

糲波領域での空胴共振器による 複素誘電率及び透磁率の測定法について

森 弘

(島根大学文理学部物理学教室) (19972. 9. 30受理)

Resonance Methods of Permeability and Dielectric Measurement at
Centimeter Wavelengths.

Hiroshi MORI

Summary

In this paper, the author tried to expand the resonance method of Jackson⁽¹⁾ to be able to measure the complex dielectric constant and permeability of low loss ferrites in the microwave region.

Moreover, the author tried to introduce a few expressions which determine the complex dielectric constant and permeability for lossy material.

I 緒 言

空胴共振器で電磁気材料の複素誘電率及び透磁率の測定法は小試料ですむ摂動法⁽³⁾が一般に多く採用されているようである。然し吸収のすくない試料の場合は厳密解法の方が有力と考える。厳密解法としては、吸収のすくない場合の複素誘電率の測定法として、

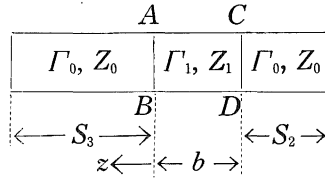
W. Jackson⁽¹⁾, 齊藤⁽²⁾・星合等によって詳細に報告されている。筆者は Jackson の方法を延長して吸収のすくない試料の複素誘電率及び透磁率の同時測定式の誘導を試みた。実測例としてはテフロンを標準試料として誘導測定式の確からしさをしらべ

YIG-3 (Yttrium Iron Garnet) フェライトの測定を行った。

次に、吸収の大きい試料を空胴共振器で測定する場合は測定試料を小形にせざるを得ない。厳密解法では薄板状にした試料を空胴内に如何に挿入するかが困難な問題となる。筆者はこれを解決する一つの方法として、吸収のすくない誘電率既知の誘電体を空胴共振器の一端につめて、その上に測定しようとする板状試料を置く方法を採用してみた。これを含め、二三の測定式を誘導し、実測例を加えて報告する。

II 測定式の誘導

(I) 吸収のすくない場合

(a) ϵ' , μ' の決定

S_2, S_3 領域を空気層, b 領域を試料層とする。

伝播定数 Γ , インピーダンスを Z とすれば

$$Z = Z_0 \left[\frac{Z_{AB} + Z_0 \tanh \Gamma_0 z}{Z_0 + Z_{AB} \tanh \Gamma_0 z} \right]$$

$$Z_{AB} = Z_1 \left[\frac{Z_{CD} + Z_1 \tanh \Gamma_1 b}{Z_1 + Z_{CD} \tanh \Gamma_1 b} \right]. \quad Z_{CD} = jZ_0 \tan \beta_0 S_2$$

$$Z_{AB} = Z_1 \left[\frac{jZ_0 \tan \beta_0 S_2 + Z_1 \tanh \Gamma_1 b}{Z_1 + jZ_0 \tan \beta_0 S_2 \tanh \Gamma_1 b} \right]$$

$$Z'_{AB} = Z_0 \tanh \Gamma_0 S_3 \doteq jZ_0 \tan \beta_0 S_3$$

共振条件は

$$[Z_{AB}]_{\text{img}} + [Z'_{AB}]_{\text{img}} = 0,$$

$S_2 = 0$ の場合

$$Z_{AB} = Z_0 \left[\frac{\tanh \Gamma_1 b}{\frac{Z_0}{Z_1}} \right], \quad \text{共振の shift を } \Delta \text{ とすれば}$$

$$S_3 + b + \Delta = \frac{1}{2} \lambda_g m$$

低損失の場合は

$$\tanh \Gamma_1 b \doteq j \tan \frac{2\pi b}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon' \mu' - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2} = j \tan \beta_1 b$$

$$\frac{Z_0}{Z_1} \doteq \frac{\sqrt{\epsilon' \mu' - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}{\mu' \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \quad \epsilon' \text{ は } \frac{\epsilon'}{\epsilon_0} - j \frac{\epsilon''}{\epsilon_0} \text{ の } \frac{\epsilon'}{\epsilon_0}$$

$$\mu' \text{ は } \frac{\mu'}{\mu_0} - j \frac{\mu''}{\mu_0} \text{ の } \frac{\mu'}{\mu_0} \text{ をさす。}$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{\sqrt{\epsilon' \mu' - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}}{\mu' \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\beta_1}{\mu' \beta_0}$$

依って

$$\frac{\mu' \tan \beta_1 b}{\beta_1} = \frac{\tan \beta_0 (b + \Delta)}{\beta_0}$$

$S_2 = \frac{1}{4} \lambda_g$ の場合

$$Z_{AB} = Z_0 \left[\frac{1}{\frac{Z_0}{Z} \tanh \Gamma_1 b} \right] \doteq Z_0 \left[\frac{1}{j \frac{\beta_1}{\mu' \beta_0} \tan \beta_1 b} \right]$$

