

# 液体容器を含む弾性構造物の非線形振動

池田 隆

島根大学総合理工学部電子制御システム工学科

## Nonlinear Vibrations of an Elastic Structure with a Liquid Container

Takashi IKEDA

*Department of Electronic and Control Systems Engineering  
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering  
Shimane University*

(Received September 19, 1997)

This paper deals with the nonlinear vibrations in an elastic structure which is subjected horizontally or vertically to sinusoidal excitation and to which a liquid container is attached. In theoretical analyses, based on the equations of motion governing the system, the modal equations are derived by taking account of the nonlinearity due to fluid inertia. The resonance curves are also presented. In numerical calculations, it is found that the shape of the resonance curves changes depending upon the liquid level, and that the liquid container is available as a damping device for structures subjected to horizontal as well as vertical excitation. When the excitation is comparatively large, it is shown that some peculiar vibrations can occur due to the nonlinearity of the liquid inertia. These theoretical results agreed quantitatively well with the experimental results.

### 概 要

部分的に液体で満たされた容器をもつ弾性構造物が水平方向、あるいは鉛直方向に正弦外力を受ける場合、特に液体容器による構造物の制振効果に注目して、構造物と液面スロッシング（液面の振動現象）との連成振動について理論的、実験的に調べた。理論解析では、流体力の非線形性を考慮した系の運動方程式を基に、卓越した振動成分のみに注目したモード方程式を導き、数値計算によって共振曲線を示した。その結果、液面レベルに依存して共振曲線の形状が変化し、また液体容器は水平方向のみならず鉛直方向の励振を受ける構造物の制振装置として有効であることを明らかにした。さらに、外力が比較的大きくなると系に特異な非線形振動が発生することを示した。実験では、これらの理論結果は実験結果と定量的に一致することを確かめ、本解析の妥当性が示された。

### 1. 緒 言

弾性構造物と液体のスロッシングとの連成振動は、高架の貯水槽、液化ガスのタンクなど

に見られ、工業的にも重要な問題である。最近では、塔状構造物の長周期振動を抑制するため、TSD (Tuned Sloshing Damper: 同調スロッシングダンパー) と呼ばれる制振装置も開発され<sup>1,2)</sup>、一部では実用化されている<sup>3-5)</sup>。TSDは、構造物の固有振動数と液体容器内のスロッシングの固有振動数が等しくなるように同調させ、液面振動により容器側壁に作用する流体力を利用した制振装置である。これらの報告は実験的研究に留まっているが、このような系の正確な動的挙動を解析するには、液面変位が大きい共振時に顕著となる流体力の非線形性を考慮する必要がある。

従来の研究は、液体容器のみが直接励振される場合と、TSDのように弾性構造物と容器内スロッシングが連成する場合に分けられる。前者の場合の液面の非線形応答については多くの研究がある。後者については線形解析が殆どであり、非線形応答を扱った報告は数編のもの<sup>6-12)</sup>に限られるようである。このように構造物とスロッシングの非線形連成振動に関し、定量的に精度の高い数学モデルが構築されているとは言えず、また解析的に共振曲線を求めた報告も少ないようである。

本稿の構成は次の通りである。2章、3章では構造物が水平方向の正弦外力を受ける場合に、それぞれ長方形容器<sup>[1][2]</sup>、円筒容器<sup>[3][4][5]</sup>内のスロッシングと構造物の非線形連成振動を扱い、4章では鉛直方向の正弦外力を受ける構造物と長方形容器内のスロッシングの非線形連成振動<sup>[6][7]</sup>について述べ、最後に5章では全体をまとめる。

## 2. 長方形水槽内のスロッシングによる構造物の非線形振動

### 2.1 運動方程式

図1に理論解析モデルを示す。一般の機械構造物や建築構造物をモデル化して、片持はり質量  $m$  から成る1自由度系の構造物 (ばね定数  $k$ , 減衰係数  $c$ ) を考える。その構造物が水平方向に正弦外力を受け、質量  $m$  の上には深さ  $h$  の液体で満たされた長さ  $l$ , 幅  $d$  の長方形剛体容器が取り付けられている。 $x$  軸を静止液面にとり、剛体容器に固定された  $O-xz$  座標系を考える。流体挙動は  $xz$  平面内の二次元問題とする。構造物変位、および位置  $x$  での液面変位を、それぞれ  $x_1, \eta$  とする。液体については、容器に対して相対的に運動する液体の速度ポテンシャルを  $\phi(x, z, t)$ , 圧力を  $P(x, z, t)$ , 粘性係数を  $\mu$ , 密度を  $\rho$ , 質量を

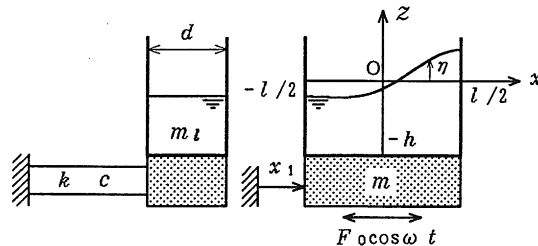


図1 理論解析モデル

$m_i$ , 容器側壁に働く  $x_1$  方向の流体力を  $F_i$  とする. 正弦外力の振幅を  $F_0$ , 振動数を  $\omega$ , 時間を  $t$ , 重力加速度を  $g$  とする.

ここでは, 流体は十分よい精度でポテンシャル流れと仮定できるとし, 流体のあらゆる減衰効果をまとめ, 速度に比例する粘性項を考える. ここで次の無次元量を導入する.

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1/l, \eta' = \eta/l, x' = x/l, z' = z/l, \\ d' &= \rho dl^2/M, h' = h/l, \phi' = \phi/(l^2 p_1), \\ v &= m/M, k' = k/(M p_1^2), c' = c/(M p_1), \\ \mu' &= \mu/p_1, F'_i = F_i/(M l p_1^2), \\ P' &= P/(\rho l^2 p_1^2), F_0' = F_0/(M l p_1^2), \\ \lambda_n' &= n\pi, \omega' = \omega/p_1, t' = p_1 t, \\ [M &= m + m_i, p_n = \sqrt{g \lambda_n \tanh(\lambda_n h)}, \lambda_n = n\pi/l] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに,  $n=1, 2, 3, \dots$  である. 式(1)の [ ] 内は有次元量であり,  $M$  は構造物と液体の質量の和,  $p_n$  は液面スロッシングの  $n$  次モードの固有振動数を表す. また, 式(1)中の  $\lambda_n$  は, 次の特性方程式

$$\sin(\lambda l) = 0 \quad (2)$$

を満たす根である. 式(1)の無次元量を用いると, ラプラス方程式 (連続の式), およびオイラーのエネルギー式 (圧力方程式) は無次元表示で次式のように与えられる<sup>13)</sup>. ただし, 簡単のため, 以下では無次元量を表す記号' をすべて省略する.

$$\Delta\phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_z^2) + \frac{z}{\lambda_1 \tanh(\lambda_1 h)} + P - \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 + \mu\phi = -\ddot{x}_1 \quad (4)$$

ここに,  $\phi_x$  などは  $x$  についての偏微分, 記号  $\dot{\phantom{x}}$  は時間  $t$  に関する微分を表す. 容器壁面と底面に垂直な方向の流速は零であるので, 次式を得る.

$$\phi_x = 0 \quad (\text{at } x = \pm 1/2) \quad (5)$$

$$\phi_z = 0 \quad (\text{at } z = -h) \quad (6)$$

また, 液面上での流体粒子の垂直速度と液面の垂直速度は等しいことから, 次の運動学的境界条件が得られる<sup>13)</sup>.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \phi_z - \phi_x \eta_x \Big|_{z=\eta} \quad (7)$$

液面  $z=\eta$  では  $P=0$  であるので, 式(4)より, 流体の圧力方程式に対する境界条件は次式となる.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_z^2) + \frac{z}{\lambda_1 \tanh(\lambda_1 h)} - \frac{1}{2} x_1^2 + \mu \phi \Big|_{z=\eta} = -\dot{x}_1 x \quad (8)$$

構造物についての運動方程式は、次式となる。

$$v\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = F_1 + F_0 \cos \omega t \quad (9)$$

式(9)の  $F_1$  は、次式で与えられる。

$$F_1 = d \int_{-h}^{\eta_1} P(1/2, z, t) dz - d \int_{-h}^{\eta_2} P(-1/2, z, t) dz \quad (10)$$

ここに、 $\eta_1, \eta_2$  はそれぞれ容器側壁位置  $x=1/2, -1/2$  における液面変位を表す。

## 2.2 モード方程式

式(3)、および  $\mu\phi, -x_1^2/2, -x_1x$ 、非線形項  $(\phi_x^2 + \phi_z^2)/2$  を除いた式(4)の線形系に対する  $\phi$  および  $\eta$  の自由振動解は、式(5)~(7)の境界条件より、級数の形で得られる。その場合と同じ固有関数を用いて、卓越して発生する非対称1次モードと対称1次モードのみを考慮し、 $\phi$  および  $\eta$  の強制振動解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, z, t) &= a_1(t) \sin(\lambda_1 x) \cosh\{\lambda_1(z+h)\} / \cosh(\lambda_1 h) \\ &\quad + a_2(t) \cos(\lambda_2 x) \cosh\{\lambda_2(z+h)\} / \cosh(\lambda_2 h) \\ \eta(x, t) &= b_1(t) \sin(\lambda_1 x) + b_2(t) \cos(\lambda_2 x) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上式中の  $a_1, b_1, a_2, b_2$  は時間の未知関数である。

