

分岐理論を用いた有限要素解析による せん断帯の発生予測

志比 利秀*・亀井 健史*・永吉 雄大**

*島根大学総合理工学部 地球資源環境学科

**島根大学大学院総合理工学研究科 地球資源環境学専攻

Prediction of Shear Bands in Clay Specimens by Applying Bifurcation Theory to the Finite Element Analysis

Toshihide SHIBI*, Takeshi KAMEI* and Takehiro NAGAYOSHI**

*Department of Geoscience, Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

**Department of Geoscience, Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Graduate School of Shimane University

Abstract

Under simple or combined stresses, homogeneous clay specimens exhibit localized deformation followed by strain localization. This phenomenon has been extensively studied under plane strain loading conditions. This paper studies the initiation and propagation of the strain localization that developed in rectangular block specimens of normally consolidated clay during undrained shear under plane strain loading conditions. Bifurcation behavior of specimens was simulated by applying bifurcation theory to the Finite Element Method (FEM), and axial strain and distribution characteristics of internal maximum shear strain at the initiation of bifurcation are presented.

Results of the FEM are then compared with the theoretical bifurcation solution. The equivalent of the distribution characteristics at the onset of bifurcation is obtained, and shear band formation followed by the distribution characteristics is predicted by propagation of strain localization as an imperfection-sensitive problem. However, axial strain at the occurrence of variation of distribution characteristics of internal maximum shear strain as computed by the FEM underestimates that calculated by the theoretical bifurcation solution.

1. はじめに

粘土供試体を圧縮せん断した場合、一般に粘土供試体の載荷軸応力-ひずみ関係およびその変形挙動は次の通りとなる。せん断初期の載荷軸応力が小さな範囲においては、応力-ひずみ関係は剛性が大きく直線的で弾性的な挙動を示し、供試体は均一な変形を続ける。せん断が進行し、載荷軸応力が最大値に近づくに従い剛性が低下し、全ひずみに対する塑性ひずみの割合が増加してゆき、応力-ひずみ関係は弾塑性的な挙動を示す領域へと入る。そのような載荷軸応力最大値近傍においては、供試体には応力およびひずみの局所化が内在し始め

る。最終的に、最大載荷軸応力に達した後、応力—ひずみ関係にひずみ軟化現象が認められる段階において、明瞭なすべり面が供試体表面に観察され、粘土供試体は破壊へと至る。

一方、近年の計算機の発達と土の力学的挙動をよく説明できる構成方程式の提案にともない、有限要素法等の数値解析により地盤の変形挙動を再現しようとする試みが行われ始めている。その中でも最近では、有限変形理論に基づいた有限要素解析¹⁻⁵⁾が盛んに研究されている。その研究例に、圧縮せん断中における正規圧密粘土供試体の変形挙動解析がある。一般に均質な供試体に対する有限要素解析では、応力—ひずみ関係が図-1に示す均一変形経路（主経路）を通り、実際の一軸圧縮試験等において供試体に観察されるひずみの局所化などを表現する非均一変形経路（分岐経路）をシミュレーションすることが難しい。したがって、これまでの解析³⁻⁵⁾では、粘土の一軸圧縮試験の際にせん断の進行にともないに観察されるすべり面、あるいはすべり面が形成される前に生じるひずみの局所化に認められる供試体の局所変形挙動を再現するために、供試体形状に初期不整を導入し、初期不整が導く擬似分岐経路を追跡している（図-1）。初期不整の形状としては、供試体側面中央付近に微小な切り欠きを与えた形状³⁾や余弦波の微小な分岐モードを与えた形状^{3,4)}などのほかに、供試体の強度に影響を及ぼしにくい供試体の上下端面に微小な切り欠きを与えた形状⁵⁾に対する解析が報告されている。これらの解析においては、供試体内にひずみの局所化が生じ始め、せん断帯が生成していく様子が解析的に示されている。

一方、上記のような数値解析とは異なる例として、分岐理論を用いた理論解析例^{6,7)}がある。この解析では、供試体がせん断初期の間は均一な変形を続け、最大応力近傍において非均一経路（分岐経路）へと移行するような分岐現象を表現できる（図-1）。すなわち、厳密な意味での分岐点を見つけることが可能である。また、圧縮せん断の際に観察される供試体の様々な変形形態を説明できることが報告されている。しかしながら、理論的な解析の

