

# 非共軸項を導入した修正 Cam-clay モデルによる 平面ひずみ非排水圧縮試験の分岐解析

志比 利秀\*・亀井 健史\*・西開地一志\*\*

\*島根大学総合理工学部 地球資源環境学科

\*\*島根大学大学院総合理工学研究科 地球資源環境学専攻

Bifurcation Analysis using a Model that Incorporates a Non-coaxial Term in the Modified  
Cam-clay Model under Plane Strain Undrained Compression Loading

Toshihide SHIBI\*, Takeshi KAMEI\* and Kazushi NISHIKAICHI\*\*

\*Department of Geoscience, Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

\*\*Department of Geoscience, Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,  
Graduate School of Shimane University

## Abstract

It is well known that the Cam-clay model overpredicts the observed values of strain-increments for changes of stress ratio ( $\eta$ ) at small values of  $\eta$ , even though excellent agreement is found for changes of  $\eta$  at large values of  $\eta$ . However, strains predicted by the modified Cam-clay model are shown to be in excellent agreement with observation. This paper first presents a model (termed a non-coaxial modified Cam-clay model) which incorporates a non-coaxial term in the modified Cam-clay model. Secondly, we carried out bifurcation analysis using the model presented in this paper during undrained shear under plane strain condition.

Results of bifurcation analysis using the non-coaxial modified Cam-clay model were then compared with the results of bifurcation analysis using the non-coaxial Cam-clay model. Bifurcation stress ratio using the non-coaxial modified Cam-clay model is larger than that using the non-coaxial Cam-clay model. Predicted slip surfaces from the distributions of maximum shear strain, effective mean normal stress, generalized stress deviator, pore water pressure and stress ratio are almost the same and resemble slip surfaces that are actually observed. This is not based on the difference between non-coaxial modified Cam-clay and non-coaxial Cam-clay model.

## 1. はじめに

地盤が破壊する場合には、一般にすべり面のようなものが観察される。現場ではよく見えないことが多いが、明らかに壊れた地盤とまだ壊れていない地盤の間には、境界が存在し、これがすべり面とみなされる。また、地盤の安定解析では、暗黙のうちにすべり面の存在を仮定するところから始められる。このとき、すべり面の位置および形態はともかくとして、すべり面が必ず存在すると考えている。したがって、何らかの理論的帰結としてすべり

面の存在が証明されているわけではない。従来の地盤工学においては、地盤の破壊をこのような逆解析的な観点から捉えてきていた。

一方、分岐解析を用いれば、粘土供試体の一様変形から非一様変形への変形挙動を解析的に表すことが可能であり、その結果供試体に形成されるすべり面の位置および形態を推察することが可能である。すなわち、順解析的にすべり面の形成を表現することができる。

これまで、有限変形非共軸 Cam-clay モデル<sup>1)</sup>を用いた分岐解析が行われている<sup>2)~6)</sup>。その分岐解析では、粘土のせん断変形の進行を応力比の増加により表現し、粘土供試体の一様変形挙動から非一様変形挙動へ移行（分岐）するときの応力比、すわなち分岐荷重を明らかにしている<sup>2)~4),6)</sup>。また、そのときの最大せん断ひずみや応力状態量（平均有効主応力、偏差応力、間隙水圧、応力比）の分布性状からすべり面の発生位置などを予測している<sup>2),3),5),6)</sup>。しかしながら、分岐解析で用いられてきた構成方程式の基となっている Cam-clay モデル<sup>7)</sup>は、応力比が大きな範囲においては応力比の変化に対するひずみの増分をかなりの精度で予測することが可能であるが、応力比が小さな範囲においては応力比の変化に対するひずみの増分を過大評価する傾向にある。一方、Cam-clay モデルに新たな概念を導入して改善したモデルに修正 Cam-clay モデル<sup>8)</sup>がある。このモデルは、せん断初期に塑性体積ひずみが発生するという矛盾点を解消しており、応力比の増分に対するひずみ増分を高い精度で予測することが可能である。

本研究では、より精度の高い解析を実施するために、修正 Cam-clay モデルを用いた分岐解析を試みる。まず修正 Cam-clay モデルに非共軸項を導入して、新たなモデルを提案した。そのモデルを用いて平面ひずみ非排水圧縮条件下において分岐解析を行い、一様変形挙動から非一様変形挙動へ移行するときの分岐荷重を明らかにしている。さらに分岐時の最大せん断ひずみや応力状態量の分布を示し、すべり面の発生位置および形状について予測を行った。また、Cam-clay モデルを用いた場合との比較検討も行っている。

## 2. 非共軸項を導入した修正 Cam-clay モデル

Roscoe *et al.*<sup>7)</sup>によって提案された Cam-clay モデルは、粘土の圧密・せん断挙動を統一的に表現することが可能なモデルであり、そのモデルに必要な土質定数は、自然対数表示による圧縮指数  $\lambda$  と膨潤指数  $\kappa$ 、間隙比  $e$ 、限界状態における応力比  $M$  の 4 つと非常に少ない。しかしながら、このモデルから得られたひずみと応力比の関係は、応力比  $\eta$  の大きな範囲では、ひずみと応力比の実測値をよい精度で表現できるが、せん断初期の応力比  $\eta$  の小さな範囲では、応力比増分に対するひずみ増分を過大評価する傾向にある。一方、修正 Cam-clay モデル<sup>8)</sup>では、単位体積当たり消費される仕事に新たな仮定を加え、新たな降伏関数を提案することにより、上述の傾向を改善している。本研究では、この改善された修正 Cam-clay モデルに非共軸項を導入することにより新たなモデルを提案することとする。まず、修正 Cam-clay モデルに非共軸項を導入するために、まず修正 Cam-clay モデルを有限変形モデルに拡張する。その後、有限変形に拡張された修正 Cam-clay モデルに非共軸項を導入する。

まず、全 Cauchy 応力  $\mathbf{T}$ 、有効 Cauchy 応力  $\mathbf{T}'$  と間隙水圧  $u$  の間に次式で与えられる有効応力の原理を仮定する。

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} + u\mathbf{I} \quad (1)$$

このとき、平均有効主応力  $p'$  と一般化された偏差応力  $q$  は、それぞれ次式で定義される。

$$p' = -\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T}', \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{S}$  は有効 Cauchy 応力  $\mathbf{T}'$  の偏差成分である。なお、本研究では、全応力  $\sigma$ 、平均有効応力  $p'$ 、間隙水圧  $u$  および体積ひずみ  $v$  は、土質力学の慣例に従い圧縮側および収縮側を正とするが、それら以外の物理量は、一般の有限変形理論で定義されているように、引張り側および伸張側を正とする。

変形速度  $\mathbf{D}$  が弾性部分  $\mathbf{D}^e$  と塑性部分  $\mathbf{D}^p$  との和で表現でき、その弾性部分にフックの法則を仮定する。

$$\hat{T}'_{ij} = E_{ijkl}^e D_{kl}, \quad E_{ijkl}^e = \left( \bar{K} - \frac{2}{3} \bar{G} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \bar{G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3)$$

ここで、 $\hat{T}'_{ij} = \dot{T}'_{ij} - W_{ik} T'_{kj} + T'_{ik} W_{kj}$  は、有効 Cauchy 応力の共回転速度であり、 $W_{ij}$  はスピン、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタを表す。また、 $\bar{K}$  と  $\bar{G}$  はそれぞれ体積弾性係数とせん断弾性係数であり、次式で表される。

$$\bar{K} = \bar{K}_0 p', \quad \bar{G} = \bar{G}_0 p' \quad (4)$$

ここで、 $\bar{K}_0 = (1+e)/\kappa$ 、 $\bar{G}_0 = \{3(1-2\nu)\bar{K}_0\}/\{2(1+\nu)\}$  であり、 $\nu$  はポアソン比を表す。

一方、変形速度の塑性部分  $\mathbf{D}^p$  について考える。まず、修正 Cam-clay モデルの降伏関数は、次式で与えられる。

$$f = \int_0^t \frac{\lambda - \kappa}{1+e} \left( \frac{\dot{p}'}{p'} + \frac{2\eta\dot{\eta}}{M^2 + \eta^2} \right) dt - v^p \quad (5)$$

