33)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = -\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{F}_n - \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{F}_l\mathbf{x}_2 + \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{S}\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{p}_2/2 \quad (34)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{0} \quad (35)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = -\mathbf{p}_1 + (\bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{F}_l)^T \mathbf{p}_2 + \mathbf{F}_n + 2\mathbf{F}_l\mathbf{x}_2 \quad (36)$$

が導かれる。ここで、 $\mathbf{S} = \mathbf{K}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{K}$ としている。式(35)の解を \mathbf{p}_{10} として、式(34)、(36)を考える。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_l & \mathbf{B}/2 \\ 2\mathbf{F}_l & \mathbf{D}_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_n \\ \mathbf{F}_n - \mathbf{p}_{10} \end{bmatrix} \quad (37)$$

ここで、 $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{S}\bar{\mathbf{H}}^{-1}$ 、 $\mathbf{D}_n = \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{F}_n$ 、 $\mathbf{D}_l = \bar{\mathbf{H}}^{-1}\mathbf{F}_l$ としている。以下、式(37)が式(14)、(15)の境界条件を満たすように随伴変数の初期値を求める。式(37)の解は、 $\mathbf{p}_2(t)$ の初期値を \mathbf{p}_{20} とすれば、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{p}_2(t) \end{bmatrix} = e^{A_t} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_{20} \end{bmatrix} + A^{-1}(e^{A_t} - \mathbf{I}) \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_n \\ \mathbf{F}_n - \mathbf{p}_{10} \end{bmatrix} \quad (38)$$

となる。 e^{A_t} をブロック行列

$$e^{A_t} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11}(t) & \mathbf{Q}_{12}(t) \\ \mathbf{Q}_{21}(t) & \mathbf{Q}_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (39)$$

で表し、さらに

$$\mathbf{B}_{11}(t) = \mathbf{Q}_{11}(t) - (\mathbf{B}/2)\mathbf{D}_l^T\mathbf{Q}_{21}(t) - \mathbf{I} \quad (40)$$

$$\mathbf{B}_{12}(t) = \mathbf{Q}_{12}(t) - (\mathbf{B}/2)\mathbf{D}_l^T(\mathbf{Q}_{22}(t) - \mathbf{I}) \quad (41)$$

とすると、式(38)の角速度は次式で表される。

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{Q}_{12}(t)\mathbf{p}_{20} - \mathbf{K}_c^{-1}\mathbf{B}_{11}(t)\mathbf{D}_n + \mathbf{K}_c^{-1}\mathbf{B}_{12}(t)\mathbf{F}_n - \mathbf{K}_c^{-1}\mathbf{B}_{12}(t)\mathbf{p}_{10} \quad (42)$$

ここで、 \mathbf{K}_c は A^{-1} から生じる値で $-(\mathbf{D}_l + \mathbf{B}\bar{\mathbf{H}})$ である。 $\mathbf{Q}_{12}(t)$ 、 $\mathbf{B}_{11}(t)$ 、 $\mathbf{B}_{12}(t)$ の積分関数が添え字 I を付けて表現されると、式(42)から角度 $\mathbf{x}_1(t)$ が求まり、これに式(14)、(15)の終端条件を代入して解けば、随伴変数の初期値 \mathbf{p}_{20} が次式で表される。

$$\mathbf{p}_{20} = \{ \mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_{12I}^{-1} (\mathbf{D}_I + \mathbf{B}\bar{\mathbf{H}}) \mathbf{Q}_{12I} - (\mathbf{D}_I + \mathbf{B}\bar{\mathbf{H}}) \mathbf{Q}_{12} \}^{-1} \{ (\mathbf{B}_{11} - \mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_{12I}^{-1} \mathbf{B}_{11I}) \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{F}_n + \mathbf{B}_{12} \mathbf{B}_{12I}^{-1} (\mathbf{D}_I + \mathbf{B}\bar{\mathbf{H}}) (\theta_f - \theta_0) \} \quad (43)$$

これを用いれば, $t=0$ の場合の式(32)は, $\mathbf{x}_2(0)=0$ より

$$\mathbf{H}_a(0) = \mathbf{p}_{20}^T \mathbf{B} \mathbf{p}_{20} / 4 - \mathbf{p}_{20}^T \bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{F}_n \quad (44)$$

と表される. したがって, $\mathbf{F}_n = \mathbf{0}$ の場合, $\mathbf{B} > 0$ であるから最適動作時間は存在しない. 一方, $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{0}$ として式(43)を式(44)に代入しても, 最適動作時間は解析的に求められない. しかし, もし $\mathbf{F}_I = \mathbf{0}$ ならば, 式(43)は

$$\mathbf{p}_{20n} = 2\bar{\mathbf{H}} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{H}} \left[\bar{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{F}_n + \frac{6}{t_f^2} (\theta_f - \theta_0) \right] \quad (45)$$

と簡単な式で表される. このとき最適動作時間は

$$t_{fn}^{opt} = \sqrt[4]{\frac{36(\theta_f - \theta_0)^T \bar{\mathbf{H}} \mathbf{S}^{-1} \bar{\mathbf{H}} (\theta_f - \theta_0)}{\mathbf{F}_n^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{F}_n}} \quad (46)$$

と解析的に求められる.