共振の shift を Δ' とすれば $S_3 + b + \frac{1}{4}\lambda_g + \Delta' = \frac{1}{2}\lambda_g m$

$$\tan \beta_0 S_3 = \cot \beta_0 (b + \Delta'), \quad [Z_{AB}]_{\text{img}} + [Z_{AB}]_{\text{img}} = 0$$

依って

$$\tan \beta_0 (b + \Delta') = \frac{\beta_0}{\mu' \beta_1} \tan \beta_1 b$$

依って

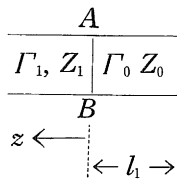
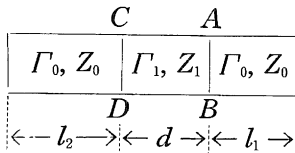
$$\tan \beta_0 (b + \Delta) \cdot \tan \beta_0 (b + \Delta') = (\tan \beta_1 b)^2$$

従って $\tan \beta_1 b$ 即ち $\sqrt{\varepsilon' \mu' - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}$ が決まる。

何れか一方の式に代入すれば μ' が決まる。依って ε' が決まる。

(b) $\tan \delta_i$, $\tan \delta_\mu$ の決定

純電磁界の方法で求める。各層の電磁界について、 l_1 領域を第1領域、 d 領域を第2領域、 l_2 領域を第3領域とする。



矩形型共振器でも円筒型共振器でも同様であるから矩形型で求める。第2領域の電界成分はAB境界面での電界、磁界成分を E_{xR} , H_{yR} とすれば

$$Z_{AB} = \frac{E_{xR}}{H_{yR}}$$

$$E_x = E_{xR} \left(\cosh \Gamma_1 z + \frac{Z_1}{Z_{AB}} \sinh \Gamma_1 z \right) f(x, y)$$

$$H_y = \frac{E_{xR}}{Z_{AB}} \left(\cosh \Gamma_1 z + \frac{Z_{AB}}{Z_1} \sinh \Gamma_1 z \right) f(x, y)$$

$$Z_{AB} = Z_0 \tanh \Gamma_0 l_1 \doteq j Z_0 \tan \beta_0 l_1, \quad E_{AB} = (Ae^{\Gamma_0 l_1} + Be^{-\Gamma_0 l_1}) f(x, y)$$

$$E_{xR} = E_{AB} = j2A \sin \beta_0 l_1 \quad \Gamma_1 = \alpha_1 + j \beta_1$$

$$\frac{Z_1}{Z_0} = \mu' \frac{\beta_0}{\beta_1} \left(1 + j \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) = \frac{\mu'}{n} \left(1 + j \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \quad \text{ここに } n = \frac{\beta_1}{\beta_0}$$

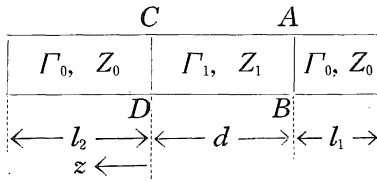
$$E_x = f(x, y) \left[\cosh \alpha_1 z \left\{ \cos \beta_1 z \sin \beta_0 l_1 + \frac{\mu'}{n} \sin \beta_1 z \cos \beta_0 l_1 \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\alpha_1 \mu'}{n \beta_1} \tanh \alpha_1 z \cos \beta_1 z \cos \beta_0 l_1 \left. \right\} + j \left\{ \frac{\alpha_1 \mu'}{n \beta_1} \cosh \alpha_1 z \sin \beta_0 z \cos \beta_0 l_1 \right. \\
& \left. + \sinh \alpha_1 z \left(\sin \beta_1 z \sin \beta_0 l_1 - \frac{\mu'}{n} \cos \beta_1 z \cos \beta_0 l_1 \right) \right\} \\
E_x & \doteq f(x, y) \cosh \alpha_1 z \left[\cos \beta_1 z \sin \beta_0 l_1 + \frac{\mu'}{n} \sin \beta_1 z \cos \beta_0 l_1 \right. \\
& \left. + j \alpha_1 z \left\{ \frac{\mu'}{n} \cos \beta_0 l_1 \cos \beta_1 z - \left(\sin \beta_0 l_1 + \frac{\mu'}{n \beta_1 z} \cos \beta_0 l_1 \right) \sin \beta_1 z \right\} \right] \\
& = f(x, y) \cosh \alpha_1 z \left[R_1 \sin(\beta_1 z + \varphi') - j \alpha_1 z R_2 \cos(\beta_1 z + \varphi'') \right]
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
R_1 & = \left[\sin^2 \beta_0 l_1 + \left(\frac{\mu'}{n} \right)^2 \cos^2 \beta_0 l_1 \right]^{\frac{1}{2}} \\
\tan \varphi' & = \frac{\sin \beta_0 l_1}{\frac{\mu'}{n} \cos \beta_0 l_1} = \frac{n}{\mu'} \tan \beta_0 l_1 \\
R_2 & = \left[\left(\frac{\mu'}{n} \right)^2 \cos \beta_0 l_1 + \left(\sin \beta_0 l_1 + \frac{\mu'}{n \beta_1 z} \cos \beta_0 l_1 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
\tan \varphi'' & = \frac{\sin \beta_0 l_1 + \frac{\mu'}{n \beta_1 z} \cos \beta_0 l_1}{\left(\frac{\mu'}{n} \right) \cos \beta_0 l_1} \\
& = \frac{n}{\mu'} \tan \beta_0 l_1 + \frac{1}{\beta_1 z}
\end{aligned}$$