一方、式(8)の右辺の  $x$  を式(11)と同じ固有関数で展開すると、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \{r_{2n-1} \sin(\lambda_{2n-1} x) + r_{2n} \cos(\lambda_{2n} x)\} \\ \text{ただし、} r_{2n-1} &= (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2}, \quad r_{2n} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ここで微小量  $\varepsilon$  を導入し、各量のオーダーを次のように仮定する<sup>13)</sup>。  $O$  はオーダーを意味する。

$$\left. \begin{aligned} a_1, b_1, x_1 &\sim O(\varepsilon^{1/3}) \\ a_2, b_2, c, \mu &\sim O(\varepsilon^{2/3}) \\ F_0 &\sim O(\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式(13)の仮定のもとで  $\eta$  を微小と考え、式(7)、(8)を  $\eta=0$  の近傍でテイラー展開した後、式(11)、(12)を代入し、 $O(\varepsilon)$  の精度で両辺の  $\sin \lambda_1 x, \cos \lambda_2 x$  の係数を等置し、また式(9)の  $F_1$  中の積分計算より、次のモード方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{a}_1 + Q_1 b_2 \dot{a}_1 + Q_2 b_1^2 \dot{a}_1 + Q_3 b_1 \dot{a}_2 + Q_4 \ddot{x}_1 + \mu a_1 + Q_5 b_1 + Q_6 a_1 a_2 + Q_7 a_1^2 b_1 &= 0 \\
 Q_8 b_1 \dot{a}_1 + \dot{a}_2 + Q_9 b_2 + Q_{10} a_1^2 &= 0 \\
 \dot{b}_1 + Q_{11} a_1 + Q_{12} a_1 b_2 + Q_{13} a_2 b_1 + Q_{14} a_1 b_1^2 &= 0 \\
 \dot{b}_2 + Q_{15} a_2 + Q_{16} a_1 b_1 &= 0 \\
 Q_{17} \dot{a}_1 + Q_{18} b_2 \dot{a}_1 + Q_{19} b_1^2 \dot{a}_1 + Q_{20} b_1 \dot{a}_2 + Q_{21} \ddot{x}_1 + Q_{22} b_2 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + Q_{23} b_1 \dot{x}_1^2 + k x_1 + Q_{24} a_1 \\
 + Q_{25} a_1 a_2 + Q_{26} b_1 b_2 + Q_{27} a_1^2 b_1 &= F_0 \cos \omega t
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに、 $Q_i$  ( $i=1\sim 27$ ) は定数である<sup>[1]</sup>。

### 2.3 調和振動の共振曲線

式(14)の数値シミュレーション波形の周波数分析結果<sup>[1]</sup>を基に、 $a_i, b_i$  ( $i=1, 2$ )、および  $x_1$  の解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= u_1 \cos \omega t - v_1 \sin \omega t + w_1 \cos 3\omega t - z_1 \sin 3\omega t \\
 b_1 &= u_2 \cos \omega t - v_2 \sin \omega t + w_2 \cos 3\omega t - z_2 \sin 3\omega t \\
 x_1 &= u_3 \cos \omega t - v_3 \sin \omega t + w_3 \cos 3\omega t - z_3 \sin 3\omega t \\
 a_2 &= e_1 \cos 2\omega t - f_1 \sin 2\omega t \\
 b_2 &= e_2 \cos 2\omega t - f_2 \sin 2\omega t + r_0
 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

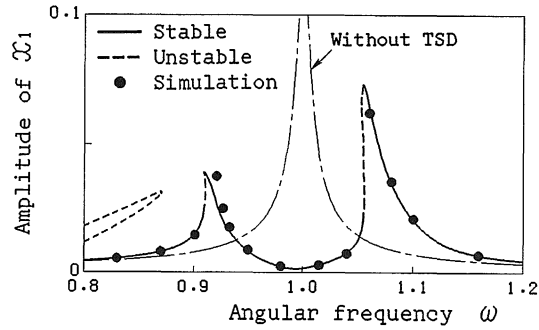
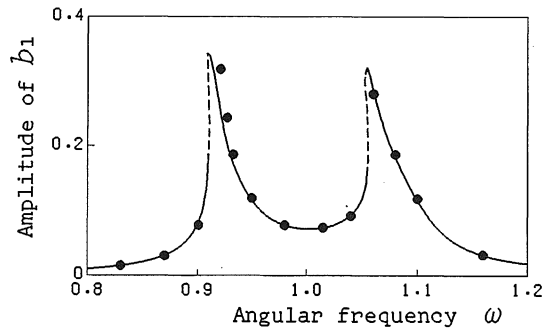
ここに、各振幅および定数項  $r_0$  は時間的に緩やかに変化するとし、それらのオーダーは式(13)に従う。また、各変数を時間に関して一回微分することによりそのオーダーは  $O(\varepsilon^{2/3})$  だけ小さくなるとする。式(15)を式(14)に代入し、 $O(\varepsilon)$  の精度で振動数  $\omega, 2\omega, 3\omega$ 、および一定成分の項について調和バランスをとると、時間に関する未知数  $u_i, v_i, w_i, z_i, e_j, f_j, r_0$  (ただし  $i=1, 2, 3; j=1, 2$ ) についての連立微分方程式を得る<sup>[1]</sup>。その式より定常解を数値的に求めることができ、定常解からの微小ずれを考慮することによりその安定判別も行える。

容器内の液体が固定されたと仮定した場合の構造物、すなわち液体と同じ質量を質量  $m$  に付加した主振動系の振幅  $R$  は、式(14)の第5式において  $a_i, b_i$  などを零と置けば、次のように得られる。

$$R = F_0 / \sqrt{\{k - (v + dh)\omega^2\}^2 + (c\omega)^2} \quad (16)$$

### 2.4 数値計算例

図2(a), (b)に、2.3節から求まる、構造物の変位  $x_1$  の  $\omega$  成分 ( $=\sqrt{u_3^2 + v_3^2}$ )、および液面の変位  $\eta$  に含まれる振動成分  $b_1$  の  $\omega$  成分 ( $=\sqrt{u_2^2 + v_2^2}$ ) についての共振曲線を示す。実線は安定解、破線は不安定解を表す。また、一点鎖線は式(16)による主振動系の共振曲線を表す。図2におけるパラメータの値は、 $v=0.94, k=1.0, c=0.013, \mu=0.024, h=0.6, d=0.1, F_0=0.0015$  である。●印は、シミュレーション波形をFFT分析して得られた各振動数成分の振幅を表す。理論解析による共振曲線とシミュレーション結果はほぼ一致してい

(a)  $x_1$  の  $\omega$  成分の振幅(b)  $b_1$  の  $\omega$  成分の振幅図2 共振曲線 ( $h=0.6$  の場合)

る。共振曲線の形状は左側に傾く漸軟形となっている。また、 $\omega \approx 1$  付近での主振動系のピークが非常に小さくなっていることから、液体容器は一般の動吸振器と同様の制振効果をもつことがわかる。

図3, 4に、水深を変えた場合の構造物に対する共振曲線を示す。図2の場合と異なるパラメータの値だけを示すと、図3では  $h=0.33$ 、図4では  $h=0.2$ 、 $d=0.2$  である。これらの理論結果とシミュレーション結果はほぼ一致している。図2~4より、水深が減少するにつれ、共振曲線の形状は漸軟形から漸硬形に変化することがわかる。

## 2.5 実験装置および実験結果

図5に実験装置の概略図を示す。片持ちり（幅 50.0 mm、厚さ 3.1 mm）の先端に、アクリル製の容器を有する質量  $m$  を取り付けた。質量  $m$  は、薄いアルミ板を介して電磁式加振器により水平方向に正弦加振される。レーザー変位センサ  $S_1$ 、 $S_2$  により、構造物変位  $x_1$  と位置  $x=15$  mm における液面変位  $\eta$  を測定した。実験では水深による共振曲線の変化を調べるため、表1に示すように、装置 A, B, C を用いた。ただし、 $m$  にははりの等価質量が、 $k$  にはアルミ板のばね定数の値が含まれている。装置 C における  $\mu$  の値は水面の減衰波形

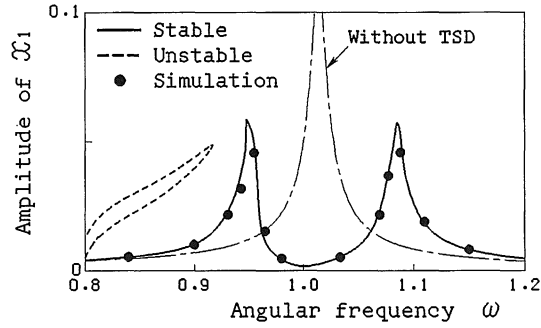


図3 共振曲線 (図2から  $h=0.33$  に変えた場合)