4.3.2 シミュレーション結果との比較

2リンクマニピュレータが $\theta_0 = [-0.5\pi, 0]^T$, $\theta_f = [(3-0.5)\pi, -2\pi]^T$ の境界条件のもとで運動する場合を考える. $t_f = 1.8[\text{sec}]$, $\mathbf{F}_n = [3.6, -3.6]^T$, $\mathbf{F}_I = [0, 0]^T$ の条件下で式(1)に基づいて非線形の2点境界値問題を解いた. そのときの最適角度, 速度関数は Fig. 3 と, 軌道は Fig. 4 と同様になった. このシミュレーション結果から最適動作時間を推定すると, $t_f^* = 1.84[\text{sec}]$ である. これに対して, 線形化して得られた式(61)の t_{fn}^{opt} は $1.81[\text{sec}]$ であり, かなり良く一致する.

Fig. 6 は, 各動作時間 t_f に対して, 最小化されたエネルギー値を示す. 実線は, 線形化された式(33)~(36)を式(14), (15)の条件で解いた最適解における J を, ○印は非線形のシミュレーションの値を示す. この図から小さい t_f において少しの誤差があるが, 両者は良く一致していることがわかる. また, それぞれの \mathbf{F}_I において, J を最小にする最適動作時間 t_f^{opt} が存在し, その値は, \mathbf{F}_I の増加につれて大きくなることがわかる.

5. 垂直多関節マニピュレータ

マニピュレータが鉛直面内を運動する場合, 重力による強い非線形性のために, 最適解を解析的に得ることはできない. そこで, 遠心力・コリオリ力を無視して, 式(1)をつぎのように平衡点回りで線形化する.

$$\mathbf{H}\ddot{\boldsymbol{\delta}}(t) + \mathbf{G}_d \boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{K}\mathbf{i}(t) \quad (47)$$

ここで, $\boldsymbol{\delta}$ は平衡点からの偏差角を, \mathbf{G}_d は $\partial \mathbf{G} / \partial \boldsymbol{\theta}$ を, \mathbf{H} は定数行列を示す. $\boldsymbol{\delta}(t)$ を $\mathbf{x}_1(t)$, $\dot{\boldsymbol{\delta}}(t)$