次に第3領域での電界成分



$$\begin{aligned}
E_x & = E_{CD} \left(\cosh \Gamma_0 z + \frac{Z_0}{Z_{CD}} \sinh \Gamma_0 z \right) f(x, y) \\
& = f(x, y) \left[\left\{ \sin \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d + \frac{\mu'}{n} \cos \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - j \alpha_1 z \left(\frac{\mu'}{n} \cos \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d - \frac{\mu'}{n \beta_1 d} \cos \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sin \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d \Big) \Big\} \left[\cosh \Gamma_0 z + \frac{Z_0}{Z_{CD}} \sinh \Gamma_0 z \right] \\
 Z_{CD} &= Z_1 \left[\frac{Z_{AB} + Z_1 \tanh \Gamma_1 d}{Z_1 + Z_{AB} \tanh \Gamma_1 d} \right], \quad \tanh \alpha_1 d \doteq \alpha_1 d \\
 \frac{Z_0}{Z_{CD}} &= \frac{\frac{n}{\mu'} \left(1 - j \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) \left\{ P + j \alpha_1 \left(\frac{\mu'}{n \beta_1} + Qd \right) \right\}}{\alpha_1 \left(Pd - \frac{\mu'}{n \beta_1} \tan \beta_1 d \right) + jQ}
 \end{aligned}$$

ここに

$$P = \frac{\mu'}{n} - \tan \beta_0 l_1 \tan \beta_1 d$$

$$Q = \tan \beta_0 l_1 + \frac{\mu'}{n} \tan \beta_1 d$$

$$\begin{aligned}
 \frac{Z_0}{Z_{CD}} \sinh \Gamma_0 z &= \frac{1}{Q^2} \left[\frac{n}{\mu'} PQ \sin \beta_0 z + j \alpha_1 \left(Pd - \frac{\mu'}{n \beta_1} \tan \beta_1 d \right) \frac{n}{\mu'} P \sin \beta_0 z \right. \\
 & \quad \left. - jQ \left\{ \frac{nd_1}{\mu' \beta_1} P - \frac{n \alpha_1}{\mu'} \left(\frac{\mu'}{n \beta_1} + Qd \right) \right\} \sin \beta_0 z \right]
 \end{aligned}$$

$$R = \sin \beta_0 l_1 \cdot \cos \beta_1 d + \frac{\mu_1}{n} \cos \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d$$

$$S = \frac{\mu'}{n} \cos \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d - \frac{\mu'}{n \beta_1 d} \cos \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d - \sin \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d$$

とおけば

$$\begin{aligned}
 E_x &= f(x, y) \left\{ (R - j \alpha_1 S d) \left(\cosh \Gamma_0 z + \frac{Z_0}{Z_{CD}} \sinh \Gamma_0 z \right) \right\} \\
 &= f(x, y) \left[R \left(\cos \beta_0 z + \frac{n}{\mu'} \frac{P}{Q} \sin \beta_0 z \right) - j \alpha_1 d \left\{ S \left(\cos \beta_0 z + \frac{n}{\mu'} \frac{P}{Q} \sin \beta_0 z \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - R \frac{P}{Q^2} \frac{n}{\mu'} \left(P - \frac{\mu'}{n \beta_1 d} \tan \beta_1 d \right) \sin \beta_0 z \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left(\frac{n P R}{\mu' \beta_1 d} - \frac{n R}{\mu' d} \left(\frac{\mu'}{n \beta_1} + Qd \right) \frac{\sin \beta_0 z}{Q} \right) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[R^2 \left(1 + \frac{n^2}{\mu'^2} \frac{P^2}{Q^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} &= \left(\sin \beta_0 l \cos \beta_1 d + \frac{\mu'}{n} \cos \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d \right) \\
 & \quad \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{n}{\mu'} \right)^2 \left(\frac{\mu'}{n} - \tan \beta_0 l_1 \tan \beta_1 d \right)^2}{\left(\tan \beta_0 l_1 + \frac{\mu'}{n} \tan \beta_1 d \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$= R_3 \quad \text{とおく}$$