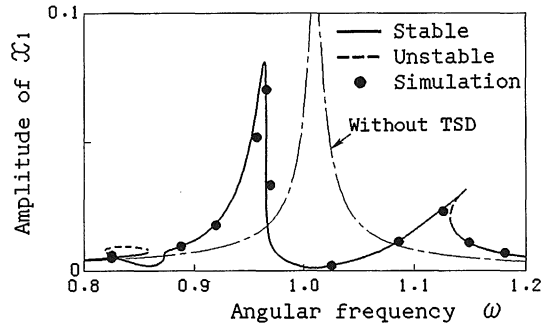


図4 共振曲線 (図2から  $h=0.2, d=0.2$  に変えた場合)

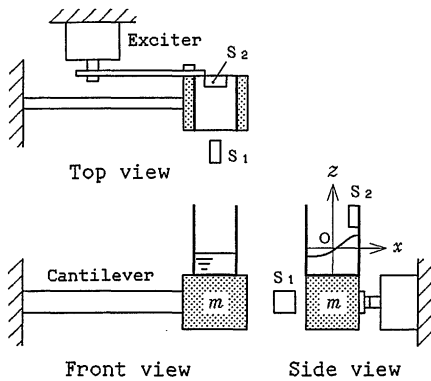


図5 実験装置の概略

表1 装置A, B, Cの諸元

Apparatus	A	B	C
Structure Mass $m$ Kg	6.080	6.470	6.797
Spring Constant $k$ N/m	1890	1513	921
Damping Coefficient $c$ Ns/m	1.109	0.761	0.630
Tank Length $l$ m	0.10	0.10	0.12
Tank Width $d$ m	0.06	0.06	0.085
Water Depth $h$ m	0.06	0.03	0.02
Water Mass $m_l$ Kg	0.367	0.183	0.205
Viscosity $\mu$ 1/s	0.40	0.60	—
Force $F_0$ N	0.205	0.139	0.152
Natural frequency $p_0$ Hz	2.725	2.400	1.825

— means that the corresponding value couldn't be measured.

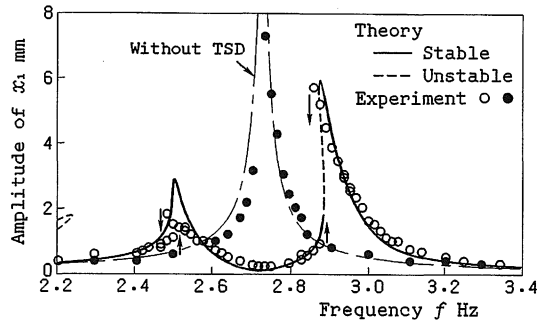
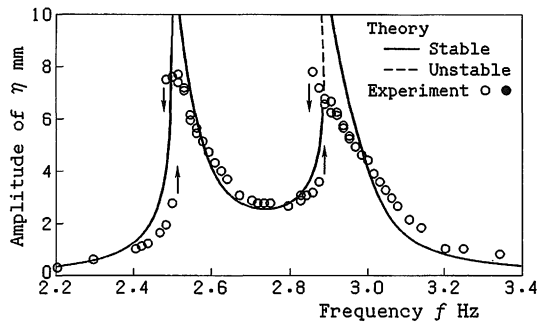
(a)  $x_1$  の振幅(b)  $\eta$  の振幅

図6 実験結果と理論結果の比較  
(装置 A ;  $h/l=0.6$ )

の乱れのため測定できなかったので、装置 B の場合と同じ値とした。供試液体には、白色絵具を添加した水道水を使用した。各装置の同調条件は、水と同じ質量  $m_1$  を構造物の質量  $m$  に加えた質量  $M$  をもとにした主振動系の固有振動数  $p_0=1/(2\pi)\sqrt{k/M}$  Hz とスロッシングの非対称 1 次モードの固有振動数  $p_1$  が等しくなるように設定した。

図 6(a), (b) は、それぞれ装置 A を用いた場合の構造物および液面の変位に対する共振曲線を示す。実線と破線は、それぞれ理論結果の安定解と不安定解を表す。一点鎖線は式 (16) による主振動系の共振曲線を表す。ただし、図 6(a), (b) に描かれた曲線は、それぞれ図 2(a), (b) と同じ種類のものである。○、および●印は、それぞれ長方形水槽をもつ場合、および水を同じ質量の物体に置き換えた主振動系の場合に、実験より得られた測定波形の全振幅を表す。また、上下の矢印は跳躍現象が生じたことを表す。共振曲線は漸軟形となり、理論結果は実験結果とほぼ一致している。

図 7, 8 は、それぞれ装置 B, C を用いた場合の構造物の共振曲線である。装置 B では共振曲線は傾かず、装置 C では右側に傾く漸硬形となり、これらの場合にも理論結果と実験結



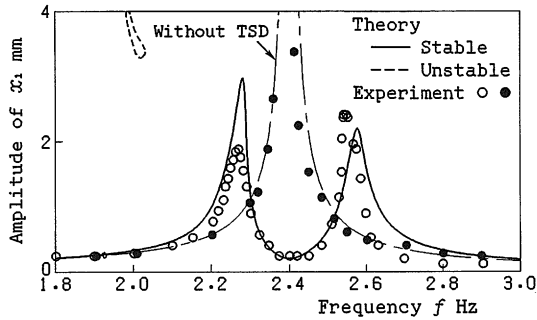


図7 実験結果と理論結果の比較  
(装置 B ;  $h/l=0.3$ )

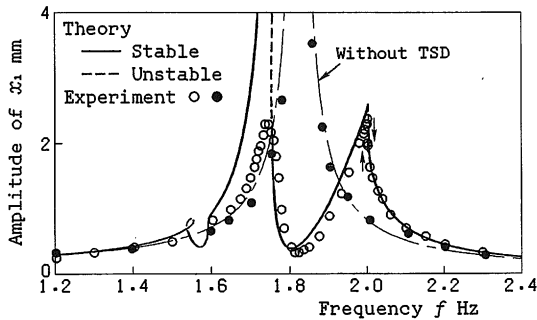


図8 実験結果と理論結果の比較  
(装置 C ;  $h/l=0.167$ )

果はほぼ一致した。従って、図2~4の理論結果のそれぞれに対応した図6~8が得られ、実験においても水深の減少につれ共振曲線が漸軟形から漸硬形へ移行し、理論解析の妥当性が確かめられた。

### 3. 円筒水槽内のスロッシングによる構造物の非線形振動

#### 3.1 理論解析

図9に理論解析モデルを示す。その座標系は図1と同じであるが、本章では半径  $R$  の円筒剛体容器、および極座標  $(r, \theta, z)$  を用いる。質量  $m$  の横方向の変位を  $x_1$ 、位置  $(r, \theta)$  での液面変位を  $\eta$  とする。ここで、次の無次元量を導入する。各記号の意味は第2章のものと同じである。

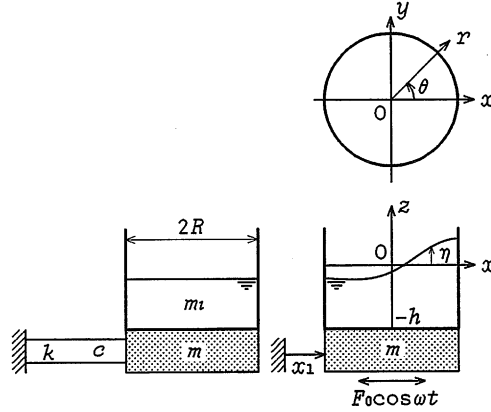


図9 理論解析モデル

$$\left. \begin{aligned}
 x_1' &= x_1/R, \eta' = \eta/R, \eta_1' = \eta_1/R, r' = r/R, \\
 z' &= z/R, h' = h/R, v_1 = m/M, v_2 = m_i/(\pi M h'), \\
 \phi' &= \phi/(R^2 p_{11}), k' = k/(M p_{11}^2), c' = c/(M p_{11}), \\
 \mu' &= \mu/p_{11}, F_i' = F_i/(M R p_{11}^2), P' = P/(\rho R^2 p_{11}^2), \\
 F_0' &= F_0/(M R p_{11}^2), \omega' = \omega/p_{11}, t' = p_{11} t, \xi_{mn} = \lambda_{mn} R
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに,  $M = m + m_i$ ,  $p_{11} = \sqrt{g \lambda_{11} \tanh(\lambda_{11} h)}$  である. また, 式(16)中の  $\lambda_{mn}$  は, 次式

$$\left. \frac{dJ_m(\lambda r)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad (17)$$

を満たす正根のうち, 小さい方から順に数えた第  $n$  番目の根である. ただし, 式(17)の  $J_m$  は  $m$  階の第1種ベッセル関数である. ここでは, 円筒容器内の液面の節直径が  $m$  個, および円周方向の節円が  $n$  個である振動モードを, 記号  $(m, n)$  モードで表す. 式(16)の無次元量を用いると, 連続の式, 圧力方程式, 構造物の運動方程式, および流体力の各式は次のように与えられる. ただし, 以下では, 無次元量を表す記号'はすべて省略する.