ここで、 $v^p$  は塑性体積ひずみを表す。この降伏関数  $f$  に関連流れ則を適用すると、変形速度の塑性成分  $\mathbf{D}^p$  として次式が得られる。

$$\begin{cases} D_{ij}^p = \Lambda N_{ij} & (N_{ij} \hat{T}'_{ij} > 0, \text{かつ } f = 0) \\ D_{ij}^p = 0 & (N_{ij} \hat{T}'_{ij} \leq 0, \text{あるいは } f < 0) \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\Lambda = E_{ijkl}^e N_{ij} D_{kl} / (E_{ijkl}^e N_{ij} N_{kl} - N_{kk})$  は比例定数であり、 $N_{ij}$  は、 $\beta = M - \eta$  とおくと次式で表される。

$$N_{ij} = \frac{D}{p'} \cdot \frac{M(M+\eta)}{M^2 + \eta^2} \left( \frac{3}{p'(M+\eta)} S_{ij} - \frac{1}{3} \beta \delta_{ij} \right) \quad (7)$$

最終的に有限変形に拡張された修正 Cam-clay モデル（共軸モデル）の構成方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{T}'_{ij} = & \left\{ \left( \bar{K} + \frac{2}{3} \bar{G} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \bar{G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\bar{G} + \bar{K} \bar{\beta}^2 + h} \left( \frac{\bar{G}}{\bar{\tau}} S_{ij} - \bar{K} \bar{\beta} \delta_{ij} \right) \left( \frac{\bar{G}}{\bar{\tau}} S_{kl} - \bar{K} \bar{\beta} \delta_{kl} \right) \right\} D_{kl} \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $\bar{\beta} = \{(M + \eta) / 2\sqrt{3}\eta\} \beta$ ,  $\bar{\tau} = \sqrt{S_{ij} S_{ij} / 2}$  である。また、 $h$  は硬化係数であり、次式で表される。

$$h = \frac{(M^2 + \eta^2) \bar{\beta}}{2\sqrt{3} DM \eta} p' \quad (9)$$

式(6)で与えられる変形速度の塑性成分  $D^p$  に着目すると、その偏差成分  $D^{*p}$  は次式で表される。

$$2D_{ij}^{*p} = \frac{1}{h} \cdot \frac{S_{ij}}{\bar{\tau}} \left( \frac{S_{kl}}{2\bar{\tau}} \hat{T}'_{kl} - \frac{1}{3} \bar{\beta} \hat{T}'_{kk} \right) \quad (10)$$

上式より、 $D^{*p}$  の主軸方向は、応力速度とは無関係に偏差応力  $S$  の主軸方向と一致することがわかる。このようなモデルを共軸モデルと呼ぶ。一方、非共軸モデルでは、応力速度の影響が  $D^{*p}$  の主軸方向に影響を及ぼすように次式のように付加項を導入する。

$$2D_{ij}^{*p} = \frac{1}{h} \cdot \frac{S_{ij}}{\bar{\tau}} \left( \frac{S_{kl}}{2\bar{\tau}} \hat{T}'_{kl} - \frac{1}{3} \bar{\beta} \hat{T}'_{kk} \right) + \frac{1}{h_1} \left( \dot{S}_{ij} - \frac{S_{ij} S_{kl}}{2\bar{\tau}^2} \dot{S}_{kl} \right) \quad (11)$$

ただし、 $h_1$  は第2硬化係数を表しており、非共軸パラメータ  $A$  を用いて、次式で仮定する。

$$h_1 = \frac{(M^2 + \eta^2) \bar{\beta}}{2\sqrt{3} AM \eta} p' \quad (12)$$

式(11)の第1項は降伏曲面と直交する方向の成分であり、第2項は降伏曲面の接線方向の成分となる。 $A$  は接線方向成分のみに影響を及ぼし、 $A$  の値が大きくなるのに伴い  $D^{*p}$  の接線方向成分の大きさが大きくなる。一方、 $A$  の値が小さくなると  $D^{*p}$  の接線方向成分の大きさが小さくなり、最終的に  $A=0$  の場合には、式(10)と式(11)は一致する。したがって、非共軸モデルにおいて、 $A=0$  と仮定すれば、共軸モデルを表すことが可能となる。

最終的に、非共軸項を導入した修正 Cam-clay モデル（非共軸モデル）は、式(8)において、以下の変数変換を行うことにより得られる。

$$\bar{G} \rightarrow \frac{h_1 \bar{G}}{h_1 + \bar{G}}, \bar{K} \rightarrow \frac{(h_1 - h) \bar{K}}{h_1 - h - \bar{\beta}^2 \bar{K}}, \bar{\beta} \rightarrow \frac{h_1 \bar{\beta}}{h_1 - h}, h \rightarrow \frac{h_1 h}{h_1 - h} \quad (13)$$

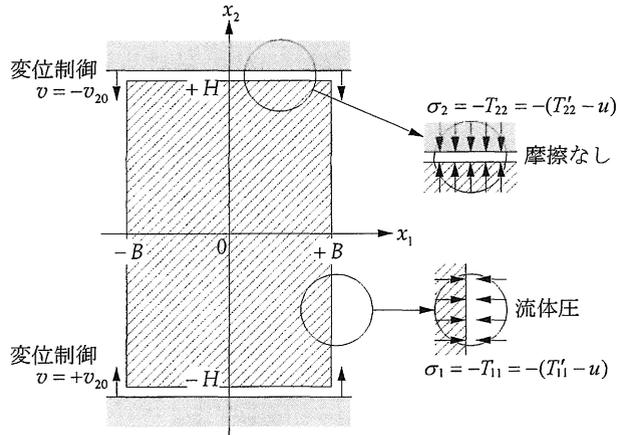


図-1 分岐時の供試体概形

### 3. 分岐条件式

正規圧密粘土を平面ひずみ条件下で非排水圧縮せん断する場合の供試体の変形挙動に着目する。供試体の側面に一定水圧により拘束圧を与え、供試体の上下端面から変位制御により圧縮载荷する。载荷の初期、供試体は、载荷すなわち応力比の増大に伴い、供試体の寸法比（縦/横）を減少させながら均一な変形挙動を示す。しかしながら、供試体の様な変形挙動は载荷の途中で失われ、非一様な変形挙動へと移行する。この非一様な変形挙動へ移行するときを分岐と呼び、このときの応力比  $q/p' (= \eta)$  を分岐荷重  $\eta_y$  と呼ぶこととする。粘土のような摩擦性材料の場合、平均有効主応力が大きいほど、せん断強さが大きくなるので、本研究のような粘性土供試体の均一多軸条件下での分岐荷重は、軸応力や主応力差ではなく、応力比  $\eta$  が物理的に最も合理的な分岐荷重の定義であると考えられる。

まず、分岐現象が発生する瞬間  $t=t$  の供試体の形状は、高さ  $2H$ 、幅  $2B$  となっているものとする（図-1）。

#### 3.1 平面ひずみ非排水条件

非排水条件および平面ひずみ条件は粘土供試体の変形を拘束しており、変形速度  $D$  を用いることにより、それぞれ  $\text{tr}D=0$ 、 $D_{33}=0$  と表現できる。したがって、平面ひずみ非排水条件下では、 $D_{11}+D_{22}=0$  を満足する必要がある。速度場  $v$  を用いて表現すると平面ひずみ非排水条件は、 $v_{1,1}+v_{2,2}=0$  となる。この場合、 $v$  の成分は、流れ関数  $\psi$  を用いることにより次式のように表すことができる。

$$v_1 = \psi_{,2}, v_2 = -\psi_{,1} \quad (14)$$

### 3.2 構成式

粘土供試体の変形挙動を平面ひずみ非排水条件 ( $D_{11}+D_{22}=0, D_{33}=0$ ) に限定するならば、修正 Cam-clay モデル (共軸モデル・非共軸モデル) の構成方程式は次式のように簡略化できる。

$$\begin{cases} \dot{T}'_{11} - \dot{T}'_{22} = 2\mu^*(D_{11} - D_{22}), \\ \dot{T}'_{12} = 2\mu D_{12} \end{cases} \quad (15)$$

$$\mu^* = \frac{\bar{h}\bar{G}}{\bar{h} + \bar{G}}, \mu = \frac{h_1\bar{G}}{h_1 + \bar{G}}$$

ここで、 $\mu^*, \mu$  はそれぞれ  $45^\circ$  せん断におけるせん断係数と単純せん断係数であり、 $\bar{h}$  は  $\bar{K}\bar{\beta}^2 + h$  で表される。 $\mu^*$  は非共軸パラメーター  $A$  に無関係である。一方、 $\mu$  は  $A$  の単調減少関数となり、共軸モデルより  $A$  の値が大きくなる非共軸モデルの場合には、共軸モデルと比較して、単純せん断変形が生じ易くなる。

式(15)を、 $\dot{T}'_{ij} = \dot{T}'_{ij} - W_{ik}T'_{kj} + T'_{ik}W_{kj}$  を考慮して、速度場  $\mathbf{v}$  を用いて表現すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} \dot{T}'_{11} - \dot{T}'_{22} = 4\mu^*\psi_{,12} \\ \dot{T}'_{12} = \left(\mu - \frac{\bar{q}}{2}\right)\psi_{,22} - \left(\mu + \frac{\bar{q}}{2}\right)\psi_{,11} \end{cases} \quad (16)$$