$$R_3 = \left[\left(\frac{\mu'}{n} \right)^2 \left(\cos \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d + \frac{n}{\mu'} \sin \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\cos \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d - \frac{n}{\mu'} \sin \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \tan \varphi''' = \frac{\mu' Q}{nP} = \frac{\frac{\mu'}{n} \tan \beta_1 d + \tan \beta_0 l_1}{1 - \frac{n}{\mu'} \tan \beta_0 l_1 \tan \beta_1 d}$$

$$S = \cos \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d \left(\frac{\mu'}{n} - \frac{\mu'}{n \beta_1 d} \tan \beta_1 d - \tan \beta_0 l_1 \tan \beta_1 d \right) \\ = \cos \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d \left(P - \frac{\mu'}{n \beta_1 d} \tan \beta_1 d \right)$$

依って

$$\cos \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d = \frac{R}{Q} \quad \text{これを } E_x \text{ の虚数項に代入}$$

$$j \alpha_1 d \left[S \cos \beta_0 z + \left\{ R \left(\frac{nP}{\mu' \beta_1 d Q} - \frac{1}{\beta_1 Q d} - \frac{n}{\mu'} \right) \right\} \sin \beta_0 z \right] \\ = j \alpha_1 d \left[S \cos \beta_0 z - \left\{ \frac{n}{\mu' \beta_1 d} \sin \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d + \frac{n}{\mu'} \sin \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d \right. \right. \\ \left. \left. + \cos \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d \right\} \sin \beta_0 z \right]$$

$$S = \frac{\mu'}{n} \cos \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d - \frac{\mu'}{n \beta_1 d} \cos \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d - \sin \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d$$

を代入

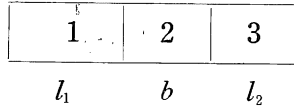
$$\left[\left(\frac{\mu'}{n} \right)^2 \left(\cos \beta_0 l_1 \cos \beta_1 d - \frac{1}{\beta_1 d} \cos \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d - \frac{n}{\mu'} \sin \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\cos \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d + \frac{n}{\mu'} \sin \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d + \frac{n}{\mu' \beta_1 d} \sin \beta_0 l_1 \sin \beta_1 d \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ = R_4 \text{ とおく}$$

$$\tan \varphi'''' = \frac{\frac{n}{\beta_1 d} \tan \beta_1 d \tan \beta_0 l_1 + \frac{n}{\mu'} \tan \beta_0 l_1 + \tan \beta_1 d}{\frac{\mu'}{n} - \frac{\mu'}{n \beta_1 d} \tan \beta_1 d - \tan \beta_0 l_1 \tan \beta_1 d}$$

依って第3領域の電界成分は

$$E_x = f(x, y) \{ R_3 \sin(\beta_1 z + \varphi''') - j \alpha_1 d \cdot R_4 \cos(\beta_1 z + \varphi''') \}$$

磁界成分も同様にして得、以上の結果は円筒空洞でも全く同様である。依って円筒空洞の H_{01s} mode の電磁界は



第1, 第3領域は空気層
第2領域を試料層とする。

第1領域では

$$E_{r1} = 0$$

$$E_{z1} = 0$$

$$E_{\theta 1} = j\mu_1\omega \frac{y'_{01}}{a} J'_0\left(y'_{01} \frac{r}{a}\right) \sin\beta_1 z$$

$$H_{r1} = \beta_1 \frac{y'_{01}}{a} J'_0\left(y'_{01} \frac{r}{a}\right) \cos\beta_1 z$$

$$H_{z1} = \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^2 J_0\left(y'_{01} \frac{r}{a}\right) \sin\beta_1 z$$

$$H_{\theta 1} = 0$$

第2領域では

$$E_{r2} = 0 \quad E_{z2} = 0$$

$$E_{\theta 2} = j\mu_2\omega \frac{y'_{01}}{a} J'_0\left(y'_{01} \frac{r}{a}\right) \{R_1 \sin(\beta_2 t + \varphi') - j\alpha_2 t R_2 \cos(\beta_2 t + \varphi')\}$$

$$H_{r2} = \beta_2 \frac{y'_{01}}{a} J'_0\left(y'_{01} \frac{r}{a}\right) \{R_1 \cos(\beta_2 t + \varphi') + j\alpha_2 t R_2 \sin(\beta_2 t + \varphi')\}$$

$$H_{z2} = \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^2 J_0\left(y'_{01} \frac{r}{a}\right) \{R_1 \sin(\beta_2 t + \varphi') - j\alpha_2 t R_2 \cos(\beta_2 t + \varphi')\}$$

$$H_{\theta 2} = 0 \quad \text{ただし} \quad t = z - l_1$$

第3領域では

$$E_{r3} = 0, \quad E_{z3} = 0$$

$$E_{\theta 3} = j\mu_1\omega \frac{y'_{01}}{a} J'_0\left(y'_{01} \frac{r}{a}\right) \{R_3 \sin(\beta_1 t' + \varphi''') - j\alpha_2 R_4 b \cos(\beta_1 t' + \varphi''')\}$$