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r} \phi_r + \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta} + \phi_{zz} = 0 \quad (18)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2} \left[ \phi_r^2 + \frac{1}{r^2} \phi_\theta^2 + \phi_z^2 \right] + \frac{z}{\psi_1} + P - \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 + \mu \phi = -\dot{x}_1 r \cos \theta \quad (19)$$

$$v_1 \ddot{x}_1 + c \dot{x}_1 + k x_1 = F_i + F_0 \cos \omega t \quad (20)$$

$$F_i = v_2 \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{\eta_1} P_{r=1} \cos \theta dz d\theta \quad (21)$$

ここに, 式(18), (19)中の添字  $t, r, \theta, z$  は各変数に関する偏微分,  $\psi_1 = \xi_{11} \tanh(\xi_{11} h)$  であ

る。

液面の運動学的境界条件は、次式で与えられる<sup>13,10)</sup>。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \phi_z - \phi_r \eta_r - \frac{1}{r^2} \phi_\theta \eta_\theta \Big|_{z=\eta} \quad (22)$$

式(19)に対する境界条件として、次式を得る。

$$\phi_t + \frac{1}{2} \left[ \phi_r^2 + \frac{1}{r^2} \phi_\theta^2 + \phi_z^2 \right] + \frac{z}{\psi_1} - \frac{1}{2} \dot{x}_1^2 + \mu \phi \Big|_{z=\eta} = -\dot{x}_1 r \cos \theta \quad (23)$$

線形系の自由振動解析から得られる固有関数を用い、 $\phi$  および  $\eta$  の強制振動解をガレルキン法により求めるため、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{a_{mn}(t) \cos m\theta + b_{mn}(t) \sin m\theta\} J_m(\xi_{mn} r) \\ &\quad \times \cosh \{\xi_{mn}(z+h)\} / \cosh(\xi_{mn} h) \\ \eta(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \{c_{mn}(t) \cos m\theta + d_{mn}(t) \sin m\theta\} J_m(\xi_{mn} r) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式(24)中の  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$ ,  $c_{mn}$ ,  $d_{mn}$  は時間の未知関数である。 $a_{mn}$ ,  $c_{mn}$  は液面の面内運動成分,  $b_{mn}$ ,  $d_{mn}$  は面外運動成分を表す。ここでは、これらの成分のうち優勢な  $n=1$  である成分のみを考慮し、以下では各変数の第2添字  $n$  を省略する。

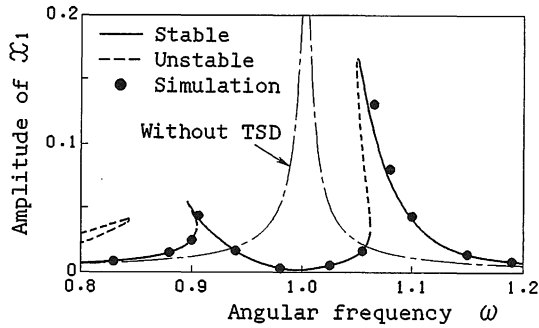
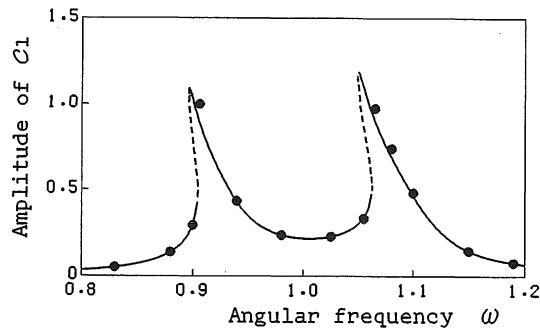
ここで、各量のオーダーを次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} a_1, b_1, c_1, d_1, x_1 &\sim O(\varepsilon^{1/3}) \\ a_2, b_2, c_2, d_2, a_0, c_0; c, \mu &\sim O(\varepsilon^{2/3}) \\ a_3, b_3, c_3, d_3; F_0 &\sim O(\varepsilon^{3/3}) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式(25)の仮定のもとで  $\eta$  を微小と考え、式(22), (23)を  $\eta=0$  の近傍においてテイラー展開した後の式に、式(24)を代入する。ガレルキン法を適用し、 $O(\varepsilon)$  の精度で両辺の  $J_0(\xi_0 r)$ ,  $J_m(\xi_m r) \cos m\theta$ ,  $J_m(\xi_m r) \sin m\theta$  ( $m=1, 2, \dots$ ) の係数を等置すると、時間の未知関数に関する微分方程式が得られる。また、式(19)より得られる圧力  $P$  を式(21)に代入して、式(25)の仮定のもとで積分計算を行い、式(20)を  $O(\varepsilon)$  の精度で書き換える。このようにして、未知関数  $a_i, b_j, c_i, d_j$  ( $i=0, 1, 2; j=1, 2$ )、および  $x_1$  を決定するための常微分方程式、すなわち式(14)と同様な構成のモード方程式が得られる<sup>[4]</sup>。第2章と同様にして、このモード方程式の調和振動解を仮定することにより解析的に精度よく共振曲線を求めることができる<sup>[4]</sup>。

### 3.2 数値計算例

本節では、構造物の固有振動数とスロッシングモード (1, 1) の固有振動数  $p_{11}$  が等しい同調条件、すなわち無次元表示で  $\sqrt{k/(v_1 + v_2 \pi h)} = p_{11}$  ( $=1.0$ ) が満たされるようなパラメ

(a)  $x_1$  の  $\omega$  成分の振幅(b)  $b_1$  の  $\omega$  成分の振幅(b)  $b_1$  の  $\omega$  成分の振幅図10 共振曲線 ( $h=1.2$  の場合)

ータの値を選ぶ。

まず、外力が比較的小さく液面の面内振動が現れる場合を扱う。図10(a), (b)に、水深が深い場合、すなわち  $h=1.2$ ,  $v_1=0.92$ ,  $v_2=0.02$ ,  $k=1.0$ ,  $c=0.01$ ,  $\mu=0.021$ ,  $F_0=0.0024$  のときの構造物、液面の共振曲線を示す。共振曲線の形状は漸軟形である。容器液面の深さがさらに減少するにつれ、共振曲線の形状の変化は、長方形容器の場合の図2~4と同様となり、漸軟形から漸硬形に変化することがわかった。

次に、外力が大きい場合について述べる。図10の場合から  $F_0=0.004$  に変え、モード方程式中の外力項  $F_0 \cos \omega t$  の  $\omega t$  の代わりに、 $\omega_s t + (1/2)\alpha t^2$  と置き換えて掃引正弦波加振した場合のシミュレーション結果を図11に示す。ただし、 $\omega_s$  は  $\omega$  の初期値 (0.8, または 1.2) であり、角加速度  $\alpha$  には、 $\alpha = \pm 0.00001$  を与えた。細線は増速時の、太線は減速時の最大振幅の包絡線を表す。図中の●印は、 $\alpha=0$  とした正弦加振時のシミュレーション波形に含まれる振動数  $\omega$  成分の振幅を表す。図11の応答曲線は、 $\alpha$  が十分小さいので正弦加振の場合の共振曲線とほぼ一致している。図10では現れないピーク  $P_1$ ,  $P_2$  や応答の履歴現象

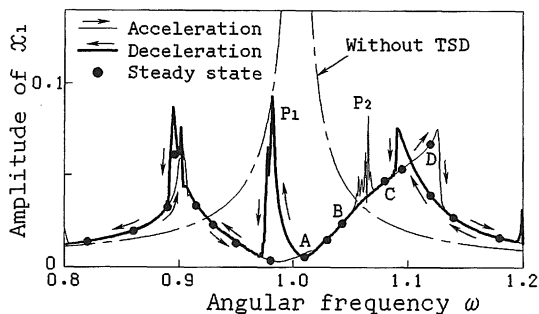


図11 正弦掃引加振による  $x_1$  の応答曲線  
(図10から  $F_0=0.004$  に変えた場合)

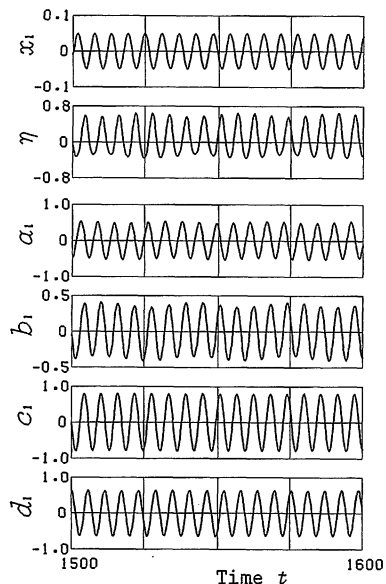


図12 定常応答波形 (図11の点 C ;  
 $\omega=1.08$ )

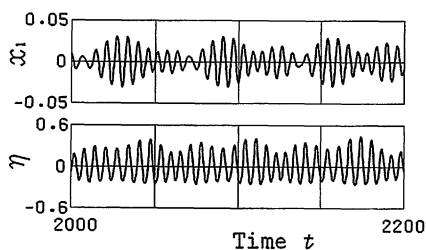


図13 超和差調波振動の波形 (図11のピーク  $P_1$  付近 ;  $\omega=0.99$ )