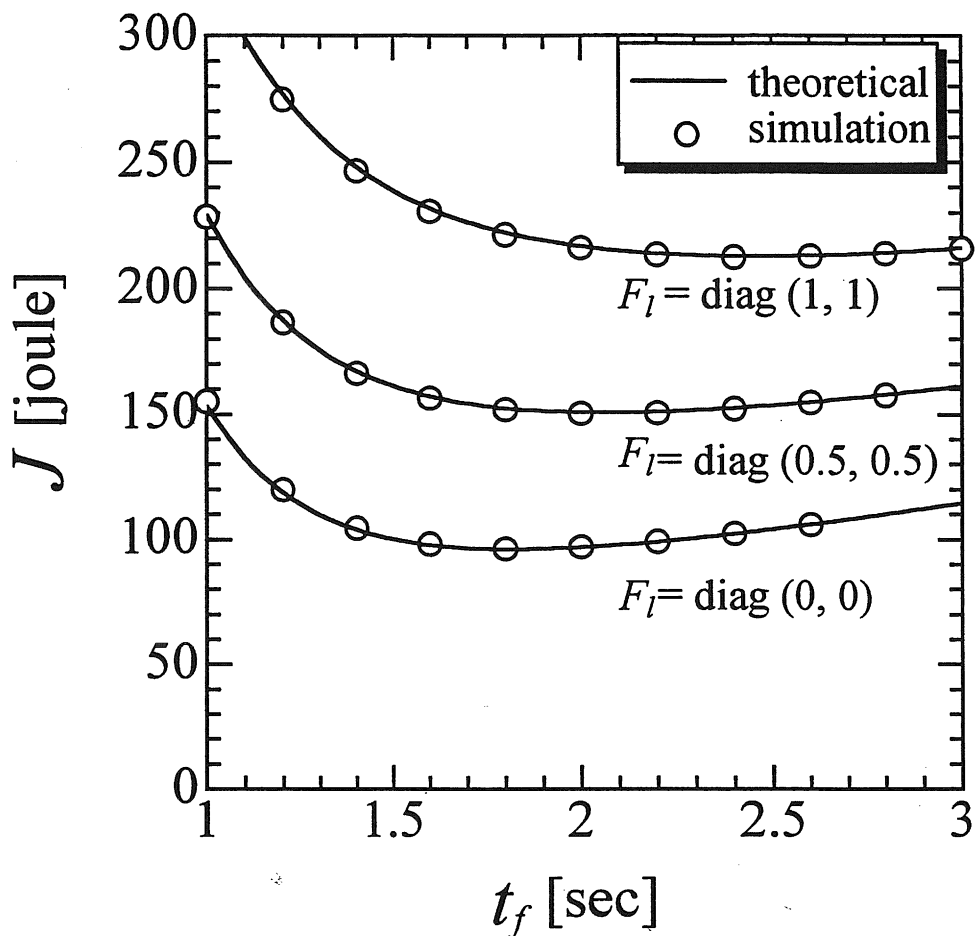


Fig. 6 Minimized dissipative energy with both linear and nonlinear friction

を $x_2(t)$, Q として

$$Q = -H^{-1}G_d \quad (48)$$

を、そして $B = H^{-1}KR^{-1}KH^{-1}/2$ を定義すれば、Euler の規準方程式(13)はつぎのようになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ Q & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & -Q^T \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

さらにこの式は、ベクトル $\mathbf{x}=[x_1, x_2]^T$, $\mathbf{p}=[p_1, p_2]^T$, ブロック行列 $\mathbf{Q}_b, \mathbf{B}_b$ を用いて、つぎのように表される。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_b & \mathbf{B}_b \\ \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (50)$$

この2点境界値問題は線形であるので、解析解が得られて、随伴変数の初期値 $\mathbf{p}(0)$ は

$$\mathbf{p}(0) = \left[\int_0^{t_f} e^{-\mathbf{Q}_b \tau} \mathbf{B}_b e^{-\mathbf{Q}_b^T \tau} d\tau \right]^{-1} [e^{-\mathbf{Q}_b t_f} \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}(0)] \quad (51)$$

と表される。初期速度 $\mathbf{x}_2(0)$ は $\mathbf{0}$ であるから、 $t=0$ における式(12)のハミルトニアンは、式(51)を用いてつぎのようになる。

$$H_d(0) = \mathbf{p}_2^T(0) \mathbf{Q} \mathbf{x}_1(0) + \mathbf{p}_2^T(0) \mathbf{B} \mathbf{p}_2(0) / 2 \quad (52)$$

以後、これが0となる条件を重力の方向が $-z$ 軸に一致する座標系で調べる。

5.1 1リンクマニピュレータ

最初に Fig. 1 で示すマニピュレータにおいて第2リンクがない1リンクマニピュレータを考える。 z 軸から反時計回りの角度を θ_1 とすると、 G が $-m_1 g(l_1/2) \sin \theta_1$ と表されるので、 G_d は

$$G_d = -m_1 g(l_1/2) \cos \theta_1 \quad (53)$$

となる。また、慣性モーメントを $H=I_1+m_1(l_1/2)^2$ として、この節ではこれらを用いてつぎのように q を定義しておく。

$$q = m_1 g(l_1/2) \{I_1 + m_1(l_1/2)^2\}^{-1} \quad (54)$$

5.1.1 不安定平衡点 $\theta_1=0$ において線形化

$\theta_1=0$ で線形化されたシステムは、 $G_d < 0$ であるので、 $Q=q > 0$ となる。このシステムの極は \sqrt{q} と $-\sqrt{q}$ だから、第2番目の随伴変数 $p_2(t)$ は、 $\mathbf{x}(0)=[\delta_0, 0]^T$ と $\mathbf{x}(t_f)=[\delta_f, 0]^T$ を代入した式(51)から得られる。これより式(52)のハミルトニアンを求めると、次のようになる。

$$H_d(0) = \frac{2q^2}{B} \frac{\sqrt{q} t_f \sinh \sqrt{q} t_f}{(\sinh^2 \sqrt{q} t_f - q t_f^2)^2} (\sqrt{q} t_f \delta_f - \sinh \sqrt{q} t_f \delta_0) (\sinh \sqrt{q} t_f \delta_f - \sqrt{q} t_f \delta_0) \quad (55)$$

$\delta_0 \delta_f \leq 0$ の場合、式(55)を整理すればわかるように、すべての t_f において、 $H_d(0) > 0$ である。このことは、マニピュレータが $\theta_1=0$ すなわち z 軸を通過する場合、式(7)を極小にする最適動作時間 t_f^* が存在しないことを示す。この場合、式(7)の J は、 t_f の増加につれて単調に減少する。他方、マニピュレータが z 軸を通過しない $\delta_0 \delta_f > 0$ の場合、式(55)からわかるように、つぎの2式

$$\sqrt{q} t_f \delta_f - \sinh \sqrt{q} t_f \delta_0 = 0 \quad (56)$$

$$\sinh \sqrt{q} t_f \delta_f - \sqrt{q} t_f \delta_0 = 0 \quad (57)$$

のどちらかが満たされれば、 $H_a(0)=0$ が成立するので、最適動作時間は存在する。

5.1.2 安定平衡点 $\theta_1=\pi$ において線形化

システムが $\theta_1=\pi$ で線形化された場合、式(53)からわかるように $G_d > 0$ なので、 $Q = -q < 0$ となる。したがって、システムの極が $i\sqrt{q}$ と $-i\sqrt{q}$ になるので、 $H_a(0)$ は、式(55)の中の \sqrt{q} を $i\sqrt{q}$ に置き換えた式にそれぞれ変更される。変更後の式(55)は、

