

数学的な見方・考え方を育成する授業実践 —専攻専門科目「算数科内容構成研究」—

柿澤 亮平*

Ryôhei KAKIZAWA

A Teaching Practice for Developing Mathematical Thinking
—Introduction to Mathematics for Elementary School

要 旨

本稿では、筆者が平成27年度前期に担当した「算数科内容構成研究」の構成・実践を通じて、履修者が数学的な見方・考え方をどのように獲得・理解したのかを報告する。本科目は小学校算数科に関連する重点的な四つ～五つのテーマに絞る方向で体系的に構成・実践し、その成果・課題も履修者の授業についての考察・感想を踏まえて述べる。

【キーワード：ペアノの公理，帰納的定義，商集合，順序環，順序体】

1. はじめに

島根大学教育学部の専攻専門科目には「初等教科内容構成研究」と呼ばれる授業科目の分類がある。本稿では、その中から筆者が平成27年度前期に担当した「算数科内容構成研究」の構成・実践を通じて、履修者が数学的な見方・考え方をどのように獲得・理解したのかを報告する。算数・数学には定義、公理などの概念を理解し、それらをもとに命題、定理などの理論を構築するという性質がある。算数・数学の性質を踏まえ、数学的な見方・考え方とは「数学が構成されていくときの中心となる見方や考え方^[1]」であると定義する。

本科目の対象は初等教育開発専攻（主専攻生以外）、人間生活環境教育専攻であるため、[2]で述べられているような、次の二つの実態がある。

- (1) 履修者の多くが、高等学校で学習した数学科目は数学Ⅰ・Ⅱ・A・Bだけである。
- (2) 大学で学習する算数・数学科目は「算数科内容構成研究」だけである。

さらに、高等学校では、数学的な見方・考え方よりも「問題解決の過程などにおいて数学を活用していくときの見方や考え方^[1]」に偏重した学習指導をする傾向があるため、次の実態も看過できないと思われる。

- (3) 履修者の多くが、算数・数学の性質を十分には理解していない。

よって、半期1コマという限られた時間内で履修者の

数学的な見方・考え方を獲得・理解する能力を育成するためには、本科目を、[2]で述べられているような、次の[3]の方向よりも[4]の方向で体系的に構成・実践する方が有効であると考えられる。

- (4) 小学校算数科に関連する重点的な四つ～五つのテーマに絞る[4]の方向。
- (5) 小学校算数科の背景として知っておくべき数学的内容を、個々は浅くなるが広く網羅的に取り扱う[3]の方向。

2～3では、[4]の方向で構成・実践した本科目の内容を述べる。もし履修者が算数・数学の性質を十分に理解すれば、本科目以外の内容の学習指導にも数学的な見方・考え方を応用するだろう。4では、履修者の授業についての感想を踏まえ、筆者の仮説を検証する。

2. 授業内容

第1回のオリエンテーションでは、算数・数学の性質を履修者の考える「良い授業」と関連づけて説明した。ほとんどの履修者は「分かりやすい授業」を「良い授業」と考えていたため、筆者が「分かりやすく授業するために、そもそも教師は算数・数学をどのような学問であると認識していなければならないのでしょうか。」と問うと返答がなく、先の実態1.(3)を把握できた。

第2回～第15回では、小学校算数科の「数と計算」領域の中から次の五つのテーマに絞り、内容を体系的に構成した。

* 島根大学教育学部数理基礎教育講座

- (1) 自然数 (第2回～第3回)
集合, 写像, 単射, 像を用いてペアノの公理を理解し, それをもとに数学的帰納法の理論を構築する。
- (2) 自然数の加法・乗法 (第4回～第7回)
合成写像, 帰納的定義を用いて自然数の加法・乗法を理解し, それらをもとに「 $5 + 3 = 8$ 」や「 $4 \times 3 = 12$ 」を証明する。
- (3) 自然数の減法と整数 (第8回～第9回)
自然数の加法・乗法, 商集合を用いて整数とその加法・乗法を理解し, 整数の加法をもとに「 $8 - 3 = 5$ 」を証明する。
- (4) 自然数の除法と有理数 (第10回～第12回)
整数の加法・乗法, 商集合を用いて有理数とその加法・乗法を理解し, 有理数の乗法をもとに「 $24 \div 3 = 8$ 」を証明する。
- (5) 有理数の大小 (第13回～第15回)
自然数の加法, 整数の乗法を用いて有理数の大小を理解し, それをもとに通分の理論を構築する。