$$H_{r3} = \beta_1 \frac{y'_{01}}{a} J'_0\left(y'_{01} \frac{r}{a}\right) \{R_3 \cos(\beta_1 t' + \varphi''') + j\alpha_2 R_4 b \sin(\beta_1 t' + \varphi''')\}$$

$$H_{z3} = \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^2 J_0\left(y'_{01} \frac{r}{a}\right) \{R_3 \sin(\beta_1 t' + \varphi''') - j\alpha_2 R_4 b \cos(\beta_1 t' + \varphi''')\}$$

$$H_{\theta 3} = 0$$

$$\text{ただし} \quad t' = z - (l_1 + b)$$

$$R_1^2 = \sin^2\beta_1 l_1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 \cos^2\beta_1 l_1$$

$$R_2^2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 \cos^2\beta_1 l_1 + \left(\sin\beta_1 l_1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{1}{\beta_2 t} \cos\beta_1 l_1\right)^2$$

$$\tan \varphi' = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\beta_2}{\beta_1} \tan \beta_1 l_1, \quad \tan \varphi'' = \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_1}{\mu_2} \tan \beta_1 l_1 + \frac{1}{\beta_2 d}$$

$$R_3^2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 \left(\cos \beta_1 l_1 \sin \beta_2 d + \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \beta_1 l_1 \cos \beta_2 d \right)^2 \\ + \left(\cos \beta_1 l_1 \cos \beta_2 d - \frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_1}{\mu_2} \sin \beta_1 l_1 \sin \beta_2 d \right)^2$$

$$R_4^2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 \left(\cos \beta_1 l_1 \cos \beta_1 d - \frac{1}{\beta_2 d} \cos \beta_1 l_1 \sin \beta_2 d - \frac{\beta_2 \mu_1}{\beta_1 \mu_2} \sin \beta_1 l_1 \sin \beta_2 d \right)^2 \\ + \left(\cos \beta_1 l_1 \sin \beta_2 d + \frac{\beta_2 \mu_1}{\beta_1 \mu_2} \sin \beta_1 l_1 \cos \beta_2 d + \frac{\beta_2 \mu_1}{\beta_1 \mu_2} \frac{1}{\beta_2 d} \sin \beta_1 l_1 \sin \beta_2 d \right)^2$$

$$\tan \varphi''' = \frac{\frac{\mu_2 \beta_1}{\mu_1 \beta_2} \tan \beta_2 d + \tan \beta_1 l_1}{1 - \frac{\beta_2 \mu_1}{\beta_1 \mu_2} \tan \beta_1 l_1 \tan \beta_2 d}$$

$$\cot \varphi'''' = \frac{\frac{\beta_1 \mu_2}{\beta_2 \mu_1} - \frac{\beta_1 \mu_2}{\beta_2 \mu_1 \beta_2 d} \tan \beta_2 d - \tan \beta_1 l_1 \tan \beta_2 d}{\tan \beta_2 d + \frac{\beta_2 \mu_1}{\beta_1 \mu_2} \tan \beta_1 l_1 + \frac{\mu_1}{\beta_1 \mu_2 d} \tan \beta_1 l_1 \tan \beta_2 d}$$

各領域にたくわえられる電磁エネルギーは

領域1内にたくわえられる電磁エネルギー W_1

領域2内にたくわえられる電磁エネルギー W_2

領域3内にたくわえられる電磁エネルギー W_3

$$W_1 = \frac{\varepsilon_1}{2} \iiint E_{01}^2 \, r \, dr \, d\theta \, dz \\ = \frac{\varepsilon_1}{2} \mu_1^2 \omega^2 \left(\frac{y_{01}}{a} \right)^2 \int_0^a \left[J_0 \left(y_{01} \frac{r}{a} \right) \right]^2 r \, dr \int_0^{2\pi} \int_0^d \sin^2 \beta_1 z \, dz \, d\theta \\ = \frac{1}{4} \pi \mu_1^2 \varepsilon_1 \omega^2 (y_{01})^2 [J_0(y_{01})]^2 \left(l_1 - \frac{1}{2\beta_1} \sin 2\beta_1 l_1 \right)$$

同様にして

$$W_2 = \frac{1}{4} \pi \mu_2^2 \varepsilon_2 \omega^2 R_1^2 (y_{01})^2 [J_0(y_{01})]^2 \left\{ b - \frac{1}{2\beta_2} [\sin 2(\beta_2 b + \varphi') - \sin 2\varphi'] \right\}$$

$$W_3 = \frac{1}{4} \pi \mu_1^2 \varepsilon_1 \omega^2 R_3^2 (y_{01})^2 [J_0(y_{01})]^2 \left\{ l_2 - \frac{1}{2\beta_1} [\sin 2(\beta_1 l_2 + \varphi''') - \sin 2\varphi'''] \right\}$$