$$\sin \sqrt{q} t_f = 0 \quad (58)$$

$$(\sqrt{q} t_f \delta_f - \sin \sqrt{q} t_f \delta_0) = 0 \quad (59)$$

$$(\sin \sqrt{q} t_f \delta_f - \sqrt{q} t_f \delta_0) = 0 \quad (60)$$

のどれかを満たすとき、 $H_a(0)=0$ となる。 $\delta_0 \delta_f < 0$ の場合、式(58)から容易に最適動作時間 t_f^* がつぎのように求められる。

$$t_f^* = \pi / \sqrt{q} \quad (61)$$

これは、小さい振幅で自由振動する振り子の半周期に一致する。

以上のことより、リンクが不安定平衡点を通過する場合以外では、アクチュエータでの消費エネルギーを極小にする最適動作時間が存在することが分かった。

5.2 2リンクマニピュレータ

2リンクマニピュレータの $G_d = \partial G / \partial \theta$ を求めると

$$G_d = -\frac{g}{2} \begin{bmatrix} m_1 l_1 \cos \theta_1 & m_2 l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ +m_2 \{2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2)\} & m_2 l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) & m_2 l_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (62)$$

となる。この場合、Table 2 に示すように4種類の平衡点があるので、それぞれについて理論的な最適動作時間を検討する。

5.2.1 平衡点 $\theta_1=\theta_2=0$ において線形化

2リンクマニピュレータが $\theta_1=\theta_2=0$ で線形化された場合、式(62)は負定行列である。したがって、式(48)の Q は正定行列になるので、その固有値 q_1, q_2 は、Table 2 の case I のように共に正である。この場合は、1リンクマニピュレータで述べた5.1.1節の結果が適用できる。すなわち、マニピュレータが不安定平衡点に相当する $\theta_1=\theta_2=0$ の姿勢を經由して移動する場合、 $J(t_f)$ が極小値を取らないので最適動作時間は存在しない。

5.2.2 その他の平衡点において線形化

$\theta_1=\theta_2=0$ 以外の平衡点で線形化された場合、 G_d が負定行列とはならないので、 Q は少なくとも1個の負の固有値をもつ。それらの固有値 q_1, q_2 を Table 1 のパラメータから計算すると、Table 2 のようになった。5.1.2節の議論からわかるように、固有値が負の場合、随伴

Table 2 Eigen values and optimal time

case	equilibrium points		linear				non-linear	
			eigen values of Q		half of period [sec]		t_f^* [sec]	$J(t_f^*)$ [joule]
	θ_1	θ_2	q_1	q_2	$\pi/\sqrt{-q_1}$	$\pi/\sqrt{-q_2}$		
I	0	0	43.49	21.39			(0.800)	4061.7
II	π	0	-43.49	-21.39	0.476	0.679	0.761	13.8
III	0	π	34.88	-26.66			(0.800)	1880.5
IV	π	π	-34.88	26.66	0.531		0.549	100.6

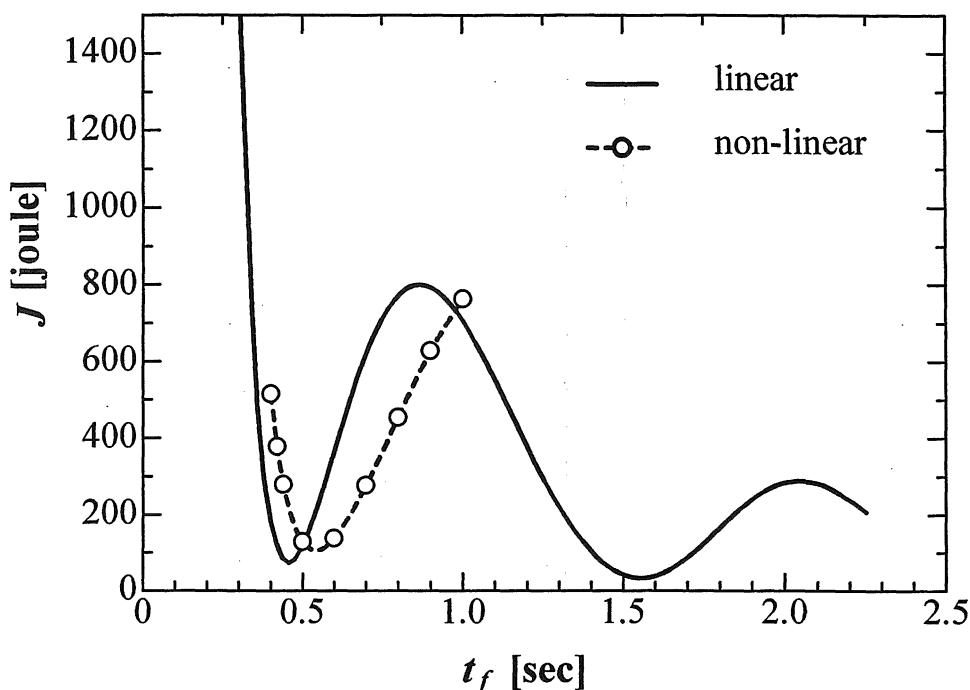


Fig. 7 Energy $J(t_f)$ of 2 link manipulator traversing $\theta_1=\pi, \theta_2=\pi$: case IV