内容を体系的に構成すれば, 履修者が定義, 公理などの概念を実際に理解し, それらをもとに命題, 定理などの理論が構築される過程を経験できる。その結果, 算数・数学の性質を十分に理解できると期待される。

3. 授業実践

本科目では, 各回を演習 (30分) と講義 (60分) に分割し, 演習を実施するために1グループあたり4名のグループを形成した。より具体的に言うと, 次の方針で授業を実践した。

演習では, 履修者は, 筆者が出題した演習課題を次回までに予習し, その成果をグループで発表し合うというグループワーク形式を採用した。全課題の半分は定義, 公理を理解するための内容で, 小学校算数科の教科書に記述された文章も出題した。例えば, 「ペアノの公理に用いられている語句・記号の定義を調べてみよう。」や「教科書では, 自然数を左から1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10の順序で定義しています。その理由と問題点を考えてみよう。」は第2回の演習課題である。全課題の残り半分は定義, 公理を用いて小学校算数科の教科書に記述された文章を理解するという内容で, 題材は履修者が分かったつもりになっていると思われるものを選択した。例えば, 「帰納的定義を用いて, 自然数の加法を $5 + 3 = 8$ 「5たす3は8」のように説明してみよう。」は第5回の演習課題である。

講義では, 履修者が実際に理解した定義, 公理のもとに, 筆者が演習課題についてのいくつかの命題, 定理を証明した。半期1コマという限られた時間内で授業するという制約を踏まえ, 証明した命題, 定理と同様に証明できる命題, 定理は紹介しても証明せず, 証明に用いる定義, 公理を説明するに留めた。講義には, 証明・紹介

した命題, 定理を用いて定義, 公理を理解し直す時間も設けることで, 履修者が各回の内容を振り返られるように配慮した。

各回の終了時には, 履修者に演習課題についての考察・感想を記述する用紙を配布し, 次回までに提出するというルールを設けた。以下, あるグループGが提出した考察・感想を踏まえ, 履修者が数学的な見方・考え方をどのように獲得・理解したのかを報告する。

3.1. 自然数

本テーマでは, 集合 N , N の元 0 , N から N への写像 σ から成る自然数の体系 (ペアノの公理) を導入し, σ が「自然数の次を指す」や「自然数に1をたす」という役割を果たすことを理解した。以下は, 履修者の自然数についての考察・感想 (一部) である。

- (1) もし $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, \dots と決めていなかったら, $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ というのは, あ, い, う, え, お, \dots とかと同じなのではないか。
- (2) 高校までとは全く違う数学を学んで, ちんぷんかんぷんなどころもあるが, 高校で学んだ内容や幼い頃から使っている自然数について, より深く考えることに楽しさを感じた。少しずつ, しっかり理解できるように努めようと思う。

(1) を記述した履修者は, ペアノの公理をもとに数が定義される過程を経験したことで, 算数・数学の性質を十分に理解し, 数が抽象的な概念であるという知見も得られたと考えられる。また, (2) を記述した履修者は概念を理解することの困難よりも概念を理解することの楽しさが勝っており, 算数・数学の性質を理解したいという意思が伺える。

3.2. 自然数の加法・乗法

本テーマでは, 自然数の加法・乗法 (帰納的定義) を導入し, ペアノの公理を用いてそれらの交換法則, 分配法則, 結合法則, 簡約法則を証明した。以下は, 履修者の自然数の加法・乗法についての感想 (一部) である。

- (1) $5 + 3 = 8$ ということが分かった。 σ を考えた人はすごいと思った。
- (2) 自然数の乗法は自然数の加法を使って説明することができるということが分かった。