次に損失について

領域1の短絡板による損失 L_1

領域1の円周金属壁による損失 L_1'

領域 2 の円周金属壁による損失 L'_2

領域 3 の円周金属壁による損失 L'_3

領域 3 の短絡板による損失 L_3

$$L_1 = 2\beta_1^2 \int_0^a \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^2 \left[J_0\left(\frac{y'_{01}}{a}r\right)\right]^2 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} \beta_1^2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2$$

$$L'_1 = \frac{1}{2}\pi a \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^4 [J_0(y'_{01})]^2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} \left(l_1 - \frac{1}{2\beta_1} \sin 2\beta_1 l_1\right)$$

$$L'_2 = \frac{1}{2}\pi a \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^4 [J_0(y'_{01})]^2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} R_1^2 \left\{ b - \frac{1}{2\beta_2} [\sin 2(\beta_2 b + \varphi') + \sin 2\varphi'] \right\}$$

$$L'_3 = \frac{1}{2}\pi a \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^4 [J_0(y'_{01})]^2 R_3^2 \left\{ l_2 - \frac{1}{2\beta_1} [\sin 2(\beta_1 l_2 + \varphi''') + \sin 2\varphi'''] \right\}$$

$$L_3 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} \beta_1^2 R_3^2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2$$

第 2 領域内での媒質中での誘電損失 $L = \omega W_2 \tan \delta_e$

第 2 領域内での媒質中での磁気損失

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}\omega\mu_2' \int |H|^2 dv = \frac{1}{2}\omega\mu_2' \frac{\mu_2''}{\mu_2'} \int |H|^2 dv = \frac{1}{2}\omega\mu_2' \tan \delta_\mu \int |H|^2 dv \\ &= \frac{1}{2}\omega\mu_2' \tan \delta_\mu \int (|H_r|^2 + |H_z|^2) dv \\ &= \frac{1}{2}\omega\mu_2' \tan \delta_\mu \left[\beta_2^2 \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^2 R_1^2 \int_0^a \left[J_0\left(\frac{y'_{01}}{a}r\right)\right]^2 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \cos^2(\beta_2 z + \varphi') dz \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^4 R_1^2 \int_0^a \left[J_0\left(\frac{y'_{01}}{a}r\right)\right]^2 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \sin^2(\beta_2 z + \varphi') dz \right] \\ &= \frac{1}{2}\omega\mu_2' \tan \delta_\mu \left[\frac{1}{2}\pi\beta_2^2 a^2 \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^2 R_1^2 [J_0(y'_{01})]^2 \left\{ b + \frac{1}{2\beta_2} \sin 2(\beta_2 z + \varphi') - \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\varphi' \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\pi a^2 \left(\frac{y'_{01}}{a}\right)^4 R_1^2 [J_0(y'_{01})]^2 \left\{ b - \frac{1}{2\beta_2} \sin 2(\beta_2 z + \varphi') + \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\varphi' \right\} \right] \end{aligned}$$

$l_2 = 0$ の場合

$$\frac{\mu_2' \tan \beta_2 b}{\mu_0 \beta_2} = \frac{\tan \beta_1 (b + \Delta)}{\beta_1} \quad \text{の関係があるので}$$

また $\mu_2' \doteq \mu_2$ とおけるから

$$\tan \varphi' = \frac{\beta_2 \mu_0}{\beta_1 \mu_2} \tan \beta_1 l_1 \quad l_1 + b + \Delta = \frac{1}{4} \lambda_0 \cdot 2m$$

依って

$$\tan \varphi' = -\tan \beta_2 b \quad \therefore \varphi' = \pi - \beta_2 b$$

従って

$$\sin 2(\beta_2 b + \varphi') - \sin 2\varphi' = \sin 2\beta_2 b$$

$$R_1^2 = \sin^2 \beta_1 l_1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} \right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 \cos^2 \beta_1 l_1 = \left(\frac{\sin \beta_1 l_1}{\sin \beta_2 b} \right)^2$$

依って

$$W_1 = \frac{1}{4} \pi \mu_1^2 \varepsilon_1 \omega^2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 \left(l_1 - \frac{1}{2\beta_1} \sin 2\beta_1 l_1 \right)$$

$$W_2 = \frac{1}{4} \pi \mu_2^2 \varepsilon_2 \omega_2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 R_1^2 \left(b - \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right)$$

$$\Sigma W = W_1 + W_2$$

$$= \frac{1}{4} \pi \mu_1^2 \varepsilon_2 \omega_2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left(l_1 - \frac{1}{2\beta_1} \sin 2\beta_1 l_1 \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta_1 l_1}{\sin \beta_2 b} \right)^2 \left(b - \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) \right]$$