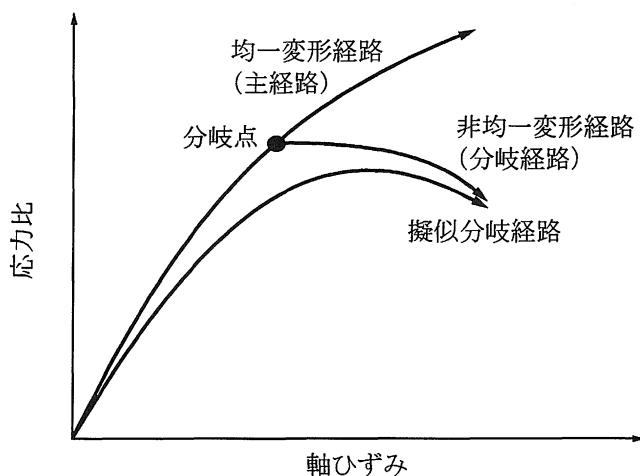


図-1 分岐経路概念図

ため、解析可能な境界条件等に限度があり、また、分岐点以後の非均一な変形挙動の解析には困難を伴う。

したがって、分岐点の探索および分岐後の非均一変形挙動が解析可能な新たな解析手法の確立が重要となる。

本研究では、正規圧密粘土供試体が平面ひずみ条件下で非排水圧縮せん断される場合について、分岐理論を有限要素法に導入することにより、非排水せん断の進行に伴うすべり面の発生形態をシミュレーションする。なお、供試体の形状は、断面においては長方形となる直方体とする。得られた解析結果は、まず理論解析から得られる分岐時に生じる供試体内の最大せん断ひずみ分布と比較検討した。さらに、理論解析による分岐時の軸ひずみおよび応力比（分岐荷重）と比較し、工学的な観点から本解析手法の有意性を検討した。

2. 有限変形非共軸 Cam-clay モデル⁸⁾

本研究では、正規圧密粘土の構成関係として Yatomi *et al.*⁸⁾ が提案した有限変形非共軸 Cam-clay モデルを採用する。この構成関係は、せん断変形が生じやすいモデルであることがすでに知られている。

まず、全 Cauchy 応力 \mathbf{T} 、有効 Cauchy 応力 \mathbf{T}' と間隙水圧 u の間に次式で与えられる有効応力の原理を仮定する。

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' - u\mathbf{I}$$

このとき、Cam-clay モデルに用いられたパラメータ、平均有効応力 p' と一般化された偏差応力 q は、それぞれ次式で定義される。

$$p' = -\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T}', \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}}$$

ここで、 \mathbf{S} は有効 Cauchy 応力 \mathbf{T}' の偏差成分である。特に平均有効主応力と一般化された偏差応力の比 $q/p' (= \eta)$ を応力比と呼ぶこととする。なお、本研究では、平均有効主応力 p' 、間隙水圧 u および体積ひずみ v は、土質力学の慣例に従い圧縮側および収縮側を正とするが、それら以外の物理量は、一般の有限変形理論で定義されているように引張り側および伸張側を正とする。

本研究で用いる有限変形非共軸 Cam-clay モデルの降伏関数は次式のように書き表せる。

$$f = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \ln \frac{p'}{p_0} + D \frac{q}{p'} - v^p$$

ここで、 e は間隙比、 λ と κ はそれぞれ自然対数表示による圧縮指数および膨潤指数であり、 p_0 は先行圧密応力を、 v^p は塑性体積ひずみを表す。また、 $D = (\lambda - \kappa) / \{M(1 + e)\}$ ⁹⁾ はダイレイタンシー係数と呼ばれ、 M は限界状態における応力比を表す。