(1) を記述した履修者は σ といった自然数の加法が構成されていくときの中心となる見方を「 $5 + 3 = 8$ 」と関連づけて獲得したと考えられる。さらに, (2) を記述した履修者は, 自然数の加法をもとに自然数の乗法が定義される過程を経験したことで, 算数・数学の性質を十分に理解したと思われる。他, 1名, 2名の履修者

がそれぞれ (1), (2) と同様の感想を記述した。

3.3. 自然数の減法と整数

本テーマでは、自然数の加法を用いて $N \times N$ 上の同値関係 \sim を導入し、それによる $N \times N$ の商集合 $Z = N \times N / \sim$ を定義した。さらに、整数 (Z の元) の加法・乗法が代表元の選び方に依存しないことを証明し、それらの交換法則、分配法則、結合法則、簡約法則を紹介した。以下は、履修者の自然数の減法と整数についての考察・感想 (一部) である。

- (1) 加法と減法は考え方が同じであり、符号を意識しなければならぬために、正の数のみである自然数、負の数も含む整数、と、扱う数の範囲に違いを、演算の特性のために、設ける必要があるのではないかと思った。
- (2) 定義がきちんとしていなければ進めていくことができないのが数学の難しさではあるが、逆にそれがしっかりしていれば、よく分かる授業をすることができると感じた。

(1) の「演算の特性」とは代数学の「演算の閉性」を意味すると思われる、これを記述した履修者は群、加法逆元といった整数の加法・減法が構成されていくときの中心となる見方を自然数、整数の正負と関連づけて獲得したと考えられる。さらに、(2) を記述した履修者は算数・数学の性質の良さを「分かりやすい授業」と関連づけて実感しており、本科目の構成・実践が十分に機能したと思われる。

3.4. 自然数の除法と有理数

本テーマでは、整数の乗法を用いて $Z \times Z^*$ 上の同値関係 \sim を導入し、それによる $Z \times Z^*$ の商集合 $Q = Z \times Z^* / \sim$ を定義した。有理数 (Q の元) の加法・乗法とそれらの交換法則、分配法則、結合法則、簡約法則も前テーマと同様に講義したが、 Z 、 Q の一般化である環、体をそれぞれ定義することで、3.2～3.4 の内容を理解し直した。以下は、履修者の自然数の除法と有理数についての感想 (一部) である。

- (1) 環と体の大きな違いは、乗法逆元 (すなわち、除法) が存在するかということであった。除法の範囲が有理数でなければならないということが、前々回の感想と関連づけて分かった。
- (2) 元をたどると、「自然数の次」という概念から始まった。加法からたす回数によって説明した乗法、加法・乗法の逆元という考えで説明した減法・除法、と、一つの概念から様々なことを説明することができる分かった。

前テーマの (1) と本テーマの (1) を記述した履修者は同一人物であり、環、体を定義したことで、演算の閉性といった有理数の乗法・除法が構成されていくときの中心となる考え方を理解したと考えられる。さらに、(2) を記述した履修者は、これまでの内容を振り返ることで、算数・数学の性質を理解し直したと思われる。

3.5. 有理数の大小

本テーマでは、自然数の加法を用いて自然数・整数の大小を定義し、整数の乗法・大小を用いて有理数の大小を定義した。最後に、まとめとして、 Z 、 Q の一般化である順序環、順序体をそれぞれ定義することで、本科目の内容を理解し直した。以下は、履修者の有理数の大小についての感想 (一部) である。

- (1) ペアノの公理の σ の性質から、「 $m = k + n$ のとき、 $m > n$ と表す」という定義はスムーズに理解できます。「 \sim より大きい」とか「 \sim より先にある」とか言語を使わずに、最低限の記号や概念でシンプルに本質を表して、すごいと思いました。
- (2) 数を比べるときに、順序的なものと量的なものがあると分かった。今回、考えてみれば分かることや理解できることが多かったが、普段全く考えずに子ども達に教えていたことが明らかとなった。本質を理解する大切さを感じた。