ここで  $\bar{q}$  は  $\bar{q} = T'_{11} - T'_{22} = 2q/\sqrt{3}$  で表わされる。

### 3.3 増分釣合式

準静的で物体力がない場合、増分釣合式は有効応力の原理を考慮すると次式で与えられる。

$$\begin{cases} \dot{T}'_{11,1} + \dot{T}'_{12,2} - \dot{u}_{,1} = 0 \\ \dot{T}'_{21,1} + \dot{T}'_{22,2} - \dot{u}_{,2} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

### 3.4 境界条件

載荷条件は、供試体の両側面 ( $x_1 = \pm B$ ) では水圧により一定圧力  $\sigma_1$  を与え、上下端面 ( $x_2 = \pm H$ ) では変位制御 ( $v_2 = \mp v_{20}$ ) により圧縮し、摩擦は働かないものと仮定する (図-1)。このとき、境界条件は次式のように表される。

$$\begin{cases} (\dot{s}_t)_1 = \sigma_1 L_{11}, (\dot{s}_t)_2 = \sigma_1 L_{12}, \text{ on } x_1 = \pm B \\ (\dot{s}_t)_2 = 0, \quad v_2 = \mp v_{20} \quad \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 $\dot{s}_t (= \dot{\mathbf{S}}\mathbf{n})$  は全公称表面力速度であり、 $\mathbf{n}$  は考えている面の単位法線ベクトルである。

### 3.5 分岐条件式

分岐が発生する瞬間まで、長方形供試体は载荷軸方向に圧縮力を受けることによって、一様な変形を続ける。その過程では、圧縮力の増大に対しては、一様な変形は常に発生しうる。したがって、圧縮力の増大に伴って非均一な変形が発生しうる場合に、供試体の分岐現象は認められる。

構成式を増分釣合式に代入することにより導かれる支配方程式は、速度に関して線形関係になっているので、速度解を重ね合わせることが可能となる。したがって、式(18)で与えられる境界条件の解は、均一な境界条件と非均一な境界条件の解となる。

均一境界条件：

$$\begin{cases} \hat{T}'_{11}=0, \hat{T}'_{12}=0 & \text{on } x_1 = \pm B \\ \hat{T}'_{21}=0, v_2 = \mp v_{20} & \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (20)$$

非均一境界条件：

$$\begin{cases} \hat{T}'_{11}=\dot{u}, \hat{T}'_{12}=-\bar{q}L_{12} & \text{on } x_1 = \pm B \\ \hat{T}'_{21}=0, v_2=0 & \text{on } x_2 = \pm H \end{cases} \quad (20)$$

式(19)は供試体内の各点において変形が均一となる境界条件であり、その解 ( $D_{11} = -D_{22} = v_{20}/H, D_{12} = W_{12} = 0$ ) は自明である。したがって、供試体内の各点において非均一な変形が生じるのならば、式(20)の境界条件から非均一な変形を表わす解が得られる。以後、特にことわりがない限り、式(20)のみを境界条件と呼ぶことにする。

増分釣合式(17)から、間隙水圧  $u$  の項を消去し、式(14)で与えられる流れ関数  $\psi$  を用いた構成式を代入することにより、次式に示す流れ関数  $\psi$  の支配方程式が得られる。

$$a\psi_{,1111} - 2b\psi_{,1122} + c\psi_{,2222} = 0 \quad (21)$$

ここで、 $a, b$  および  $c$  は次式のように置いている。

$$a = 2\mu + \bar{q}, b = -(4\mu^* - 2\mu), c = 2\mu - \bar{q} \quad (22)$$

一方、式(20)の境界条件は、式(14)を代入することにより、流れ関数  $\psi$  を用いて次式のように書き換えられる。

側面の境界条件：

$$\begin{cases} a\psi_{,111} - (2b - a)\psi_{,122} = 0 \\ \psi_{,11} - \psi_{,22} = 0 \quad (a \neq 0) \end{cases} \quad (23)$$

上下端面の境界条件：

$$\begin{cases} \psi_{,1} = 0 \quad (c \neq 0) \\ \psi_{,22} = 0 \quad (a \neq 0) \end{cases} \quad (24)$$

式(24)で示される上下端面の境界条件を考慮し、流れ関数  $\psi$  を次式のように仮定する。

表-1 各領域の判別条件,  $V(x_1)$ の一般解, および分岐条件式  
 $(A_1, A_2$ : 未定定数,  $a = 2\mu + \bar{q}$ ,  $b = -(4\mu^* - 2\mu)$ ,  $c = 2\mu - \bar{q}$ )

	判別条件	$P, Q$ と $a, b, c$ の関係		$V(x_1)$ の一般解	分岐条件式
EC 領域	$b^2 - ac < 0$	$P^2 - Q^2 = \frac{b}{a},$ $P^2 + Q^2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$	対称 モード	$*\Re[(A_1 + iA_2) \times \sin\{(P+iQ)k_mx_1\}]$	$\frac{Q \sin(2Pk_mB)}{P \sinh(2Qk_mB)} = \frac{(a-c)\sqrt{a} - 2(a-b)\sqrt{c}}{(a-c)\sqrt{a} + 2(a-b)\sqrt{c}}$
			非対称 モード	$*\Re[(A_1 + iA_2) \times \cos\{(P+iQ)k_mx_1\}]$	$\frac{Q \sin(2Pk_mB)}{P \sinh(2Qk_mB)} = -\frac{(a-c)\sqrt{a} - 2(a-b)\sqrt{c}}{(a-c)\sqrt{a} + 2(a-b)\sqrt{c}}$
EI 領域	$b^2 - ac > 0,$ $\frac{b}{a} < 0,$ $2\mu >  \bar{q} $	$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a},$ $P^2 + Q^2 = -\frac{2b}{a}$	対称 モード	$A_1 \sin(Pk_mx_1) + A_2 \sin(Qk_mx_1)$	$\frac{P \tanh(Qk_mB)}{Q \tanh(Pk_mB)} = \frac{(1+P^2)^2}{(1+Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cos(Pk_mx_1) + A_2 \cos(Qk_mx_1)$	$\frac{P \tanh(Pk_mB)}{Q \tanh(Qk_mB)} = \frac{(1+P^2)^2}{(1+Q^2)^2}$
H 領域	$b^2 - ac > 0,$ $\frac{b}{a} > 0,$ $2\mu >  \bar{q} $	$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a},$ $P^2 + Q^2 = \frac{2b}{a}$	対称 モード	$A_1 \sinh(Pk_mx_1) + A_2 \sinh(Qk_mx_1)$	$\frac{P \tan(Qk_mB)}{Q \tan(Pk_mB)} = \frac{(1-P^2)^2}{(1-Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cosh(Pk_mx_1) + A_2 \cosh(Qk_mx_1)$	$\frac{P \tan(Pk_mB)}{Q \tan(Qk_mB)} = \frac{(1-P^2)^2}{(1-Q^2)^2}$
P 領域	$2\mu <  \bar{q} $	$P^2 - Q^2 = \frac{2b}{a},$ $P^2 + Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}$	対称 モード	$A_1 \sin(Pk_mx_1) + A_2 \sinh(Qk_mx_1)$	$\frac{P \tanh(Qk_mB)}{Q \tanh(Pk_mB)} = \frac{(1-P^2)^2}{(1+Q^2)^2}$
			非対称 モード	$A_1 \cos(Pk_mx_1) + A_2 \cosh(Qk_mx_1)$	$\frac{P \tan(Pk_mB)}{Q \tanh(Qk_mB)} = -\frac{(1-P^2)^2}{(1+Q^2)^2}$

\*  $\Re[\dots]$  は  $[\dots]$  の実数部分を表す.

$$\psi = V(x_1) \cos(k_mx_2) \quad (k_m = m\pi/2H) \quad (25)$$

ここで,  $m(m=1,2,\dots)$ は変形モードである. この変形モードが分岐時の変形概形を表わす. また,  $m$ が偶数の場合は $x_2$ 座標の原点を $H/m$ だけ移動させる必要がある. また, 式(25)の形で仮定した流れ関数 $\psi$ は, 式(21)を各点で満足する必要がある. したがって,  $V(x_1)$ は次式で示される支配方程式を満足する必要がある.