このとき、有限変形共軸 Cam-clay モデルの構成式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{T}'_{ij} = & \left\{ \left(\bar{K} - \frac{2}{3} \bar{G} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + \bar{G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\bar{G} + \bar{K} \bar{\beta}^2 + h} \left(\frac{\bar{G}}{\bar{\tau}} S_{ij} - \bar{K} \bar{\beta} \delta_{ij} \right) \left(\frac{\bar{G}}{\bar{\tau}} S_{kl} - \bar{K} \bar{\beta} \delta_{kl} \right) \right\} D_{kl} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\hat{T}'_{ij} = T'_{ij} - W_{ik} T'_{kj} + T'_{ik} W_{kj}$ は有効 Cauchy 応力の共回転速度であり、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す。また $\bar{\beta} = (M - \eta) / \sqrt{3}$ 、 $\bar{\tau} = \sqrt{\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} / 2}$ である。さらに、 $\bar{K} = [(1 + e) / \kappa]$ p' は体積弾性係数を、 $\bar{G} = [\{3(1 - 2\nu)(1 + e)\} / \{2(1 + \nu)\kappa\}] p'$ はせん断弾性係数を表しており、 $h = (\bar{\beta} / \sqrt{3} D) p'$ は硬化係数である。

本研究で用いる有限変形非共軸 Cam-clay モデルの構成式は、有限変形共軸 Cam-clay モデルの構成式において物質パラメータを以下のように置き換えることにより与えられる。

$$\bar{G} \rightarrow \frac{h_1 \bar{G}}{h_1 + \bar{G}}, \quad \bar{K} \rightarrow \frac{(h_1 - h) \bar{K}}{h_1 - h - \bar{\beta}^2 \bar{K}}, \quad \bar{\beta} \rightarrow \frac{h_1 \bar{\beta}}{h_1 - h}, \quad h \rightarrow \frac{h_1 h}{h_1 - h}$$

ただし、 h_1 は第 2 硬化係数と呼ばれ、硬化係数と同様の形で次式のように仮定される。

$$h_1 = \frac{\beta}{\sqrt{3} A} p' (> 0)$$

ここで、 A は非共軸パラメータと呼ばれ、 $A = 0$ のとき共軸モデルを表わし、 $A > 0$ のとき非共軸モデルを表わす。

現在まで、非共軸性を詳細に検討した実験例はほとんど見られない。しかし、中空ねじり試験に基づいた非共軸性の存在の指摘、あるいはその必要性を示した研究が、最近行われている。なお、本研究でも上記の h_1 は、Yatomi *et al.*⁸⁾ による表現を適用する。

3. 解析手法

本研究では、有限変形理論に基づいて有限要素法の定式化、および離散化をおこなった。なお、要素には非圧縮変形に適切とされる 4CST 要素を用いた。

有限要素法を用いた分岐解析においては、分岐条件は剛性方程式の解の唯一性が消失する条件として得られる。すなわち、剛性マトリックスの行列式が 0 となるとき、均一な変形を示す解以外の非自明な解（局所的な変形を示す解）の存在が可能となる。しかしながら、行列式の値が 0 になる点を厳密に求めることは困難である。したがって、本解析では、剛性マトリックスの行列式の値を追跡し、行列式の符号が反転する点から分岐点を求めるものとする。

本解析に用いた有限要素分割を図-2 に示す。初期供試体断面の寸法は、高さ 160 mm、幅 80 mm とし、初期状態の個々の要素寸法は、縦 10 mm、横 10 mm の正方形とした。その結果、供試体は、全節点数 153 個、全要素数 128 個に要素分割される。本解析において