変数は時間に関して正弦関数になる。その場合、 t_f に対して式(51)から計算された J は、Fig. 7 の実線のように振動的になり、 $J(t_f)$ を極小にする動作時間は多く存在する。動作時間の短さと軌道の単純性を考慮して、一番小さい動作時間を最適として注目する。Table 2 の case II の場合、 q_1, q_2 の固有値は共に負であるので、式(51)は t_f に関する 2 つの正弦関数からなる。したがって、 $J(t_f)$ は $2\pi/\sqrt{-q_1}$ と $2\pi/\sqrt{-q_2}$ の合成周期で変化するので、最適動作時間は、非常に明確に存在し、 $\pi/\sqrt{-q_1}$ と $\pi/\sqrt{-q_2}$ の間にある。もし、 m_2 が大きくなると、 q_2 が支配的になるので、最適動作時間は $t_f = \pi/\sqrt{-q_2}$ に接近する。一方、case III

とIVの場合, q_1, q_2 の符号が異なる. ところが, 第1リンクの質量や慣性モーメントが第2のそれらより大きいので, q_1 が強い影響力をもつ. したがって, case IIIは, $q_1 > 0$ であるから最適動作時間の存在は不明確である. 反対に case IVは $q_1 < 0$ であるから, Fig. 7 に示すように $t_f = \pi / \sqrt{-q_1}$ 付近に最適動作時間が顕著に現れる.

5.3 シミュレーション結果との比較

実際のマニピュレータは非線形性が強いので, その効果を調べるために Table 1 の値でシミュレーションをして, 前節の結果と比較する必要がある.

2リンクマニピュレータが $\theta_0 = [-0.5\pi, 0]^T$, $\theta_f = [(3-0.5\pi), 0]^T$ の境界条件のもとで運動する場合を考える. case IVの軌道における最小エネルギー値 J を各 t_f に関して計算して, Fig. 7 の上に○印でプロットした. 実線で示した線形化されたシステムの J は, シミュレーションと比べ若干の差異があるものの, 傾向が一致している. このように線形化されて得られた理論結果は, 最適動作時間の存在などいろいろな性質をよく説明できる. しかし, これは非線形性を考慮したシミュレーション結果に比べて少しの差異を伴う. この原因は, 偏差角 δ_0, δ_f がかなり大きい場合の運動を比較しているからである. なお, Fig. 7 の例からわかるように最適動作時間が存在する場合, その時間でマニピュレータを運転すれば消費エネルギーが大幅に節約できることがわかる.

6. 障害物回避にともなう消費エネルギーの増加

前章で述べた case IVは, 質量の大きい第1リンクが重力方向に向かって始動するので, 最適動作時間が存在し, しかもその最小消費エネルギーはかなり小さくできた. ここでは, case IVにおいて Fig. 9 に示すような障害物がある場合を考え, 第2リンクが障害物に接触しないための最適軌道と消費エネルギーを求める.

6.1 状態量拘束のある最適制御

第1リンクが重力方向に向かって始動し, 第2リンクが障害物に接触しないための軌道の拘束を考える. Fig. 9 からわかるように正弦定理よりつぎのスカラ等式拘束条件が得られる.

$$S(\mathbf{x}, t) = l_1 \sin \theta_2 - l_x \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad (63)$$

これより θ_2 は次のように θ_1 の関数で表される.

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{l_x \cos \theta_1}{l_1 + l_x \sin \theta_1} \right) = g_1(\theta_1) \quad (64)$$

$S(\mathbf{x}, t)$ は i を陽に含まないなので $\partial S / \partial t = 0$ を調べる. これより $\dot{\theta}_2$ は次のように θ_1 と $\dot{\theta}_1$ の関数で表される.