$$(aD^4 + 2bk_m^2D^2 + ck_m^4)V(x_1) = 0 \quad (26)$$

ここで,  $D$ は $x_1$ に関する微分演算子であり, その右肩の数字はその微分回数を表わしている.  $V(x_1)$ を, 対称モードの場合には $\sin(\rho k_mx_1)$ , 非対称モードの場合には $\cos(\rho k_mx_1)$ により表現すると, 式(21)の $V(x_1)$ に関する支配方程式は, 次式で示される $\rho$ に関する4次方程式となる.

$$a\rho^4 - 2b\rho^2 + c = 0 \quad (27)$$

速度場の一般解は式(27)の実数解の個数により分類される. 実数解の存在個数が0, 2, お

よび 4 に対して, それぞれ, 楕円領域 (E), 放物領域 (P), および双曲領域 (H) と呼ぶ. また, 楕円領域はさらに 2 つの領域に分類され, 4 つの異なる複素数解の場合を (EC), 4 つの異なる虚数解の場合を (EI) と呼ぶことにする. このとき, 各領域の判別条件,  $V(x_1)$  の一般解および分岐条件式等を表-1 に整理して示す. なお, 分岐条件式は, 流れ関数  $\psi$ , および  $V(x_1)$  の一般解を代入した側面の境界条件において, 未定定数  $A_1, A_2$  の非自明な解が存在する条件 ( $A_1, A_2$  の係数行列の行列式が 0 となる条件) として得られる. また, 各領域の分岐条件式は, 分岐時の供試体寸法比  $H/B$ , 分岐荷重  $\eta_y$  と変形モード  $m$  の陰関数となっている. したがって表-1 に示された分岐条件式より, 分岐時の供試体寸法比  $H/B$  が与えられれば, 各変形モード  $m$  に対する分岐荷重  $\eta_y$  が得られる.

#### 4. 供試体の軸差応力, 間隙水圧, 平均有効主応力, 分岐荷重および最大せん断ひずみ

土のせん断強さは, 有効応力と密接な関係があり, 有効応力が減少するとせん断強さは低下する. すなわち供試体内に有効応力のばらつきが生じると, 有効応力の小さな位置ではせん断強さが低下し, せん断破壊が生じやすくなる.

供試体の変形が一様変形状態から非一様変形状態へ移行すると, すなわち分岐現象が発生すると, 供試体内の応力状態量 (平均有効主応力  $p'$ , 軸差応力  $q$ , 応力比  $\eta$ , 間隙水圧  $u$ ) も非一様な状態へと移行する. したがって分岐時における供試体内部の応力状態量の分布から, すべり面の初期発生位置およびその形状を予測することが可能となる. 各応力状態量の時間増分を表す式を以下に示す<sup>3),5)</sup>.

$$\begin{aligned} \dot{p}' &= -\frac{\tilde{G}\tilde{K}\tilde{\beta}}{\tilde{G}+\tilde{h}}(D_{11}-D_{22}), \\ \dot{q} &= \frac{\sqrt{3}\tilde{G}\tilde{h}}{\tilde{G}+\tilde{h}}(D_{11}-D_{22}), \\ \dot{\eta} &= \frac{\sqrt{3}\tilde{h}+\eta\tilde{K}\tilde{\beta}}{\tilde{G}+\tilde{h}}\tilde{G}_0(D_{11}-D_{22}), \\ \dot{u} &= -\frac{1}{k_m}\left\{\left(\frac{b}{2}-\frac{\tilde{q}}{2}+\frac{2\tilde{G}\tilde{K}\tilde{\beta}}{\tilde{G}+\tilde{h}}\right)k_m^2V_{,1}+\frac{a}{2}V_{,111}\right\}\sin(k_mx_2) \end{aligned} \quad (28)$$

ただし, 変形モード  $m$  が偶数の場合は, 間隙水圧  $u$  の増分の式中において,  $x_2$  を  $x_2-H/m$  と変数変換する必要がある.

一方, 最大せん断ひずみは以下のように与えられる. まず, 分岐直後  $t=t+\Delta t$  の対数主ひずみは, 分岐直前  $t=t$  の一様対数主ひずみ  $\varepsilon_{L|t}$  と変形速度を用いて表わすと, 次式で与えられる.

$$(\varepsilon_L)_{ii}|_{t+\Delta t} = (\varepsilon_L)_{ii}|_t + D_{ii}\Delta t \quad (i: \text{no sum}) \quad (29)$$

また, 分岐直前の対数せん断ひずみ  $(\varepsilon_L)_{ij}|_t$  ( $i \neq j$ ) は 0 であるから, 分岐直後の対数せん断ひずみは次式となる.

表-2 本解析に用いた土質定数

$\lambda=0.231$
$\kappa=0.042$
$\nu=0.333$
$e=1.5$
$M=1.43$
$A=0.01(0)^*$

\* 共軸モデルの場合は  $A=0$ ，非共軸モデルの場合は  $A=0.01$ .

$$(\varepsilon_L)_{ij}|_{t+\Delta t} \doteq D_{ij}\Delta t \quad (i \neq j) \quad (30)$$

工学ひずみ  $\varepsilon_{ij}$  (圧縮側を正) は，対数ひずみ  $(\varepsilon_L)_{ij}$  を用いると  $\varepsilon_{ij} = 1 - \exp\{-(\varepsilon_L)_{ij}\}$  と表される．分岐直後の工学ひずみの主値を  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  ( $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ ) と置くと，最大せん断ひずみは  $\gamma_{\max}$  は次式で与えられる．

$$\gamma_{\max} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2 \quad (31)$$

## 5. 解析結果および考察

本研究では，表-2 に示す梅田層粘土の土質定数<sup>9)</sup>を有する粘土供試体を想定して分岐解析を行った．なお，修正 Cam-clay モデルに用いる非共軸パラメータ  $A$  の値は，非共軸 Cam-clay モデルの場合にせん断帯の生成理論<sup>1)</sup>や分岐解析<sup>4)</sup>から適当であることが報告されている  $A=0.01$  を用いるものとする．なお，本研究では，供試体の高さと同幅の寸法比 (以下，供試体寸法比と呼ぶ) が  $H/B=2^{10)}$  となったときに分岐が生じる場合について分岐解析を行っている．また，分岐荷重は，限界状態における応力比以下の範囲で，載荷に伴って最初に分岐が発生する可能性がある最小の応力比としている．

### 5.1 分岐荷重と変形モードの関係

平面ひずみ条件下で，有限変形修正 Cam-clay モデル (共軸モデル・非共軸モデル) を用いた長方形供試体を非排水圧縮せん断した場合の分岐荷重  $\eta_y$  と変形モード  $m$  の関係，およびその変形概形を図-2 に示す．

共軸モデルの場合には，変形モード  $m$  が大きくなるにつれて，分岐荷重は大きくなり，しだいに限界状態における応力比 ( $\eta_y=1.43$ ) に漸近していく．したがって，一様変形からすべり面を伴って破壊するような非一様変形へと移行する分岐現象は，応力比が限界状態近傍に達するまで発生しにくくなる．また，移行する分岐現象の変形モードは，限られており， $m=3,4,7,8$  の対称モード，および  $m=1,2,5,6,9,10$  の非対称モードの場合に限られる．

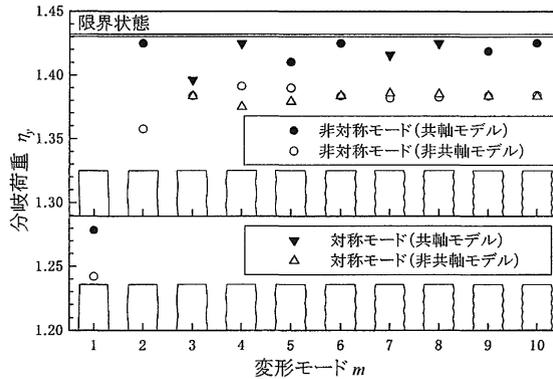


図-2 分岐荷重  $\eta_y$  と変形モード  $m$  の関係および変形モード概形 (修正 Cam-clay モデル・ $H/B=2$ )

これらの変形モードは、本研究で想定した変形モードの半数でしかない。

一方、非共軸モデルの場合には、変形モード  $m$  が大きくなるにつれて分岐荷重が大きくなることは、共軸モデルの場合と同じである。しかしながら、分岐荷重は共軸モデルより全体的に小さな値となっており、 $m=4$  を超えるような大きな変形モードの場合には、分岐荷重は  $\eta_y=1.38$  程度となる。したがって、非共軸モデルを用いた場合には、応力比が限界状態までまだ余裕がある段階において、供試体の変形は非一様変形へと移行し、より小さな応力比において破壊の前兆が認められることとなる。また、非共軸モデルを用いた場合において分岐時に発生する変形モードの種類は、共軸モデルを用いた場合よりも多く、 $m=1,2$  の対称モードを除くすべての変形モードが発生することがわかる。したがって、共軸モデルを用いた場合に比較して、非共軸モデルを用いた場合の方が様々な供試体の変形挙動を表現できることが解析的に示された。