次に損失について

領域3がないから L' は L'_2 となり L_3 の β_1 は β_2 に, R_3 は R_1 になるべきである。

損失の和

$$\Sigma L = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 \left[a(\beta_1^2 + R_1^2 \beta_2^2) + \left(\frac{y'_{01}}{a} \right)^2 \left(l_1 - \frac{1}{2\beta_1} \sin 2\beta_1 l_1 \right) \right. \\ \left. + R_1^2 \left(\frac{y'_{01}}{a} \right)^2 \left(b - \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) \right] + \omega W_2 \tan \delta_e \\ + \omega \mu_2 \tan \delta_\mu \left[\pi \beta_2^2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 R_1^2 \left(b + \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) \right. \\ \left. + \pi a^2 \left(\frac{y'_{01}}{a} \right)^4 [J_0(y'_{01})]^2 R_1^2 \left(b - \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) \right]$$

$$R_1^2 = \left(\frac{\sin \beta_1 l_1}{\sin \beta_2 b} \right)^2 = P, \quad \frac{1}{\beta_2} \sin 2\beta_2 b = S \quad \frac{y'_{01}}{a} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = K$$

$$\frac{\sin 2\beta_1 l_1}{\beta_1} = q \quad l_1 = l_r - b \quad \mu_1 = \mu_0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0$$

$$\frac{2}{\mu_1 \omega} \sqrt{\frac{\omega \mu_1}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_1 \sigma}} = \delta \quad \mu_2 \varepsilon_2 \omega^2 = \beta_2^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 = \beta_2^2 + K^2$$

$$\mu_1 \varepsilon_2 \omega^2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} (\mu_1 \varepsilon_1 a^2) = (\beta_1^2 + K^2) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

$$Q = \frac{\omega \Sigma W}{\Sigma L}$$

$$= \frac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 P(2b-s) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \{2(l_r-b) - q\}}{\frac{\delta}{a} \left[\frac{K^2 \{P(2b-s) + 2(l_r-b) - q\} + 2a(P\beta_2^2 + \beta_1^2)}{(\beta_1^2 + K^2) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}} \right]} + \left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 P(2b-s) \tan \delta_e + R \tan \delta_\mu$$

若し $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$, $\tan \delta_\mu = 0$ とすれば $(\beta_1^2 + K^2) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = (\beta_1^2 + K^2) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\mu_2}{\mu_1}$

$$= \varepsilon_1 \mu_1 \omega^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\mu_2}{\mu_1} = \mu_1 \varepsilon_2 \omega^2 = \mu_2 \varepsilon_2 \omega^2 = \beta_2^2 + K^2 \quad \text{尚} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_0 = K_0, \quad \varepsilon_2 = K_1 \\ \beta_2 = \beta_1, \quad \beta_1 = \beta_0 \end{array} \quad \text{と}$$

書きかえれば

$$Q = \frac{P(2b-s) + \frac{K_0}{K_1} \{2(l_r-b) - q\}}{\frac{\delta}{a} \left(\frac{1}{\beta_1^2 + K^2} \right) \{K^2 [P(2b-s) + 2(l_r-b) - q] + 2a(P\beta_1^2 + \beta_0^2)\} + P(2b-s) \tan \delta}$$

となり Jackson の論文の結論式と全く一致する。

$$R = \frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} P \left(\frac{1}{\beta_0^2 + K^2} \right) \left\{ \left(2b + \frac{\sin 2\beta_2 b}{\beta_2} \right) \beta_2^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2 \left(2b - \frac{\sin 2\beta_2 b}{\beta_2} \right) \right\}$$

$\tan \delta_e = 0$, $\tan \delta_\mu = 0$ としたときの Q を Q_m とすれば

$$Q_m = \frac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 P(2b-s) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \{2(l_r-b) - q\}}{\frac{\delta}{a} \left[\frac{K^2 \{P(2b-s) + 2(l_r-b) - q\}}{(\beta_0^2 + K^2) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}} \right]}$$

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_m} = \frac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 P(2b-s) \tan \delta_e + R \tan \delta_\mu}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 P(2b-s) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} [2(l_r-b) - q]} \quad \text{を得。}$$

$l_1 = \frac{1}{4}\lambda_g$ の場合

$$R_1 = R_2 = 1, \quad \varphi' = \frac{\pi}{2}, \quad \tan \varphi''' = \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \tan \left(\beta_2 b + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$R_3^2 = \cos^2 \beta_2 b + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_0}{\mu_2} \right)^2 \sin^2 \beta_2 b, \quad t = \frac{1}{2\beta_1} [\sin 2(\beta_1 l_2 + \varphi''') - \sin 2\varphi''']$$