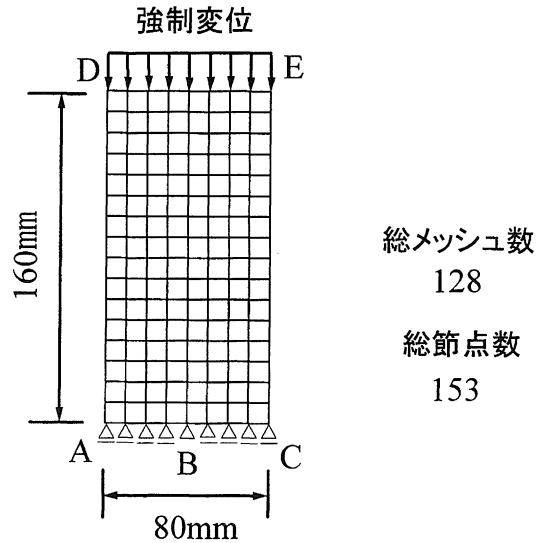


図-2 本解析に用いた有限要素モデル

は、力および変位の境界条件として、下端面においては、鉛直方向は固定とし、水平方向は剛体移動を制限するため点Bで固定としたほかは自由境界としている。一方、上端面においては、鉛直方向は変位制御により一様な押し込みを行い、水平方向は自由境界としている。ただし、上端面における押し込み量は、除荷挙動が生じない程度の一様な変位量で圧縮せん断するものとする。これにより、上下端面に置いて摩擦なしの条件を再現している。また、側面においては大気圧を仮定した。さらに、奥行き方向は無人大とし、平面ひずみ条件を仮定している。一方、水理境界条件として、非排水条件を仮定している。

本解析に用いた梅田層粘土の土質定数¹⁰⁾を表-1に示す。なお、非共軸パラメータAの値は、分岐解析により範囲において検証され適当であるとされた $A=0.01$ とする⁷⁾。

表-1 本解析に用いた土質定数^{7),10)}

$\lambda=0.231$
$\kappa=0.042$
$\nu=0.333$
$e=1.5$
$M=1.43$
$A=0.01$

4. 解析結果および考察

本研究では、平面ひずみ条件下において、正規圧密粘土供試体の非排水圧縮せん断を行う場合の解析を行っている。このとき、载荷の進行に伴う供試体内の最大せん断ひずみ分布の遷移を調べる。なお、最大せん断ひずみのコンターマップをより見やすくするために、図-3に示すように、描画の際に最大せん断ひずみの値を要素中央に与え、要素中央間の最大せん断ひずみの値は線形補間している。

図-4に有限要素法を用いた分岐解析による分岐点近傍の最大せん断ひずみ分布を示す。図-4(a)は、分岐点に達する前（軸ひずみ2.1928%）の供試体内の最大せん断ひずみ分布で

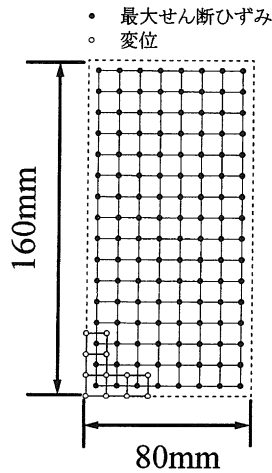


図-3 最大せん断ひずみ描画の際のメッシュ

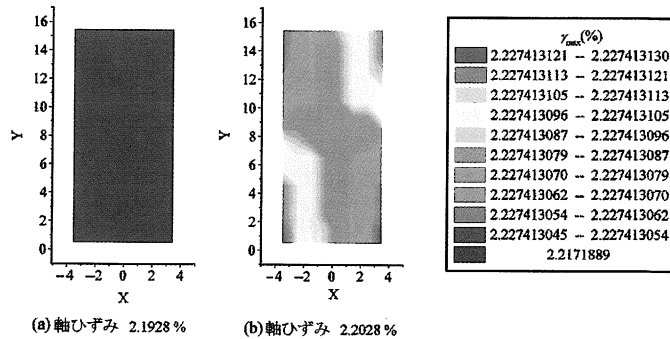


図-4 分岐点近傍の最大せん断ひずみの分布
(有限要素法を用いた分岐解析による結果)

あり、その分布は供試体内で均一である事がわかる。一方、分岐点（軸ひずみ2.2048%）に達すると、供試体内の最大せん断ひずみは極めて小さな差であるが分布にばたつきが生じ、供試体内の最大せん断ひずみの値に違いが認められる（図-4(b)）。図-4(b)においては、供試体内の最大せん断ひずみは、上端部右側および下端部左側で大きな値を示しており、これは理論的な分岐解析における分岐時の最大せん断ひずみの分布⁶⁾と比較するならば、非対称1次変形モードに対応する（図-5）。したがって、非対称1次変形モードの場合の理論的な分岐解析と有限要素法を用いた分岐解析との分岐荷重（分岐点における応力比） η_y と軸ひずみ ε_a の関係の比較を試みる（図-6）。図-6より、理論的な分岐解析に比べ有限要素法を