なお、非共軸モデルを用いた場合の方が、共軸モデルを用いた場合より、分岐荷重が小さくなることや様々な変形挙動を表現できることは、非共軸 Cam-clay モデルと共軸 Cam-clay モデルを用いた分岐解析においても報告されている (図-3)<sup>3)</sup>。

修正 Cam-clay モデルを用いた場合の各変形モードに対する分岐荷重と Cam-clay モデルを用いた場合のそれとを比較する。

まず、共軸モデルの場合について、比較を行う。分岐荷重が  $\eta_y=1.4$  を超えるような場合には、両モデルの各変形モードに対する分岐荷重の間には違いがほとんど認められない。したがって、 $\eta_y=1.4$  を超えるような大きな分岐荷重の場合には、Cam-clay モデルと修正 Cam-clay モデルの二つのモデルの違いは分岐荷重に影響を及ぼさないことが示された。これは、一般に分岐現象が発生するのは応力比が限界状態近傍に達したときであるのに対して、Cam-clay モデルから修正 Cam-clay モデルへの改善の内容が応力比が小さな範囲が中心であるためと考えられる。しかしながら、非対称 1 次変形モードのように分岐荷重が  $\eta_y=1.3$  以下と小さな場合には、修正 Cam-clay モデルの場合の分岐荷重が、Cam-clay モデル

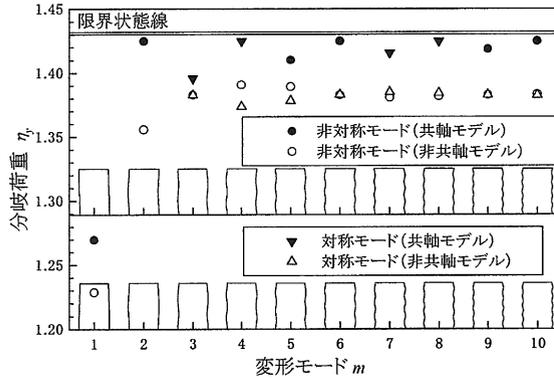


図-3 分岐荷重  $\eta_y$  と変形モード  $m$  の関係および変形モード概形 (Cam-clay モデル・ $H/B=2$ )<sup>3)</sup>

の場合よりも、0.01程度大きい。したがって、修正 Cam-clay モデルの方が分岐現象が発生しにくいことがわかる。

一方、非共軸モデルを用いた場合でも、分岐荷重が小さな値となる非対称 1 次変形モードの分岐荷重は、修正 Cam-clay モデルを用いた場合の方が Cam-clay モデルを用いた場合よりも大きく、その差は 0.05 程度もある。また、 $m=4$  を超えるような大きな変形モードの場合では、分岐荷重は  $\eta_y=1.38$  程度であり、共軸モデルの場合に比較して小さな値となっている。このような  $\eta_y=1.38$  程度の比較的小さな分岐荷重の場合には、修正 Cam-clay モデルを用いた場合の方が、各変形モードに対する分岐荷重が若干大きな値となった。構成方程式に非共軸項を導入すると、分岐荷重は一般に低下する。したがって、修正 Cam-clay モデルへの非共軸項の導入が分岐荷重に及ぼす影響は、Cam-clay モデルへの導入の場合よりも小さいことがわかる。

## 5.2 最大せん断ひずみおよび応力状態量 ( $p'$ , $q$ , $u$ , $\eta$ ) の分布

低次変形モードの代表例として非対称 1 次変形モードを、高次変形モードの代表例として対称 8 次変形モードの最大せん断ひずみおよび各応力状態量の分布について考察を行う。それぞれ、(a) 分岐時の変形概形、および (b) 最大せん断ひずみ  $\gamma_{\max}$ 、(c) 平均有効主応力  $p'$ 、(d) 軸差応力  $q$ 、(e) 間隙水圧  $u$ 、(f) 分岐荷重  $\eta$  の分布を示している。なお、変形概形は生じた変形を明瞭にするため、各変形モードにおいて非均一変形量を 500 倍している。また、図において色の濃い(黒色)領域が増分量が相対的に大きな領域を示しており、色の薄い(白色)領域が増分量が相対的に小さな領域を示している。

### 5.2.1 非対称 1 次変形モード

図-4、図-5 に修正 Cam-clay モデルを用いた場合の非対称 1 次変形モードの変形概形とそのときの相対的な最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布を示す。なお、前者が共軸モデルの場合であり、後者が非共軸モデルの場合である。低次変形モードを代表する非対称 1

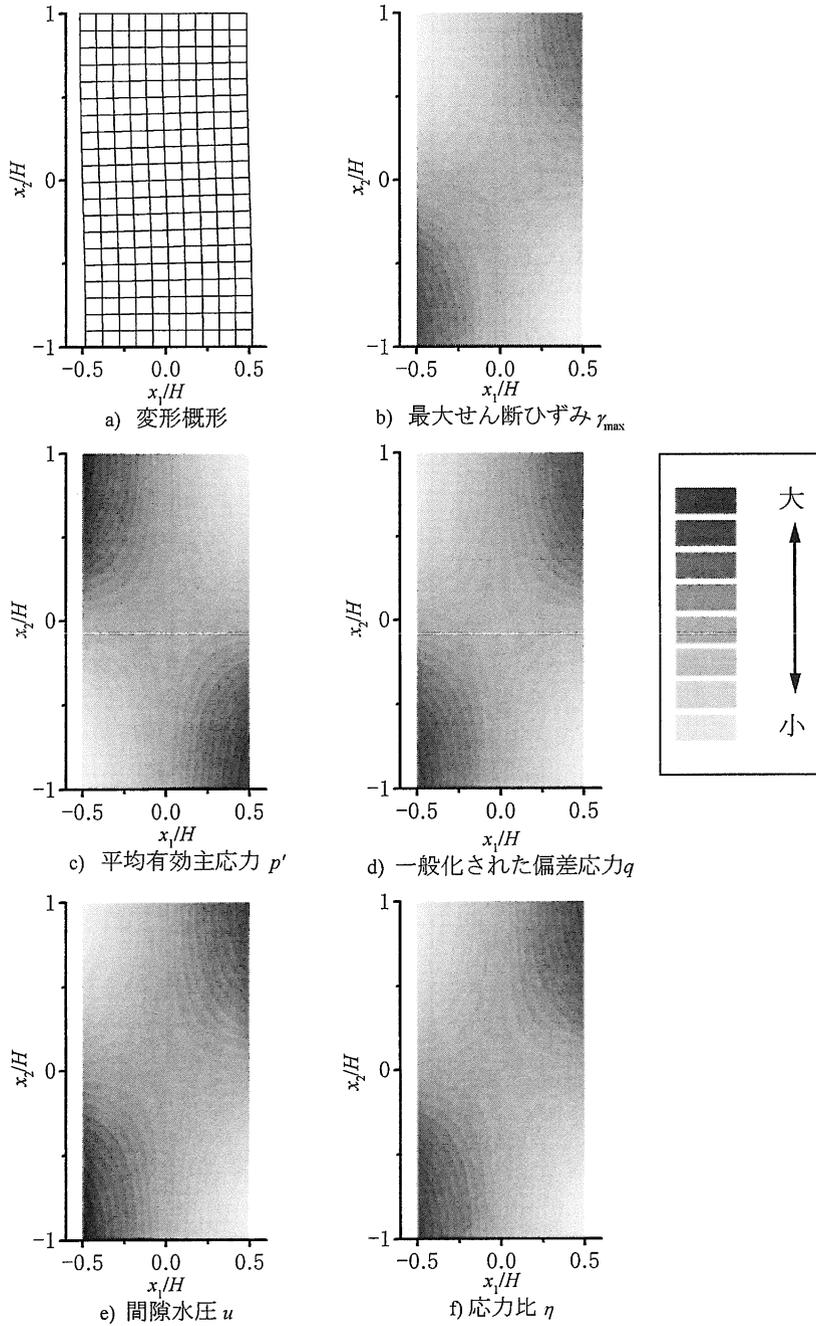


図-4 変形概形と最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布 (共軸修正 Cam-clay モデル・非対称 1 次変形モード)