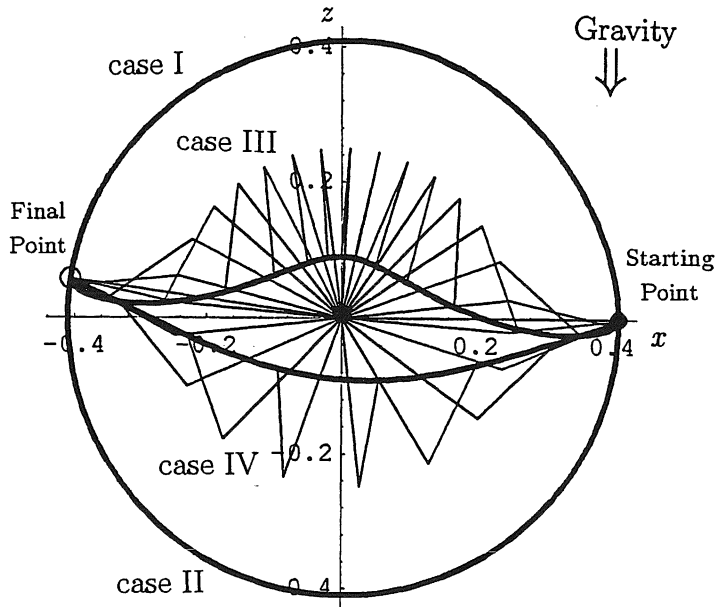


Fig. 8 Locally optimized trajectories under gravity

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{l_x(l_1 \sin \theta_1 + l_x)}{l_x^2 + l_1^2 + 2l_1 l_x \sin \theta_1} \dot{\theta}_1 = g_2(\theta_1, \dot{\theta}_1) \quad (65)$$

上式はまだ制御入力 i を陽に含んでいないので、 $S(\mathbf{x}, t)$ をもう一度軌道に沿って時間微分し、式(1)を用いると次のようになる。

$$\dot{\theta}_1^2 \frac{l_1(l_1^2 - l_x^2)}{l_1^2 + l_x^2 + 2l_1 l_x \sin \theta_1} \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1 l_x \sin(\theta_1 + \theta_2) + \dot{\theta}_2 \{l_1 \cos \theta_2 + l_x \sin(\theta_1 + \theta_2)\} = 0 \quad (66)$$

この式の $\ddot{\theta}$ に式(1)から得られた $\ddot{\theta} = \mathbf{H}^{-1}\{\mathbf{K}i - \mathbf{C} - \mathbf{G}\}$ を代入すると、拘束された軌道をとるための制御入力 i の関係式が得られる。

$$i_1(t) = \alpha + \beta i_2(t) \quad (67)$$

ハミルトニアンは、拘束を受ける時間 $0 \sim t_c$ では、式(10)に式(64), (65), (67)を代入した H_a' を考える。これから $\partial H_a' / \partial i_2 = 0$ より最適電流 i_{2opt} が $\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{p}(t)$ の関数で表される。そして、それを代入した H_a' より状態方程式とつぎの随伴方程式が導かれる。

$$\begin{cases} \dot{p}_{11} = -\frac{\partial H_a'}{\partial \theta_1} \\ \dot{p}_{12} = -\frac{\partial H_a'}{\partial \theta_2} = 0 \\ \dot{p}_{21} = -\frac{\partial H_a}{\partial \dot{\theta}_1} \\ \dot{p}_{22} = -\frac{\partial H_a}{\partial \dot{\theta}_2} = -p_{12} \end{cases} \quad (68)$$

これらの8元連立微分方程式を解くことによって、最適軌道が得られる。この場合、初期条件は式(14), (15)の $(\theta_0, \mathbf{0})$ で与えられるが、拘束を受ける状態から自由になる時刻 t_c 、そのときの角度 θ_{1c} 、角速度 $\dot{\theta}_{1c}$ が未知量であるので、これらを仮定して両端固定の2点境界値問題を解く。一方、拘束状態を脱した $t_c \sim t_f$ 時間の最適軌道は、先に仮定された $t_c, \theta_{1c}, \dot{\theta}_{1c}$ と式(14), (15)の $(\theta_f, \mathbf{0})$ を用いて、同様の2点境界値問題を解いて得られる。この場合、状態変数の接続は問題ないが、随伴変数の接続はつぎの最適性の条件を満たす必要がある¹⁶⁾。

$$\mathbf{p}(t_c^-) = \mathbf{p}(t_c^+) - \frac{\partial N}{\partial(\theta, \dot{\theta})} \boldsymbol{\pi} \quad (69)$$

$$H_a'(t_c^-) = H_a(t_c^+) + \frac{\partial N}{\partial t} \quad (70)$$

N は式(64), (65)の拘束式 $[\theta_2 - g_1(\theta_1), \dot{\theta}_2 - g_2(\theta_1, \dot{\theta}_1)]^T$ を、 $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2]^T$ はラグランジュ乗数を示すので、式(69)は

$$\begin{bmatrix} p_{11}(t_c^-) \\ p_{12}(t_c^-) \\ p_{21}(t_c^-) \\ p_{22}(t_c^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(t_c^+) \\ p_{12}(t_c^+) \\ p_{21}(t_c^+) \\ p_{22}(t_c^+) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} \pi_1 + \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} \pi_2 \\ -\pi_1 \\ \frac{\partial g_2}{\partial \dot{\theta}_1} \pi_2 \\ -\pi_2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

と表される。これから $\boldsymbol{\pi}$ は消去され、また、式(68)の求解において一般性を失うことなく $p_{12}(0) = 0, p_{22}(0) = 0$ とできるので、式(71)は

$$p_{11}(t_c^-) = p_{11}(t_c^+) + \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} \Big|_{t=t_c} p_{12}(t_c^+) + \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} \Big|_{t=t_c} p_{22}(t_c^+) \quad (72)$$

$$p_{21}(t_c^-) = p_{21}(t_c^+) + \frac{\partial g_2}{\partial \dot{\theta}_1} \Big|_{t=t_c} p_{22}(t_c^+) \quad (73)$$