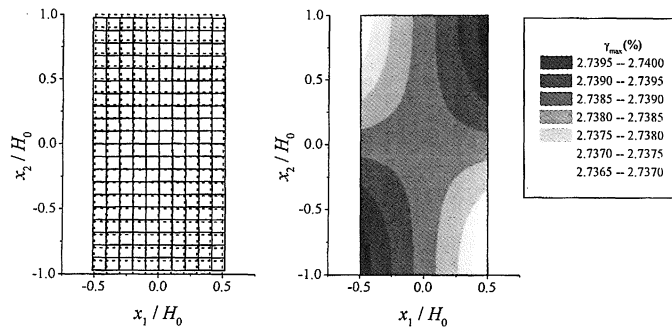


図-5 分岐時変形概形および最大せん断ひずみの分布⁶⁾
 (理論的な分岐解析による結果)

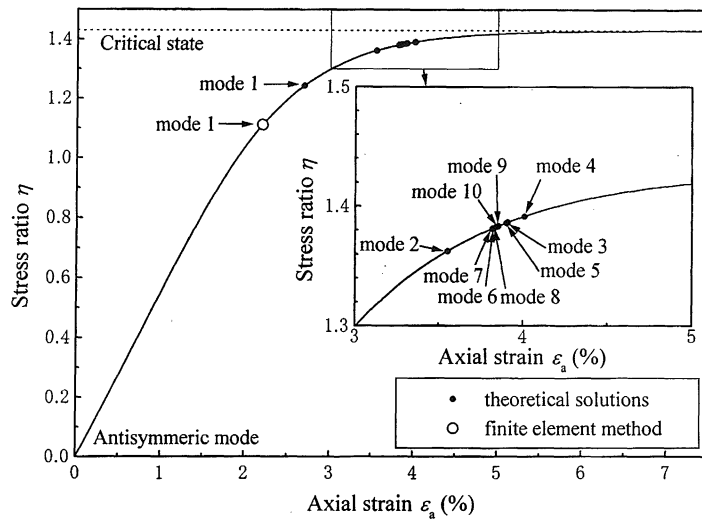


図-6 分岐荷重 η_y と軸ひずみ量 ε_a の関係（参考文献6）に一部加筆

用いた分岐解析の方が分岐荷重，および分岐点に達する軸ひずみが小さくなることが解析的に示されている．この結果は，理論的な分岐解析の場合には，変形の自由度が2つしかないのに対して，有限要素法を用いた分岐解析の場合には，節点数の2倍の自由度に加え各要素に存在する間隙水圧の数の自由度，すなわち，400を超える自由度を有する．したがって，有限要素法を用いた分岐解析の方が変形に対する制約が少ないため，理論的な分岐解析より非均一な現象を生じやすく，分岐点に達する分岐荷重等がより小さな値となったと考えられる．より自由な変形を表現することができる本解析手法は安全な設計を行う上で工学的に非常に有益であると考えられる．

本解析では，分岐点以降の供試体の変形挙動をシミュレーションすることが不可能となった．しかしながら，有限要素モデルに初期不整を導入して有限要素解析を行った擬似分岐解析における供試体内の最大せん断ひずみの分布の遷移過程⁵⁾と本解析から得られた分岐時の供試体内のせん断ひずみの分布を比較することにより，本解析における分岐点以降の供試体内の最大せん断ひずみ分布の遷移過程を予測することが可能である．本解析から得られた分岐点での最大せん断ひずみ分布 (図-4(b)) は，擬似分岐解析における最大せん断ひずみの遷移過程の中においては，図-7(a)に対応するものと考えられる．したがって，分岐点以降の供試体内の最大せん断ひずみ分布は図-7に示すような遷移過程をたどり，供試体内にせ