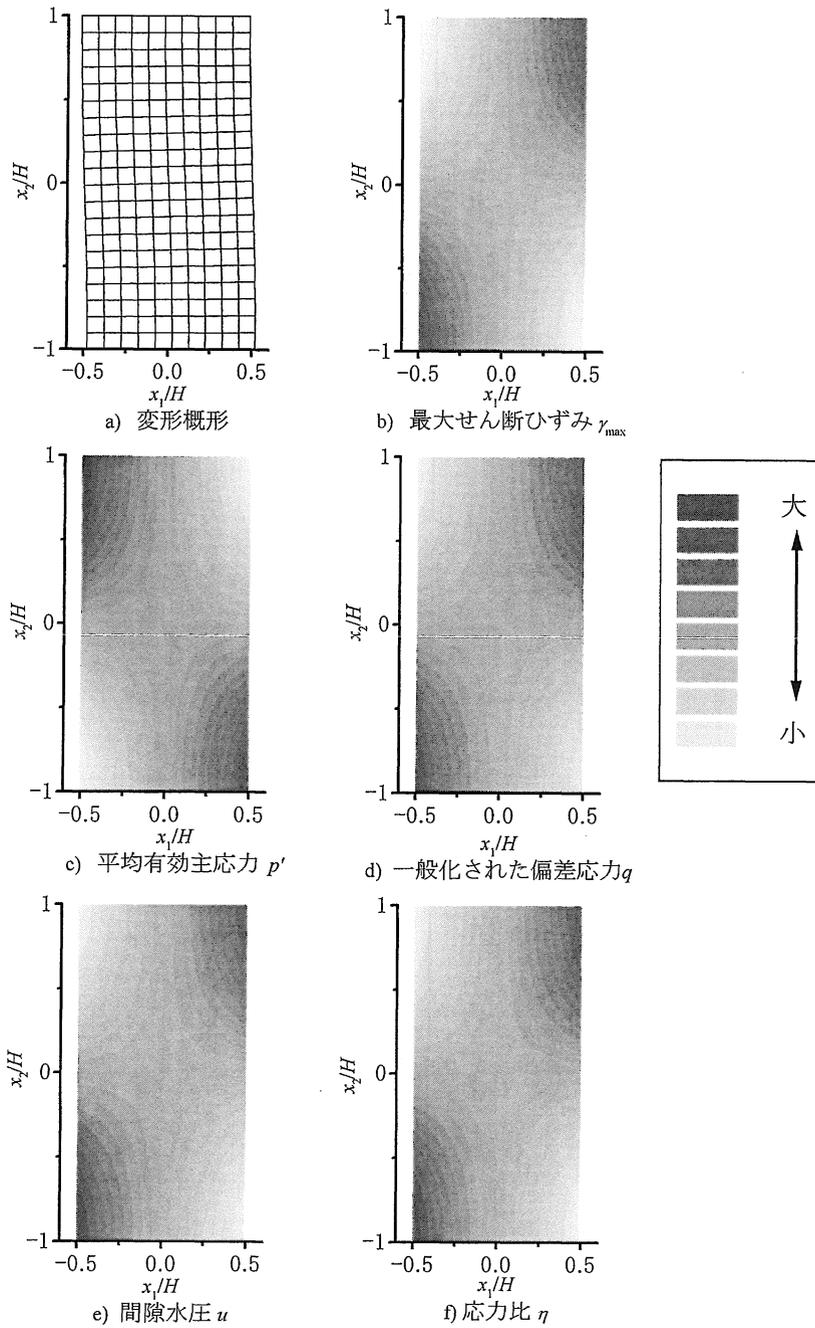


図-5 変形概形と最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布 (非共軸修正 Cam-clay モデル・非対称 1 次変形モード)

次変形モードの場合には、両モデルの間に大きな差異は認められない。以下、非共軸モデルの場合について詳細を述べる。

分岐時の供試体の変形概形は、供試体の上半部が左側へ下半分が右側へと移動している。このまま載荷を続けると供試体には偏心荷重が作用することになり、供試体の破壊現象が促進されることが推察される。

図 (b) より、供試体の破壊時にすべり面を形成すると考えられる最大せん断ひずみ  $\gamma_{\max}$  が相対的に大きな値となる領域は、供試体の右上隅と左下隅であることがわかる。このような場合には、すべり面はこの2隅から  $\gamma_{\max}$  の最緩勾配に沿って形成されるものと推察される。したがって、供試体の変形が上半分が左側へ下半分が右側へ移動するような変形挙動の場合には、右上隅と左下隅から破壊が始まり、この2隅を結ぶようなすべり面が形成されることが予測される。

次に応力状態量の分布性状に着目する。

土のせん断強さは、 $p'$  と密接な関係にあり、土に作用する  $p'$  が大きな値になるほど土はせん断強さを発揮する。この2隅において、 $p'$  が低下するという事は、この2隅の土のせん断強さが低下するという事を意味する。また、供試体に作用する側圧および軸方向圧は場所によらず一定であるから、 $u$  の上昇は、 $p'$  の低下を招くことになるのは明らかである。また、 $q$  および  $\eta$  は、せん断の度合いを表していると考えられ、これらが大きくなることはせん断が進行していることを意味する。したがって、すべり面の発生位置と推察される場所では、 $p'$  が小さな値となり、 $q, u$  および  $\eta$  が大きな値となる<sup>5)</sup>。

修正 Cam-clay モデルを用いた分岐解析結果から得られる応力状態量の分布性状においても、共軸モデル、非共軸モデルの違いを問わず、非対称1次変形モードが発生する場合には、供試体右上隅と左下隅の近傍において、 $p'$  が小さな値を示す領域が広がっている (図 (c))。一方、 $q, u$  および  $\eta$  は、供試体右上隅および左下隅において、大きな値を示している (図 (d) ~ 図 (f))。したがって、応力状態量の分布性状の観点からも、供試体の右上隅および左下隅から破壊が発生し始めることが予測できる。

なお、共軸および非共軸修正 Cam-clay モデルを用いて得られた最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布性状は、共軸および非共軸 Cam-clay モデルを用いて得られたものとの間に大きな違いは認められなかった (図-6)<sup>5)</sup>。したがって、低次変形モードの場合には、非共軸パラメータがそれぞれの分布性状に及ぼす影響は小さいと考えられる。

### 5.2.2 対称8次変形モード

次に対称8次変形モードに着目する。図-7、図-8は、それぞれ共軸修正 Cam-clay モデルおよび非共軸修正 Cam-clay モデルを用いた場合の変形概形とそのときの相対的な最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布を示している。対称8次変形モードのような高次変形モードの場合には、低次変形モードの場合とは異なり、共軸モデルと非共軸モデルの間に違いが認められる。

供試体の変形概形は、共軸モデルの場合には、供試体内全域にわたって一様に変形しているのに対し、非共軸モデルの場合には、供試体の中心線近傍に比較して供試体側面近傍の変形が顕著になっている (図 (a))。したがって、非共軸モデルの方が局所的な変形が発生