と表され、この2式が随伴変数の接続式となる。一方、式(70)は、 N が時刻 t を陽に含んでいないので、

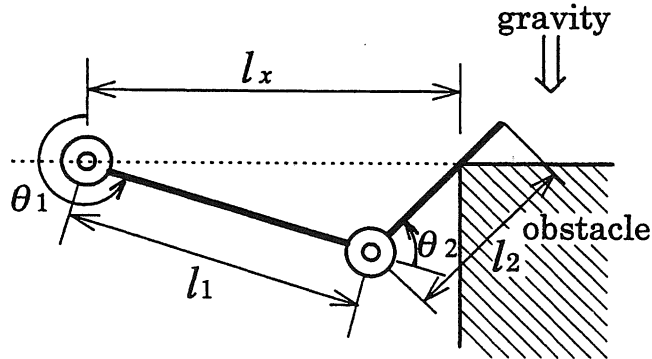


Fig. 9 2 link manipulator avoiding an obstacle

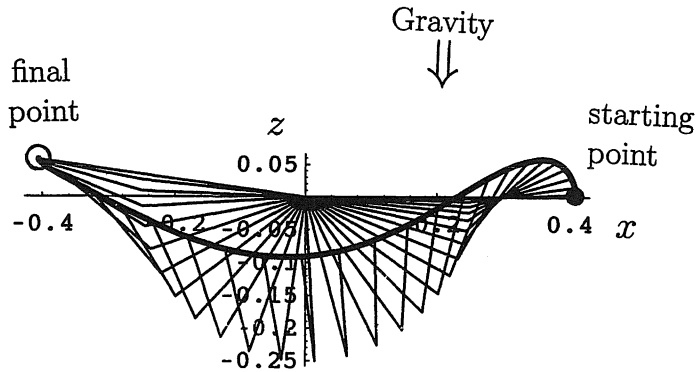


Fig. 10 Optimal trajectory constraint under $l_x=0.30[m]$

$$H_a'(t_c^-) = H_a(t_c^+) \quad (74)$$

となる。以上、3つの接続条件式(72), (73), (74)を満たすべく、3つの未知変数 $t_c, \theta_{1c}, \dot{\theta}_{1c}$ を決定すれば、そのときの解が最小エネルギー軌道となる。

6.2 シミュレーション結果

状態拘束がないとき、式(7)を最小にする最適動作時間 $t_f^* = 0.549[\text{sec}]$ が存在する。この動作時間のもとで $l_x = 0.30[m]$ のときの最適軌道を求めると、Fig. 10のようになった。 l_x を変えたときの消費エネルギーは、Fig. 11の実線のようになり、状態拘束がないときの一点鎖線に比べて増加している。図中の○は、状態拘束が存在する条件下での最適動作時間における消費エネルギー値を示す。

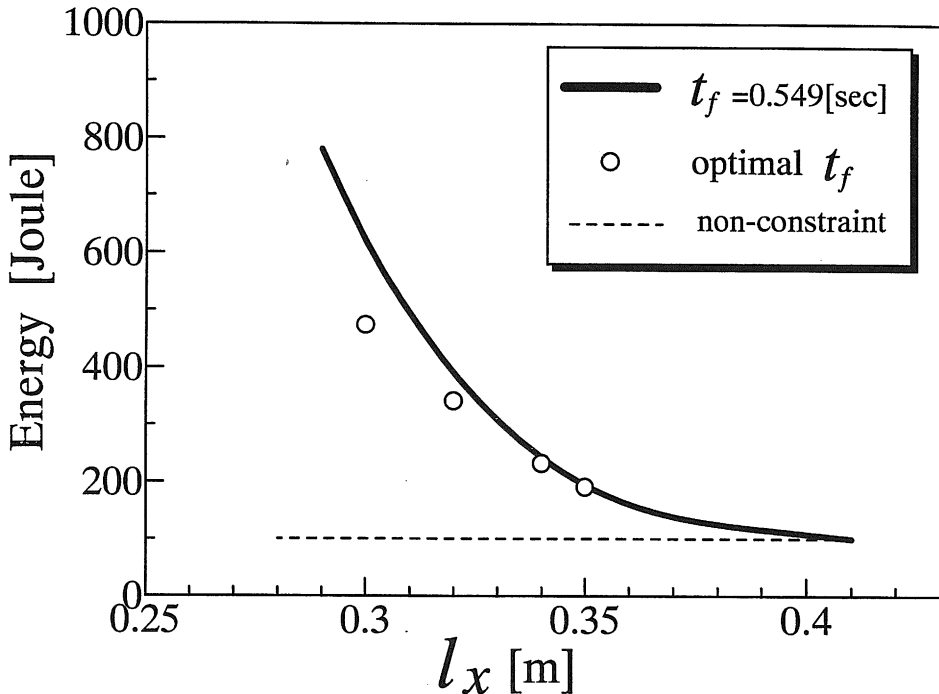


Fig. 11 Minimized dissipative energy vs. l_x

7. あとがき

PTP 制御されるマニピュレータを少ないエネルギーで運転させるために、アクチュエータでの消費エネルギーを最小にする最適軌道や最適動作時間について検討した。その結果、つぎのことが明らかになった。