が見られる。

図12に、図11の点 C ( $\omega=1.08$ ) における定常波形を示す。ただし、液面変位の計測位置は  $(r, \theta) = (1, 0)$  である。面外振動成分  $b_1, d_1$  にも波形が現れ、液面の節直径は、1 周期の間に 2 回の角速度変動があり平均角速度  $\omega$  で左旋回 ( $\theta$  の正方向) することがわかる<sup>[5]</sup>。このような液面の旋回運動は、図11の AB 間、CD 間の付近で現れる。

図13は、図11のピーク  $P_1$  付近 ( $\omega=0.99$ ) に現れる定常波形を示す。この系の固有振動数は  $q_1=0.927, q_2=1.097$  であり、 $\omega$  以外に発生する 2 つの振動数  $\omega_1 (=0.891), \omega_2 (=1.089)$  は各固有振動数にほぼ等しく、かつ  $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$  の関係式が成立していること

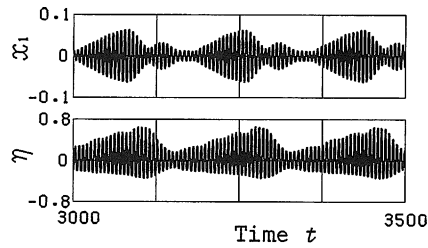


図14 概周期振動の波形 (図11のピーク  $P_2$  付近;  $\omega=1.06$ )

から、この種の振動は超和差調波振動<sup>14)</sup>であることがわかる。

次に、図14に、図11のピーク  $P_2$  付近、すなわち  $\omega=1.06$  における波形を示す。初期値から十分時間が経過しているにもかかわらず振幅は一定とはならず、比較的長い周期で同じ波形が繰り返される概周期振動となっている。

### 3.3 実験装置および実験結果

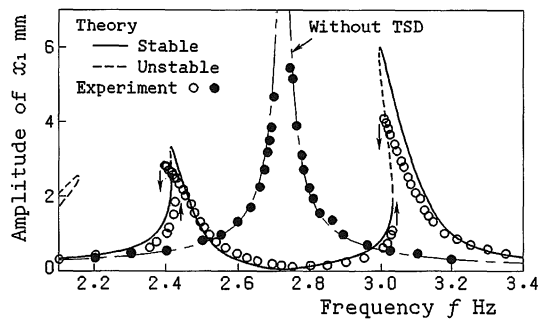
実験装置の構成は、図5とほぼ同様であり、片持りの先端に円筒容器を有する質量  $m$  を取り付けた。液面変位  $\eta$  の計測用変位センサ  $S_2$  の設置位置は  $r=15\text{ mm}$ ,  $\theta=\pi$  である。実験では、表2に示すような装置 A, B, C, D を用いた。  $F_0$  の値は、主振動系に対する共振曲線の理論式を用いて最小自乗法により算出した。各装置の同調条件は、主振動系の固有振動数  $p_0=1/(2\pi)\sqrt{k/M}$  Hz とスロッシングの (1, 1) モードの固有振動数  $p_{11}$  が等しくなるように設定した。

図15(a), (b)は、それぞれ装置 A に対する構造物と液面の共振曲線を示す。まず、一点鎖線と●印はよく一致していることから、上記の  $F_0$  の算定方法が妥当であることがわかる。この場合には水深は比較的深く ( $h/R=1.2$ )、共振曲線の形状は漸軟形となり、理論結果ともよく一致している。

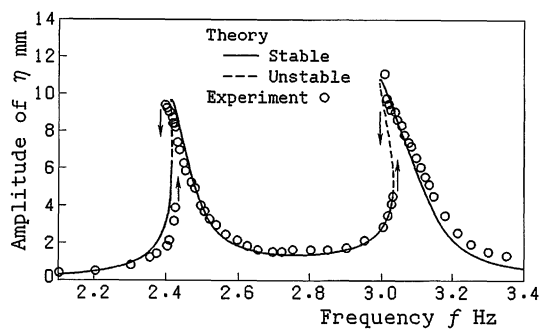
図16, 17は、それぞれ装置 B ( $h/R=0.5$ )、および装置 C ( $h/R=0.235$ ) に対する構造物の共振曲線を示す。図16の共振曲線は傾いていない。図17では、水深が浅いため共振曲線

表2 装置 A, B, C, D の諸元

Apparatus	A	B	C	D
Structure Mass $m$ Kg	4.787	5.931	7.028	5.182
Spring Constant $k$ N/m	1641	1606	687	1992
Damping Coefficient $c$ Ns/m	0.983	0.507	0.485	0.911
Tank Radius $R$ m	0.06	0.05	0.085	0.05
Water Depth $h$ m	0.072	0.025	0.020	0.06
Water Mass $m_l$ Kg	0.804	0.197	0.454	0.472
Viscosity $\mu$ 1/s	0.346	0.532	0.341	0.391
Force $F_0$ N	0.209	0.0968	0.162	0.424
Natural frequency $p_0$ Hz	2.727	2.576	1.525	2.987



(a)  $x_1$  の振幅



(b)  $\eta$  の振幅

(b)  $\eta$  の振幅  
 図15 実験結果と理論結果の比較  
 (装置 A ;  $h/R=1.2$ )

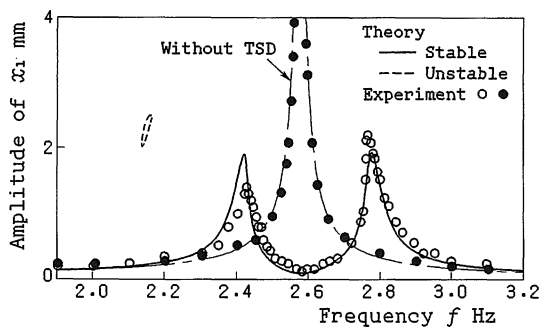


図16 実験結果と理論結果の比較  
 (装置 B ;  $h/R=0.5$ )

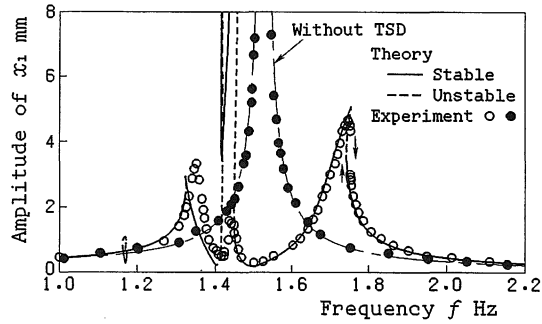


図17 実験結果と理論結果の比較  
(装置 C ;  $h/R=0.235$ )

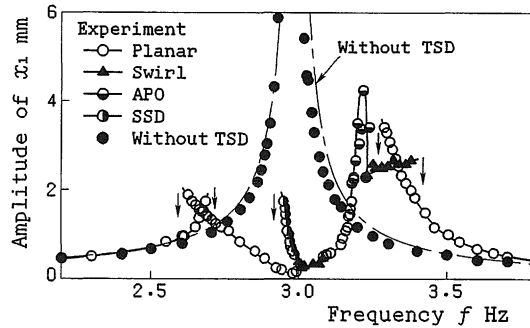


図18 実験による  $x_1$  の共振曲線  
(装置 D ;  $h/R=1.2$ , 力が大きい場合)

は漸硬形となり、また  $f=1.44$  Hz 付近に現れたピークは  $2f$  の振動数成分の共振による。

図18は、装置 D、すなわち水深が深く、外力が比較的大きい場合に対する構造物の共振曲線を示す。○印は液面の面内運動 (Planar)、▲印は旋回運動 (Swirl)、●印は超和差調波振動 (SSD: Super-Summed-and-Differential Harmonic Oscillation)、◐印は概周期振動 (APO: Almost Periodic Oscillation) が発生した場合の全振幅を表す。このように、比較的大きい外力が作用する場合には、同調点付近に超和差調波振動が発生し TSD による制振効果が損なわれるため、実際の構造物に TSD を適用する際には注意が必要である。

#### 4. 鉛直励振を受ける構造物と長方形容器内スロッシングの非線形連成振動

##### 4.1 理論解析

図19に理論解析モデルを示す。図1と同様に  $x$  軸を静止液面にとり、容器とともに移動する直角座標系  $O-xyz$  を考える。液体の挙動は  $xz$  平面内の二次元問題に限定する。一般の



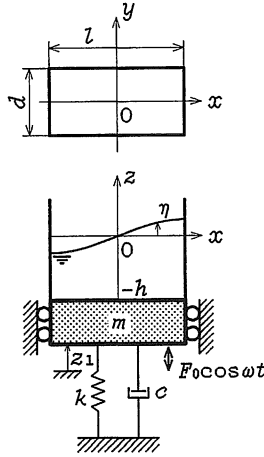


図19 理論解析モデル

弾性構造物を、質量  $m$ 、ばね定数  $k$ 、減衰係数  $c$  をもつ 1 自由度系にモデル化し、質量  $m$  の静止状態からの鉛直変位を  $z_1$  とする。  $F_0 \cos \omega t$  は鉛直方向の正弦外力である。他のパラメータの意味は第 2 章と同じである。ここで、式(1)に加え無次元量  $z_1' = z_1/l$  を導入する。流体挙動に対する連続の式は、2 章の式(3)で与えられる。圧力方程式は次式で与えられる。以下では無次元量を表す記号' を省略する。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_z^2) + \frac{z}{\psi_1} + P - \frac{1}{2} z_1'^2 + \mu \phi = -\ddot{z}_1 z \quad (26)$$