(1) を記述した履修者は、 σ をもとに自然数の大小が定義される過程を経験したことで、算数・数学の性質の良さを実感している。また、(2) を記述した履修者は、順序数の順序、集合数の大小といった自然数の大小が構成されていくときの中心となる見方を獲得したことで、これまでの学習指導を振り返ったと考えられる。

4. おわりに

これまで履修者が数学的な見方・考え方をどのように獲得・理解したのかを報告した。以下、先のグループ G が提出した授業についての感想も踏まえ、本科目の構成・実践の成果・課題を述べる。

4.1. 成果

履修者は算数・数学の性質を十分に理解し、その良さも実感している。さらに、履修者の「数学が構成されていくときの中心となる見方や考え方を獲得・理解する能力も育成できたと思われる。以下は、履修者の授業についての感想 (一部) である。

- (1) この授業を通じて、今まであって当たり前だと思っていた概念の数々の成り立ちについて知ることができました。算数・数学を「役に立つ」という

ことだけではなく、この世界を見る一つの窓・人類共通の文化として感じられたことが良かったです。

- (2) 今期全体の授業を通して、原理を知る大切さを感じた。今後教える立場になったとき、ただ形を教えるのではなく、原理を知った上で教えると分かりやすい説明になると思ったので、算数だけではなく、全てのことで応用できるようにしたい。

(1) を記述した履修者は学問としての算数・数学の意義・良さを実感している。さらに、(2) を記述した履修者は本科目以外の内容の学習指導にも数学的な見方・考え方を応用したいという意味が伺え、筆者の仮説が妥当であるとの根拠になると考えられる。

また、先のグループGに数理基礎教育専攻の履修者はいなかったが、履修者の演習課題についての考察・感想を通じて、算数・数学の性質を理解したいという意味が伺えた。この実態から、算数・数学の性質を理解したいという意味と専攻は関係ないという知見も得られた。

4.2. 課題

算数・数学の性質を理解する以前の課題として、算数・数学の性質を理解したいという意思の弱い学生もいるということが挙げられる。実際、第1回では、グループを形成するため、履修する意思が無い学生には履修取消をするように指導した。その結果、十数名の学生が履修取消をしたのは残念である。以下は、先の実態1.(3)を踏まえて筆者が推論する原因である。

- (1) 諸問題の解決方法に執着しており、概念を理解することに意義・良さを見出せない。
 (2) 諸問題の解決方法に執着はしていないが、概念を理解することに困難を感じている。

(1) の学生には、解決することではなく、解決方法という手段が目的化しているため、算数・数学の性質を十分には理解していないとの認識が欠けており、算数・数学の学習方法も適切でないと考えられる。また、(2) の学生は概念を理解することの意義・良さよりも概念を理解することの困難が勝っていると思われる。(1),(2)を改善するためには、学生の算数・数学に対する認識を調査する必要がある。

算数・数学の性質を理解した後の課題として、[4]の方向で構成・実践した本科目の続編を[3]の方向で構成・実践するということが挙げられる。算数・数学の性質を十分に理解した学生に小学校算数科の背景として知っておくべき数学的内容を広く網羅的に授業することは有効であると思われる。本科目は半期1コマなので、[2]で述べられているように、小学校算数科の内容学としては、少なくとも4単位が必要である。

引用文献

[1] 文部科学省, 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編, 実教出版, 2009年.

参考文献

[2] 丹羽雅彦, 松岡隆, 川崎謙一郎, 大竹博巳, 伊藤仁一, 小学校算数科・教科専門科目の講義内容に関する現況調査の結果と標準モデルの提案, 数理解析研究所講究録 第1828巻, 2013年, 50-60.

[3] 丹羽雅彦, 教員養成系教科専門科目「算数科内容学」の授業構成の一例, 数理解析研究所講究録 第1867巻, 2013年, 81-88.

[4] 松岡隆, 佐伯昭彦, 秋田美代, 小学校教員養成における教科専門科目「算数」の教材例, 数理解析研究所講究録 第1867巻, 2013年, 89-97.