- 1) 水平多関節形マニピュレータの第1関節を最短角度方向に、第2関節を第1関節と逆方向に回転させれば、大域的に最適軌道が存在し得て、大きな省エネルギー効果があった。
- 2) 摩擦力が存在しなければ、アクチュエータでの消費エネルギーは動作時間の3乗に逆比例する。
- 3) 慣性力に比べて線形摩擦力が支配的な場合、消費エネルギーは動作時間の逆比例する。
- 4) 非線形摩擦力がある場合、最適動作時間が存在し、それを求める方法を示した。
- 5) 重力の影響を受ける垂直形マニピュレータの場合、慣性の大きい第1リンクが不安定平衡点を通過する軌道では、最適動作時間が存在しない。
- 6) 慣性の大きい第1リンクが安定平衡点を通過する軌道では、最適動作時間が存在し、その値は固有振動数の約半周期に相当する。

- 7) 最適動作時間と最適軌道の選択によって非常に大きな省エネルギー効果がある。
- 8) マニピュレータが障害物を回避するような状態拘束を受ける場合でも最小エネルギー軌道を求めることはできるが、それにともなって消費エネルギー増加が増加するので、障害物を取り除くように環境を整備することが省エネルギーにつながる。

参 考 文 献

- 1) 遠山茂樹, 高野政晴: “ロボットの運動の高速化に関する研究”, 精密機械, vol. 48, no. 5, pp. 641-648, 1982.
- 2) 寺本 律, 小野京右, Ö. Turhan: “平均的発熱が制限となる運動機構の高速駆動に関する研究”, 機械学会論文集 (C編), vol. 57, no. 544, pp. 3869-3876, 1991.
- 3) K. G. Shin and N. D. Mckey: “Selection of near-minimum time geometric paths for robotic manipulators”, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-31, no. 6, pp. 501-511, 1986.
- 4) H. P. Geering, L. Guzzella, S. A. R. Hepner and C. H. Onder: “Time-optimal motions of robots in assembly tasks”, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-31, no. 6, pp. 512-518, 1986.
- 5) H. H. Tan and R. B. Potts: “Minimum time trajectory planner for the discrete dynamic robot model with dynamic constraints”, IEEE Journal of Robotic and Automation, vol. 4, no. 2, 174-185, 1988.
- 6) P. Marinov and P. Kiriazov: “A direct method for optimal control synthesis of manipulator point-to-point motion”, Bridge Control Sci. Technol., vol. 1, 453-456, 1985.
- 7) B. K. Kim and K. G. Shin: “Suboptimal control of industrial manipulators with a weighted minimum time-fuel criterion”, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-30, no. 1, pp. 1-10, 1985.
- 8) M. Vukobratovic and M. Kircanski: “A method for optimal synthesis of manipulation robot trajectories”, Transactions of the ASME, vol. 104, pp. 188-193, 1982.
- 9) 黒田孝春, 高野政晴: “ロボットの最小エネルギー制御に関する研究—シミュレーションによる最短時間制御との比較—”, 精密工学会秋期大会学術講演会論文集, pp. 111-112, 1987.
- 10) 大久保博志, 小林清志, 鬼頭勇二, 小松信雄: “消費エネルギーを最小化する宇宙ロボットの軌道制御”, ロボテックス・メカトロニクス講演会'96講演論文集, pp. 337-340, 1996.
- 11) 泉 照之: “非線形摩擦をもつ水平多関節マニピュレータのPTP制御における消費エネルギー最小化”, 日本ロボット学会誌, vol. 13, no. 8, pp. 1179-1185, 1995.
- 12) 泉 照之, 中岡睦雄, 木村悦博: “サーボシステム系の保存エネルギーをコンデンサーに回生する最適制御方式の検討”, 電気学会論文誌 D, vol. 115-D, no. 6, pp. 816-817, 1995.
- 13) 泉 照之, P. Boyagoda, 佐藤泰司: “エネルギーを回生する水平多関節マニピュレータの最小エネルギー軌道とそれに及ぼす動作時間の影響”, 日本ロボット学会誌, vol. 15, no. 4, pp. 601607, 1997.
- 14) 長谷川健介, 箱木北斗, 佐々木教諭: “振り上げロボットアームに関する基礎的研究”, 14th 日本ロボット学会学術講演会, pp. 3-4, 1996.
- 15) T. Izumi, P. Boyagoda: “Optimal Operating Time for Minimizing the Dissipative Energy of a Manipulator in PTP Motion Under Gravity”, 2nd Asian Control Conference, 1997.
- 16) 加藤寛一郎: “工学的最適制御”, 東大出版会, 1988.