ここに  $\psi_1 = \lambda_1 \tanh(\lambda_1 h)$  である。容器壁面と底面における流速の境界条件、および液面の運動学的境界条件は、式(5)~(7)で与えられる。式(26)に対する境界条件は次式となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_z^2) + \frac{z}{\psi_1} - \frac{1}{2} z_1'^2 + \mu \phi + \ddot{z}_1 z \Big|_{z=\eta} = 0 \quad (27)$$

構造物についての運動方程式は、次式となる。

$$v\ddot{z}_1 + c\dot{z}_1 + kz_1 = F_l + F_0 \cos \omega t + dh/\psi_1 \quad (28)$$

式(28)中の流体力  $F_l$  は、次式で与えられる。

$$F_l = -d \int_{-1/2}^{1/2} P(x, z, t) \Big|_{z=-h} dx \quad (29)$$

式(29)の  $P(x, z, t)$  は式(26)より得られる。

線形系の自由振動解析から得られる固有関数を用い、 $\phi$  および  $\eta$  の強制振動解を次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, z, t) &= a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_{2n-1}(t) \sin(\lambda_{2n-1}x) \cosh\{\lambda_{2n-1}(z+h)\} / \cosh(\lambda_{2n-1}h) \right. \\ &\quad \left. + a_{2n}(t) \cos(\lambda_{2n}x) \cosh\{\lambda_{2n}(z+h)\} / \cosh(\lambda_{2n}h) \right] \\ \eta(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ b_{2n-1}(t) \sin(\lambda_{2n-1}x) + b_{2n}(t) \cos(\lambda_{2n}x) \} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

上式中の  $a_0, a_n, b_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) は時間の未知関数である。変数  $a_{2n-1}, b_{2n-1}$  は液面の非対称モード成分,  $a_{2n}, b_{2n}$  は対称モード成分を表す。

いま, 式(28)で表される構造物系の固有振動数を  $p_0 \equiv \sqrt{k/(v+dh)}$  と定義し, 本章では  $p_0 \approx 2p_1$  の内部共振の条件が満たされ,  $p_0 \approx \omega$  付近における応答挙動を考える。ここで各量を次式

$$\left. \begin{aligned} a_1, b_1; c, \mu &\sim O(\varepsilon^{1/3}) \\ a_0, a_2, b_2 &\sim O(\varepsilon^{2/3}) \\ F_0 &\sim O(\varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

のように仮定する。ただし, 式(31)に示されていない  $a_n, b_n$  のオーダーは  $O(\varepsilon)$  よりも小さいとする。流体力の変形非線形性を考慮し, 2章, 3章と同様な手順に従うことにより, 次のモード方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 \ddot{z}_1 + c \dot{z}_1 + k z_1 + Q_2 \dot{a}_0 + \mu Q_2 a_0 + Q_3 a_1^2 + Q_4 \dot{z}_1^2 &= F_0 \cos \omega t \\ \dot{a}_1 + \mu a_1 + \left( \frac{1}{\psi_1} + \dot{z}_1 \right) b_1 - \frac{1}{2} \psi_1 \dot{a}_1 b_2 - \frac{1}{2} \psi_2 \dot{a}_2 b_1 + Q_5 \dot{a}_1 b_1^2 + Q_6 a_1 a_2 + Q_7 a_1^2 b_1 &= 0 \\ \dot{b}_1 - \psi_1 a_1 + Q_8 a_1 b_2 + Q_9 a_2 b_1 + Q_{10} a_1 b_1^2 &= 0 \\ \dot{a}_0 + \mu a_0 + \frac{1}{2} \psi_2 \dot{a}_1 b_1 + Q_{11} a_1^2 - \frac{1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} \mu \psi_1 a_1 b_1 &= 0 \\ \dot{a}_2 + \mu a_2 + \left( \frac{1}{\psi_1} + \dot{z}_1 \right) b_2 - \frac{1}{2} \psi_1 \dot{a}_1 b_1 + Q_{12} a_1^2 - \frac{1}{2} \mu \psi_1 a_1 b_1 &= 0 \\ \dot{b}_2 - \psi_2 a_2 + Q_{13} a_1 b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここに,  $\psi_n = \lambda_n \tanh(\lambda_n h)$  であり,  $Q_i$  ( $i=1 \sim 13$ ) は既報<sup>[7]</sup>に示す。

モード方程式(32)の数値シミュレーション波形を基に, 同調点  $p_0 \approx 2p_1 \approx \omega$  付近における式(32)の強制振動解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= u_1 \cos \omega t - v_1 \sin \omega t \\ a_1 &= u_2 \cos \frac{1}{2} \omega t - v_2 \sin \frac{1}{2} \omega t + c_2 \cos \frac{3}{2} \omega t - d_2 \sin \frac{3}{2} \omega t \\ b_1 &= u_3 \cos \frac{1}{2} \omega t - v_3 \sin \frac{1}{2} \omega t + c_3 \cos \frac{3}{2} \omega t - d_3 \sin \frac{3}{2} \omega t \\ a_2 &= e_1 \cos \omega t - f_1 \sin \omega t \\ b_2 &= e_2 \cos \omega t - f_2 \sin \omega t + r_2 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ここに、右辺の未知変数は時間的に緩やかに変化し、そのオーダーは式(31)に従うとする。また、各変数を時間で微分することに  $O(\varepsilon^{2/3})$  だけ小さくなるとする。式(33)を式(32)に代入し、 $O(\varepsilon)$  の精度で各振動数成分について調和バランスをとると、未知数  $u_i, v_i, c_i, e_i, f_i, r_2$  に関する常微分方程式を得る。その式から数値的に定常解を求めることができ、その安定判別も行える。

#### 4.2 数値計算例

図20(a), (b)は、それぞれ構造物の鉛直変位  $z_1$  (振幅  $\sqrt{u_1^2 + v_1^2}$ )、液面スロッシングの対称1次モード  $b_1$  (振幅  $\sqrt{u_3^2 + v_3^2}$ ) についての共振曲線を示す。パラメータの値には後述の実験装置にほぼ対応する値を選び、 $\nu=0.930, k=4.0, h=0.6, d=0.116, c=0.02, \mu=0.025$ , および  $F_0=0.0013$  とした。このとき、 $p_0=2p_1 (=2.0)$  の同調条件が満たされている。理論解析による共振曲線と数値シミュレーション結果はよく一致している。図20(a)において孤立した不安定な分枝  $P_1$  は、図20(b)の分枝  $P_2$  に対応する。曲線  $A_1B_1C_1D_1$  は主系の共振曲線と完全に一致し、それに対応する曲線  $A_2B_2C_2D_2$  の振幅は零である。線形系では区間 BC は振幅が発散する不安定領域となるが、非線形連成のため安定な分枝 EFC が現れている。分枝  $E_1F_1C_1, E_2F_2C_2$  上では、それぞれ振動数  $\omega$  の調和振動、振動数  $(1/2)\omega$  の分数調波振動が発生する。

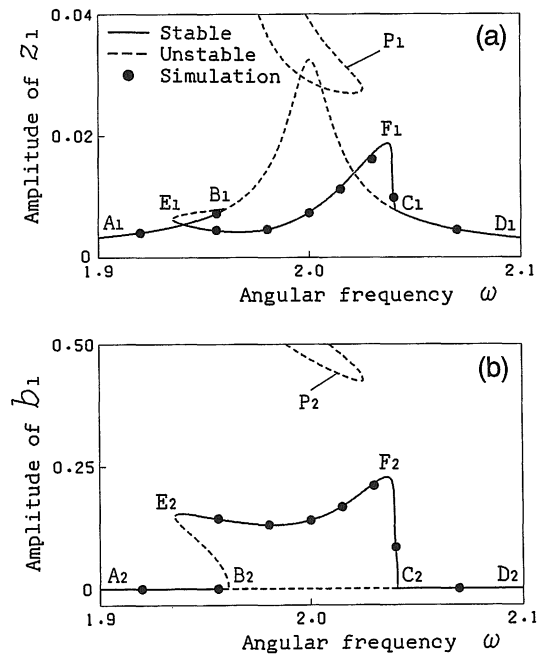


図20  $h=0.6$  の場合の共振曲線：(a)  $z_1$  の  $\omega$  成分の振幅、(b)  $b_1$  の  $(1/2)\omega$  成分の振幅