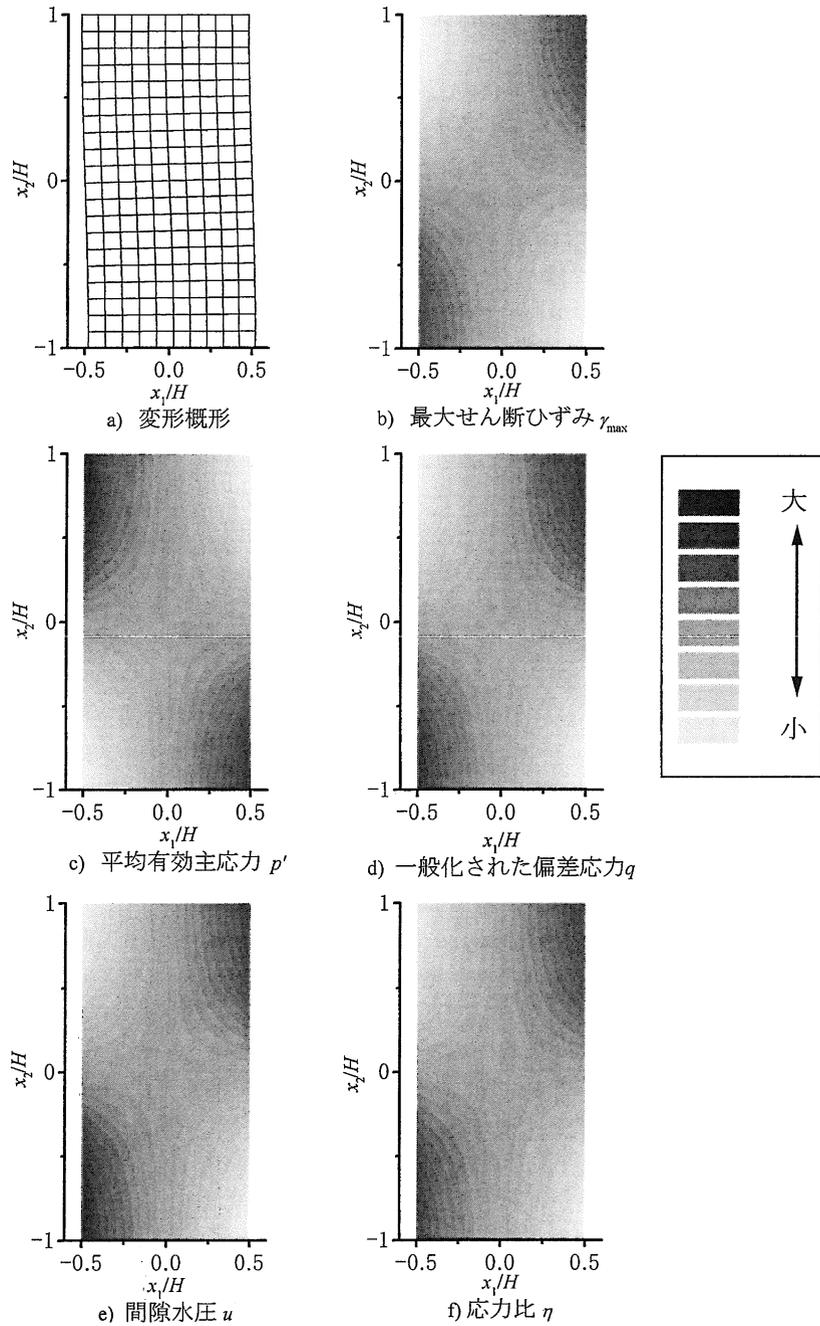


図-6 変形概形と最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布 (非共軸 Cam-clay モデル・非対称 1 次変形モード)<sup>5)</sup>

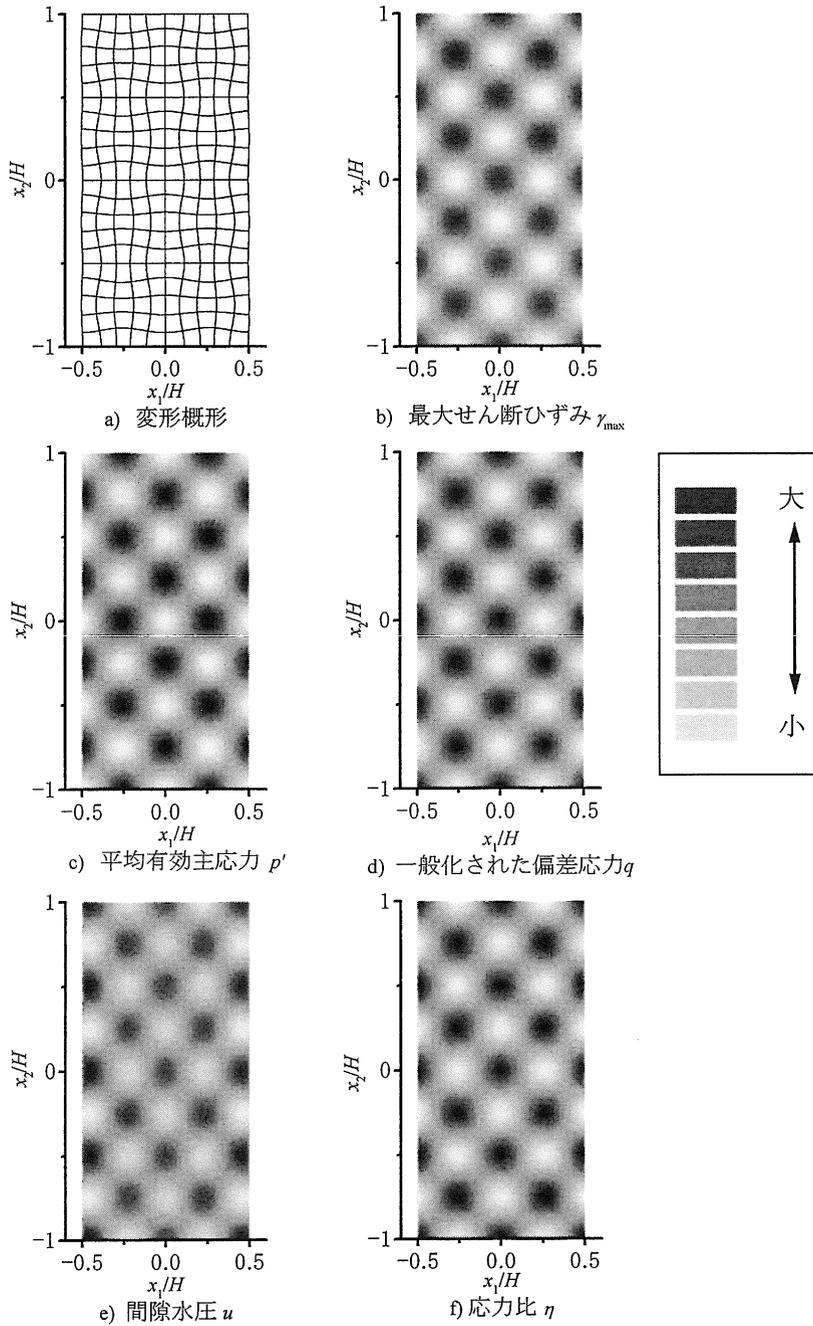


図-7 変形概形と最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布 (共軸修正 Cam-clay モデル・対称 8 次変形モード)

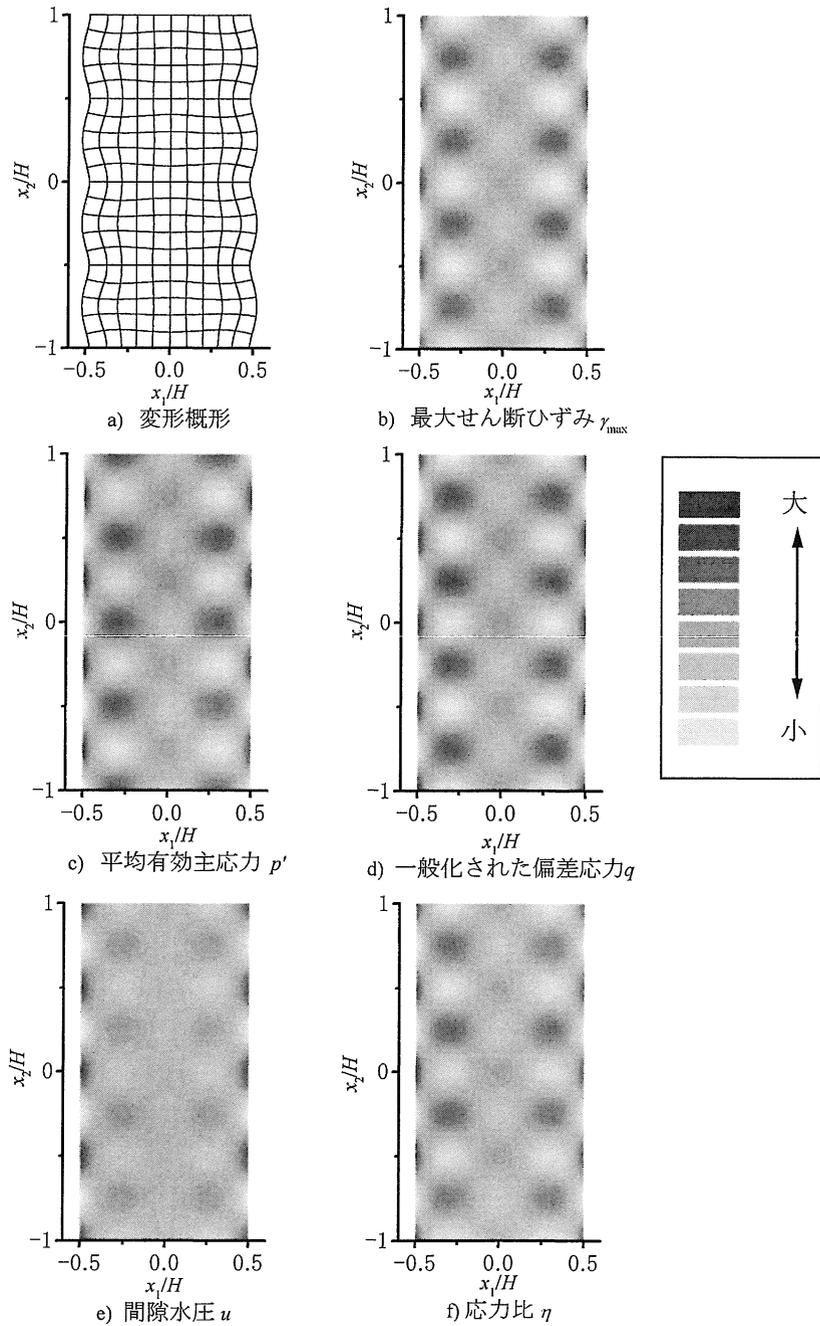


図-8 変形概形と最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布 (非共軸修正 Cam-clay モデル・対称 8 次変形モード)