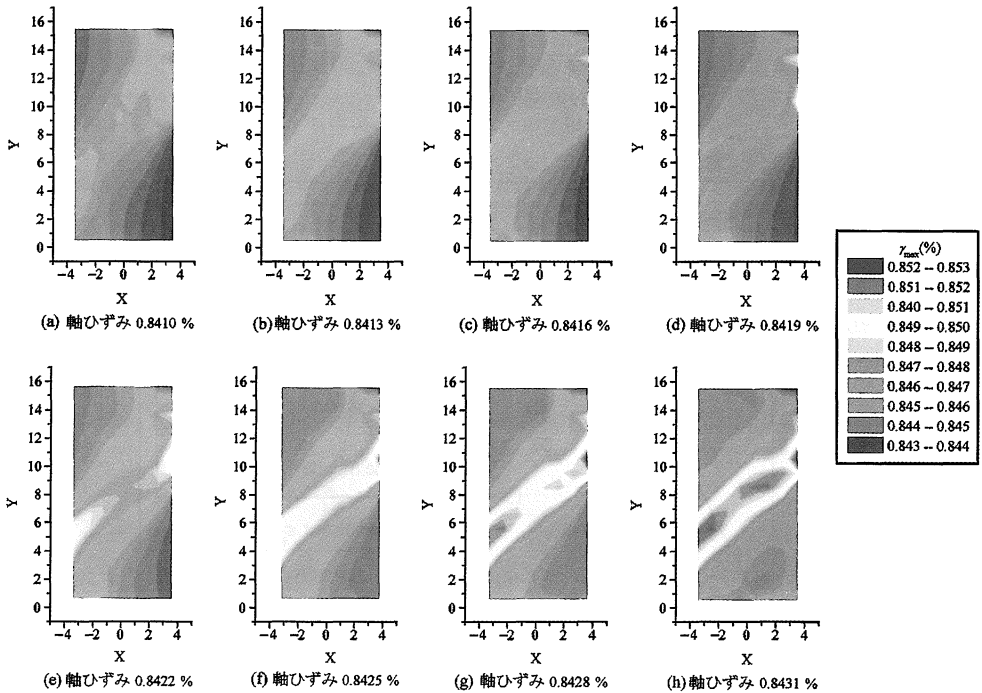


図-7 载荷に伴う共試体内部の最大せん断ひずみ分布の遷移⁵⁾

ん断帯を生じさせ、最終的にすべり面を形成するものと推測される。

5. 結 論

本研究で得られた主要な結論を以下に述べる。

- (1) 梅田層粘土の土質定数を有する非共軸 Cam-clay モデルに対して有限要素法を用いた分岐解析を行った結果、供試体の変形が均一な変形状態から局所的な変形状態へと移行していく可能性を解析的に示唆した。
- (2) 有限要素法を用いた分岐解析の場合、粘土供試体は軸ひずみが2.2028%において分岐点に至り、理論的な分岐解析より早く分岐点に達することが解析的に示された。したがって、より安全な設計を行う上で工学的に非常に有益であると考えられる。

今後、本研究で用いたプログラムを分岐後における供試体の変形および破壊挙動を追跡できるように改良する予定である。

参 考 文 献

- 1) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: Shear Bands formation numerically simulated by a non-coaxial cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol 29, No. 4, pp. 1-13, 1989.
- 2) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Soil-water coupled behavior of saturated clay near/at critical state, *Soils and Foundations*, Vol. 34, No. 1, pp. 91-105, 1994.
- 3) Asaoka, A. and Noda, T.: Imperfection-sensitive bifurcation of cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, Vol. 35, No. 1, pp. 83-100, 1995.
- 4) 小林一三, 飯塚 敦, 太田秀樹: 正規粘土供試体せん断時における局所変形の遷移, 土木学会論文集, No. 617/III-46, pp. 1-18, 1999.
- 5) 志比利秀, 亀井健史, 永吉雄大: 非排水圧縮せん断を受ける正規圧密粘土の局所ひずみの遷移, 地盤と建設 (掲載予定).
- 6) 志比利秀, 矢富盟祥, 亀井健史: 平面ひずみ非排水圧縮条件下における供試体寸法比の変化が正規圧密粘性土の分岐荷重に及ぼす影響, 土木学会論文集, No. 666/III-53, pp. 181-192, 2000.
- 7) 志比利秀, 亀井健史, 東原聡子: 非共軸パラメータの違いが分岐荷重に及ぼす影響, 土木構造・材料論文集 (掲載予定).
- 8) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A. and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and Foundations*, Vol. 29, No. 3, pp. 41-53, 1989.
- 9) Ohta, H.: Analysis of deformations of soils based on the theory of plasticity and its application to settlement of embankments, *Doctor Engineering Thesis*, Kyoto Univ., 1971.
- 10) Sekiguchi, H.: Rheological characteristics of clays, *Proceedings of 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Tokyo, Vol.1, pp.289-292, 1977.