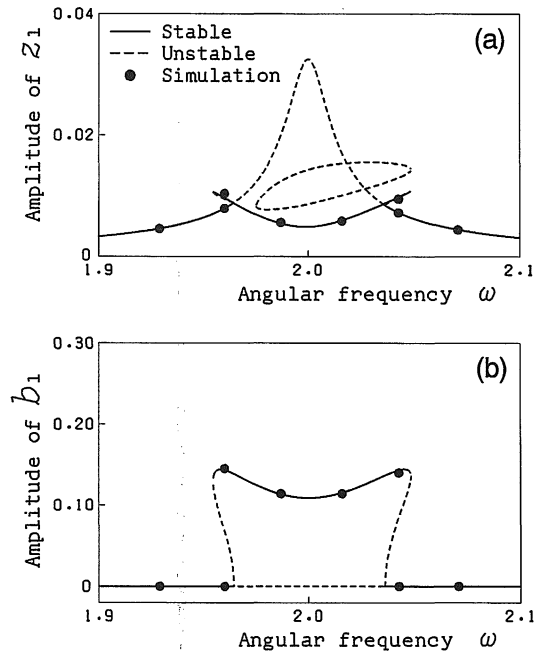


図21  $h=0.35$  の場合の共振曲線：(a)  $z_1$  の  $\omega$  成分の振幅，(b)  $b_1$  の  $(1/2)\omega$  成分の振幅

図21(a), (b)に、水深を変えた場合の共振曲線を示す。図20と異なるパラメータの値だけを示すと、 $h=0.35$ ,  $d=0.2$ である。この場合には構造物の主振動系に対する共振ピーク部分が消滅しており、液体容器の制振効果がよく現れている。

次に、離調パラメータ  $\sigma_1 \equiv p_0 - 2p_1$  を定義し、同調条件のずれ（すなわち、内部共振の条件のずれ）の影響を調べる。図22に、図20から構造物のばね定数だけを  $k=3.80$  に変えた場合の共振曲線を示す。このとき  $\sigma_1 = -0.0503$  である。図22では、図20の分枝 EF に対応する安定な分枝上に、定常解が不安定となる区間 GH が現れる。細い縦線はモード方程式(32)の数値シミュレーション波形の変動振幅を表す。

図23に、図22の  $\omega=1.943$  [図23(a), (b)], および  $\omega=1.946$  [図23(c), (d)]における数値シミュレーション波形、および  $(z_1, \dot{z}_1)$  平面上のポアンカレマップを示す。 $\omega=1.943$  では同じ波形が繰り返される概周期振動が発生し、 $\omega=1.946$  に変化すると振幅の変調が不規則となるカオスの振動に移行することわかる。

### 4.3 実験装置および実験結果

図24に実験装置を示す。片持りの先端に T 字型の構造物を取り付け、その構造物は支持部に玉軸受を装着した 2 本のアームによって支持され、近似的に鉛直運動をするように組み立てられている。構造物の上には長方形水槽容器を取り付け、薄いアルミニウム板を介

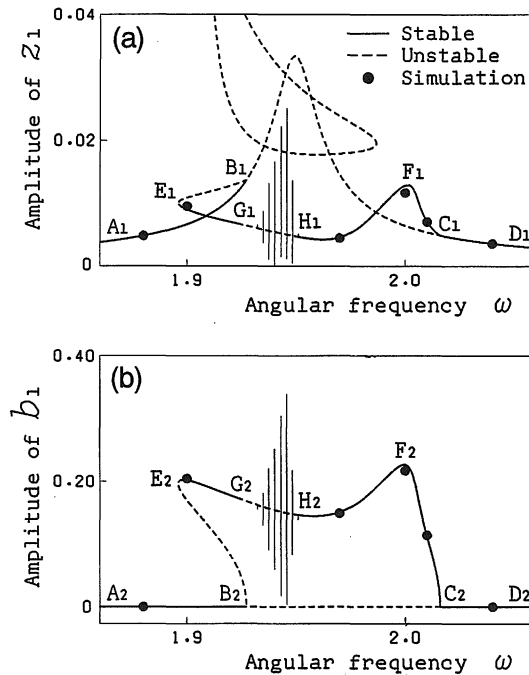


図22 共振曲線に及ぼす離調パラメータ  $\sigma_1$  の影響：  
 (a)  $z_1$  の  $\omega$  成分の振幅，(b)  $b_1$  の  $(1/2)\omega$  成分の振幅

して構造物を電磁加振器で正弦加振し，レーザー式変位センサ  $S_1, S_2$  により構造物変位  $z_1$  と液面変位  $\eta$  を測定した．表 3 に，装置 A, B, C の諸元を示す．各装置では，構造物の固有振動数  $p_0 [(1/2\pi)\sqrt{k/M} \text{ Hz}]$  と液面スロッシングの固有振動数  $p_1 [(1/2\pi)\sqrt{g\lambda_1 \tanh(\lambda_1 h)} \text{ Hz}]$  との間に  $p_0 \doteq 2p_1$  の同調条件がほぼ満たされている．

図25(a), (b)は，水深が  $h=60 \text{ mm}$  ( $h/l=0.60$ ) の比較的深い場合に，それぞれ実験によって得られた構造物および液面の共振曲線を示す．○，●印は，それぞれ長方形水槽をもつ場合，および水を同じ質量の物体に置き換えた主振動系の場合に，実験で得られた振動波形の全振幅を表す．同図中には非線形解析の計算結果も示してあり，その解析結果は定量的に実験結果とよく一致していることがわかる．

図26は，水深が  $h=35 \text{ mm}$  ( $h/l=0.35$ ) の比較的浅い装置 B を用いた場合の共振曲線である．この共振曲線の形状は図21の解析結果と類似している．

図27に，固有振動数  $p_0$  が装置 A よりわずかに小さい装置 C で得られた共振曲線を示す．このときの同調条件のずれは  $\sigma_1 = -0.093 \text{ Hz}$  であった．図中の区間  $G_1H_1$  ( $G_2H_2$ ) では●印で表された最大振幅となり， $f=5.33 \text{ Hz}$  では図28に示すような振幅が変調する概周期振動 (Almost Periodic Oscillation) が観察された．

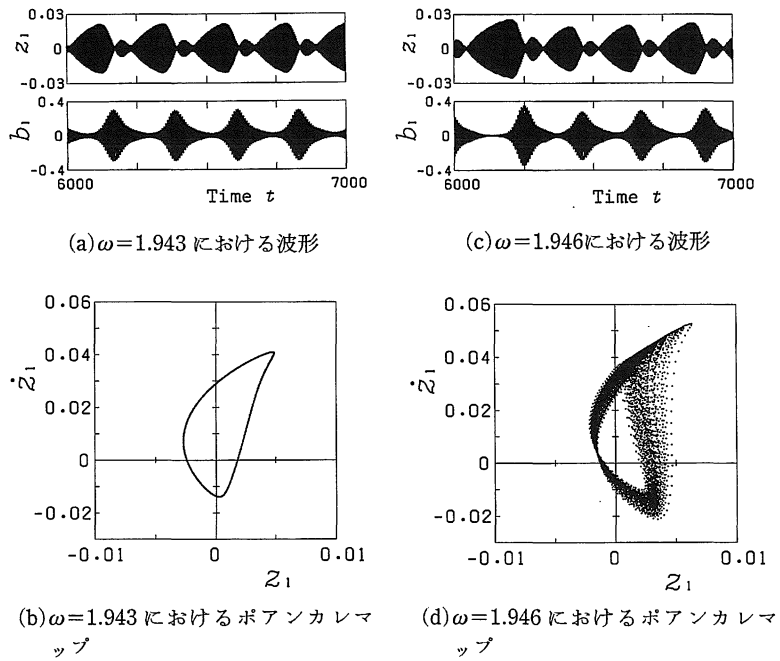


図23 区間GH (図21の  $\omega=1.943, 1.946$ ) における定常振動波形とポアンカレマップ

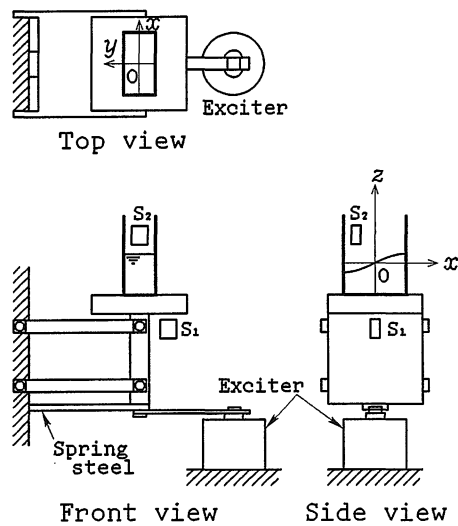


図24 実験装置の概略

表3 装置 A, B, C の諸元

Apparatus	A	B	C
Structure mass: $m$ kg	4.807	5.038	5.025
Spring constant: $k$ N/m	6036	5128	5919
Damping coefficient: $c$ Ns/m	1.178	1.133	1.240
Tank length: $l$ mm	100	100	100
Tank width: $d$ mm	60	60	85
Water depth: $h$ mm	60	35	60
Water mass: $m_l$ kg	0.359	0.210	0.509
Viscosity: $\mu$ 1/s	0.439	0.440	0.439
Force: $F_0$ N	0.112	0.0935	0.241
Position of sensor $S_2$ : $x$ mm	34.0	19.0	14.0
Natural frequency: $p_0$ Hz	5.44	4.98	5.21
Natural frequency: $p_1$ Hz	2.73	2.50	2.73