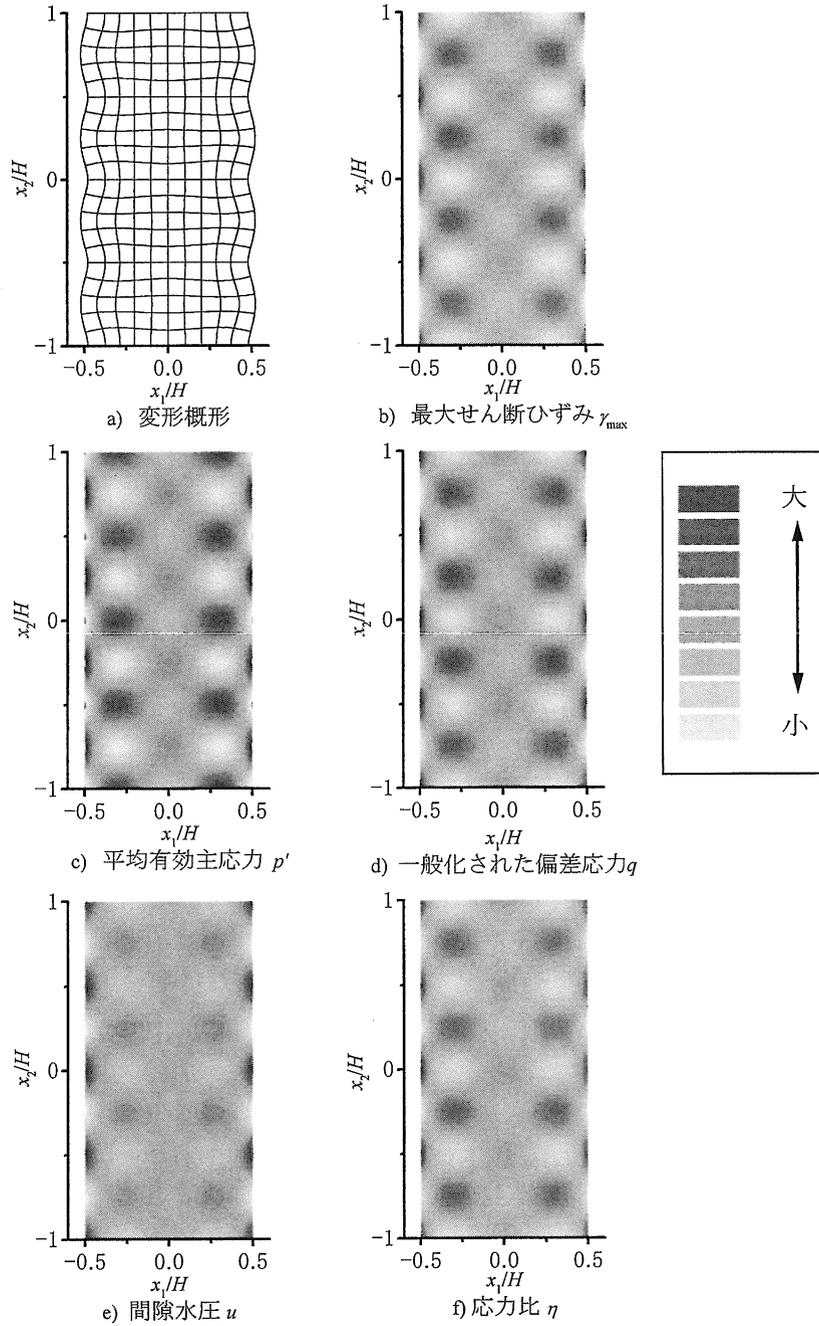


図-9 変形概形と最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布 (非共軸 Cam-clay モデル・非対称 8 次変形モード)<sup>5)</sup>

しやすいことが推察できる。

最大せん断ひずみ  $\gamma_{\max}$  の分布性状からもその違いは明らかである。共軸モデルの場合には、 $\eta_{\max}$  が大きな領域と小さな領域が供試体内全域に周期的に交互に発生しており、その極大値と極小値は場所によらず同程度である。一方、非共軸モデルの場合には、 $\eta_{\max}$  が大きな領域と小さな領域が供試体内に周期的に交互に発生しているものの、その極大値（極小値）は供試体の中心線近傍から側面近傍へと変化するのに伴って、大きく（小さく）なっていく。したがって、共軸モデルの場合には、すべり面の発生位置を特定することは難しいが、非共軸モデルの場合には、すべり面の発生位置が側面近傍付近であることが予測できる。このような変形モードの場合には、将来何本ものすべり面が周期的に形成されることが推察される。

応力状態量の分布性状も最大せん断ひずみと同様の傾向が確認できる。共軸モデルの場合には、応力状態量の大きな値と小さな値を示す領域が供試体内全域にわたって周期的に認められるが、非共軸モデルの場合には、最大値あるいは最小値を示す領域は供試体側面近傍付近に集中している（図 (c) ～図 (f)）。なお、非対称 1 次変形モードの場合と同様に、 $p'$  が小さな値を示す領域において  $q$ ,  $u$  および  $\eta$  が大きな値を示しており、図 (b) と比較することにより、予測されるすべり面の発生位置は、最大せん断ひずみから予測される位置と同じ位置であることがわかる。

最大せん断ひずみおよび応力状態量の分布性状に認められるこのような傾向は、共軸および非共軸 Cam-clay モデルを用いた解析結果でも認められている（図-9）<sup>5)</sup>。

以上より、非共軸項が供試体の局所化に及ぼす影響は、低次変形モードより高次変形モードの方が大きいことが明らかとなった。

## 6. 結 論

本研究から得られた主要な結論を以下に列記する。

- (1) 修正 Cam-clay モデル、Cam-clay モデルというモデルの違いは、非共軸項を導入するか否かに関わらず、分岐荷重や推測されるすべり面に大きな影響を及ぼさないことが示された。
- (2) モデルに非共軸項導入することは分岐荷重の低減を誘発し、その影響は高次変形モードより低次変形モードの方が顕著であった。一方、すべり面の推定では、低次変形モードの場合には共軸モデル、非共軸モデルの違いは認められないが、高次変形モードの場合には両者の間に顕著な違いが認められ、特に非共軸モデルを用いた場合にはすべり面の発生位置が推定可能となり、それは供試体側面近傍であることが解析的に明らかとなった。

## 参 考 文 献

- 1) Yatomi, C. Yashima, A. Iizuka, A. and, Sano, I.: General theory of shear band formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 29, No. 3, pp. 41-53, 1989.

- 2) Yatomi, C. and Shibi, T.: Antisymmetric bifurcation analysis in a circular cylinder of a non-coaxial Cam-clay model, *Proceedings of the International Symposium Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Nagoya, pp. 9-14, 1997.
- 3) 志比利秀, 矢富盟祥, 亀井健史: 平面ひずみ非排水条件下における供試体寸法比の変化が正規圧密粘土の分岐荷重に及ぼす影響, 土木学会論文集, No. 666/III-53, pp. 181-192, 2000.
- 4) 志比利秀, 亀井健史, 東原聡子: 非共軸パラメータの違いが分岐荷重に及ぼす影響, 土木構造・材料論文集, 第16号, pp. 159-167, 2000.
- 5) 志比利秀, 亀井健史, 松森将樹: 分岐解析結果に基づいた分岐荷重近傍における力学的状態量の評価, 地盤と建設, Vol. 18, pp. 19-25, 2000.
- 6) 志比利秀・亀井健史・岩田佳代子: 平面ひずみ排水条件下における分岐荷重近傍の応力状態と土質定数の関係, 土木構造・材料論文集 (掲載予定).
- 7) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A.: Yielding of clays in states wetter than critical, *Géotechnique*, Vol. 13, pp. 211-240, 1963.
- 8) Roscoe, K. H., and Burland, J. B.: On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay, *Engineering Plasticity*, Cambridge University Press, pp. 535-609. 1968.
- 9) Sekiguchi, H.: Rheological characteristics of clays, *Proceedings of 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Tokyo, Vol. 1, pp. 289-292, 1977.
- 10) 土質工学会編 (1991) 土の試験実習書 (第二回改訂版), pp. 133-158.