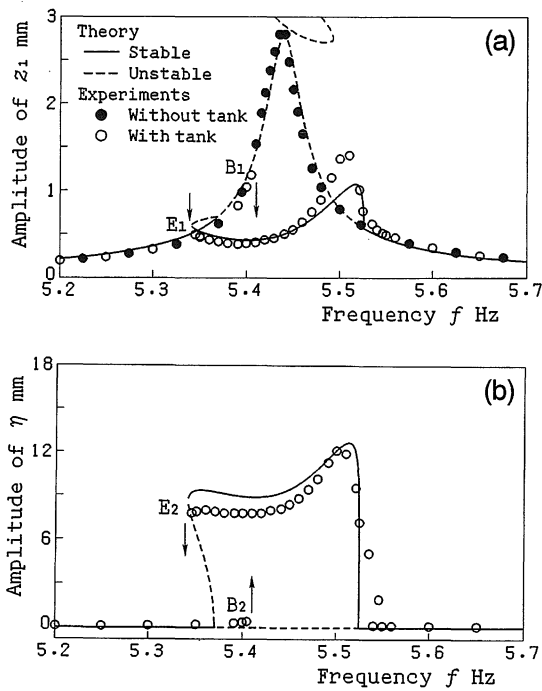


図25 実験結果と理論結果の比較 (装置 A ;  $h/l=0.60$ ) : (a)  $z_1$  の振幅, (b)  $\eta$  の振幅

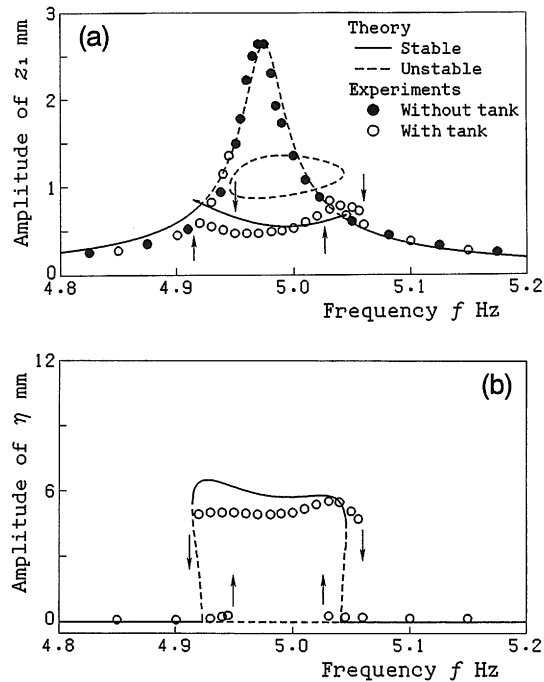


図26 実験結果と理論結果の比較 (装置 B ;  $h/l=0.35$ ) : (a)  $z_1$  の振幅, (b)  $\eta$  の振幅

## 5. 結 言

長方形水槽,あるいは円筒水槽が取り付けられた弾性構造物に水平方向の正弦外力が作用する場合,スロッシングによる構造物の非線形振動について理論解析を行い,系の優勢な振動モードを支配するモード方程式,および共振曲線を導き,それらが実験結果と定量的によく一致することを示した.また,比較的外力が大きい場合には,同調点付近に特異な振動が現れることを指摘した.従って,本解析により液体容器ダンパーとしての制振効果についての定量的な評価が可能となった.

また,長方形水槽をもつ弾性構造物が鉛直方向の正弦励振を受ける場合については,液体の深さや同調条件のずれが共振曲線に及ぼす影響を調べ,理論解析結果は実験結果と定量的によく一致することを確認した.水平加振と同様に,鉛直加振を受ける構造物の制振に対しても液体容器の有効性が示された.



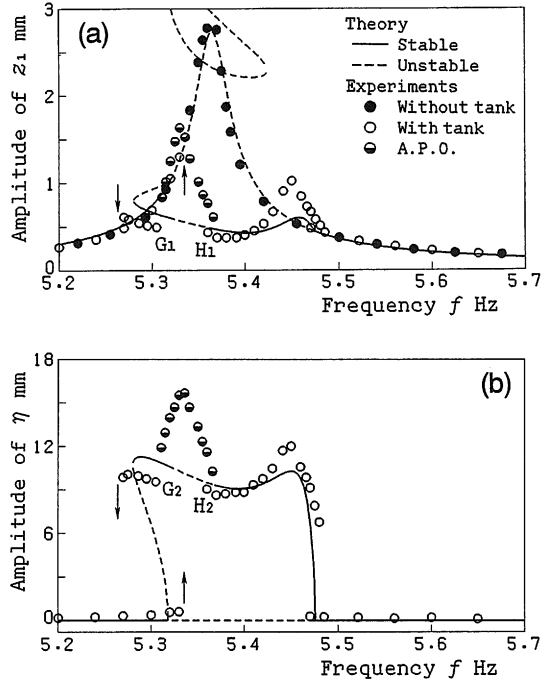


図27 実験結果と理論結果の比較 (装置C;  $h/l=0.60$ ): (a)  $z_1$  の振幅, (b)  $\eta$  の振幅

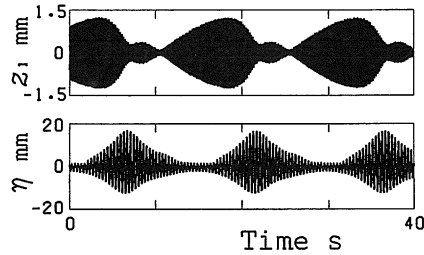


図28 装置Cで観察された概周期振動の波形 ( $f=5.33$  Hz)

発表論文

- [1] 池田 隆, 堀 正洋, 中川紀壽, “長方形水槽内のスロッシングによる構造物の非線形振動”, 日本機械学会論文集C編, 60-573 (1994), pp. 1517-1525.
- [2] Ikeda, T. and Nakagawa, N., ‘Non-Linear Vibrations of a Structure Caused by Water Sloshing in a Rectangular Tank’, *Journal of Sound and Vibration*, 201-1 (1997), pp. 23-41.

- [3] Ikeda, T. and Nakagawa, N., "Nonlinear Vibrations of a Structure Caused by Water Sloshing in a Cylindrical Tank", *Proceedings of the 1995 Joint ASME/JSME Pressure Vessels and Piping Conference*, PVP-Vol. 310 (1995), pp. 63-76.
- [4] 池田 隆, 平山壽和, 中川紀壽, "円筒水槽内のスロッシングによる構造物の非線形振動 (第1報, 液面の面内運動が現れる場合)", 日本機械学会論文集 C 編, 61-591 (1995), pp. 4131-4139.
- [5] 池田 隆, 平山壽和, 中川紀壽, "円筒水槽内のスロッシングによる構造物の非線形振動 (第2報, 外力が比較的大きい場合に発生する特異な振動)", 日本機械学会論文集 C 編, 61-591 (1995), pp. 4140-4147.
- [6] 池田 隆, 山崎正信, 中川紀壽, "垂直励振を受ける構造物と水槽内スロッシングの連成振動", 日本機械学会 VSTech '95 振動・音響新技術シンポジウム講演論文集, No. 95-16 (1995), pp. 128-131.
- [7] 池田 隆, 山崎正信, 中川紀壽, "鉛直励振を受ける弾性構造物と長方形容器内スロッシングの連成振動 (第1報, 液体の深さによる共振曲線の変化)", 日本機械学会論文集 C 編, 掲載予定.

#### 参 考 文 献

- 1) Modi, V. J. and Welt, F., *Proceedings of International Conference on Flow Induced Vibration*, (1987), 369.
- 2) 宮田・ほか2名, 構造工学論文集, 34A (1988), 617.
- 3) 萩生田, 三井造船技報, 137 (1989), 13.
- 4) 野路・ほか4名, 日本建築学会構造系論文集, 411 (1990), 97.
- 5) 植田・ほか4名, 日立造船技報, 52-1 (1991), 25.
- 6) 藤野・ほか4名, 構造工学論文集, 35A (1989), 561.
- 7) 石川・金子, 日本機械学会講演論文集, 910-39 (ⅢB) (Vol. B), (1991), 243.
- 8) Welt, F. and Modi, V. J., *Transaction of ASME*, 114-1 (1992), 10.
- 9) Peterson, L. D., ほか2名, *AIAA Journal*, 27-9 (1989), 1230.
- 10) Ibrahim, R. A. and Barr, A. D. S., *Journal of Sound and Vibration*, 42-2 (1975), 159.
- 11) Ibrahim, R. A., *Transaction of ASME, EI*, 98 (1976), 1092.
- 12) Ibrahim, R. A., ほか2名, *Journal of Sound and Vibration*, 121-3 (1988), 413.
- 13) 木村・ほか3名, 日本機械学会論文集, 58-556, C(1992), 3564.
- 14) 山本・ほか2名, 日本機械学会論文集, 41-342 (1975), 443.