とする。 $l_2 = 0$ の場合と同様にして

$$W_1 = \frac{1}{4}\pi \varepsilon_1 \mu_1^2 \omega^2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 \frac{\pi}{2\beta_1}$$

$$W_2 = \frac{1}{4}\pi \varepsilon_2 \mu_2^2 \omega^2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 \left(b + \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right)$$

$$W_3 = \frac{1}{4}\pi \varepsilon_1 \mu_1^2 \omega^2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 \left[\cos^2 \beta_2 b + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_0}{\mu_2} \right)^2 \sin^2 \beta_2 b \right] (l_2 - t)$$

$$L_1 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} \beta_1^2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2$$

$$L'_1 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} a \left(\frac{y'_{01}}{a} \right)^4 [J_0(y'_{01})]^2 \frac{\pi}{2\beta_1}$$

$$L'_2 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} a \left(\frac{y'_{01}}{a} \right)^4 [J_0(y'_{01})]^2 \left(b + \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right)$$

$$L'_3 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} a \left(\frac{y'_{01}}{a} \right)^4 [J_0(y'_{01})]^2 \left[\cos^2 \beta_2 b + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_0}{\mu_2} \right)^2 \sin^2 \beta_2 b \right] \cdot (l_2 - t)$$

$$L_3 = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} \beta_1^2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 \left[\cos^2 \beta_2 b + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_0}{\mu_2} \right)^2 \sin^2 \beta_2 b \right]$$

$$L = \omega W_2 \tan \delta_e$$

$$L' = \omega \mu_2 \tan \delta_\mu \cdot \frac{1}{4}\pi (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]_2 \left[\beta_2^2 \left(b - \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2 \left(b + \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \Sigma W &= \frac{1}{4}\pi \mu_1^2 \varepsilon_1 \omega^2 (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 \left[\frac{\pi}{2\beta_1} + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \left(b + \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \cos^2 \beta_2 b + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_0}{\mu_2} \right)^2 \sin^2 \beta_2 b \right\} (l_2 - t) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma L &= \frac{1}{4}\pi (y'_{01})^2 [J_0(y'_{01})]^2 \left[2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} \left\{ \beta_1^2 + \frac{\pi}{2\beta_1} \left(\frac{y'_{01}}{a} \right)^2 \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \left(\frac{y'_{01}}{a} \right)^2 \left(b + \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{a} \left(\frac{y'_{01}}{a} \right)^2 \left(\cos^2 \beta_2 b + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_0}{\mu_2} \right)^2 \sin^2 \beta_2 b \right) (l_2 - t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{a} \left(\frac{y'_{01}}{a} \right)^2 \beta_1^2 \left(\cos^2 \beta_2 b + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_0}{\mu_2} \right)^2 \sin^2 \beta_2 b \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \omega \mu_2 \tan \delta_\mu \left\{ \beta_2^2 \left(b - \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda_r} \right)^2 \left(b + \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \omega \tan \delta_e \left\{ \mu_2^2 \varepsilon_2 \omega^2 \left(b + \frac{1}{2\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$Q = \frac{\omega \Sigma W}{\Sigma D} \quad \mu_1 \varepsilon_1 \omega^2 = \beta_1^2 + K^2 = \beta_0^2 + K^2$$

$$= \frac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 (2b+s) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \left[\frac{\pi}{\beta_0} + U \{2l+2t\} \right]}{\frac{\delta}{a} \left[\frac{K^2 \left\{ 2b+s + \frac{\pi}{\beta_0} + U(2l+2t) + 2a\beta_0^2(1+U) \right\}}{(\beta_0^2 + K^2) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}} \right] + T}$$

ただし

$$T = \left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 (2b+s) \tan \delta_e + \left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right) \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right) \left(\frac{1}{\beta_0^2 + K^2}\right) \left[\beta_2^2 \left(2b - \frac{\sin 2\beta_2 b}{\beta_2} \right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 \left(2b + \frac{\sin 2\beta_2 b}{\beta_2} \right) \right] \tan \delta_\mu$$

$$U = \cos^2 \beta_2 b + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \frac{\mu_0}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \beta_2 b$$

次に $\tan \delta_e = 0$, $\tan \delta_\mu = 0$ としたときの Q を Q_m とすれば

$$Q_m = \frac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 (2b+s) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \left[\frac{\pi}{\beta_0} + U(2l-2t) \right]}{\frac{\delta}{a} \left[\frac{K^2 \left\{ 2b+s + \frac{\pi}{\beta_0} + U(2l-2t) \right\} + 2a\beta_0^2(1+U)}{(\beta_0^2 + K^2) \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0}} \right]}$$

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_m} = \frac{\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 (2b+s) \tan \delta_e + R \tan \delta_\mu}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 (2b+s) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \left\{ \frac{\pi}{\beta_0} + U(2l-2t) \right\}} \quad \text{を得。}$$

ただし

$$R = \frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{\beta_0^2 + K^2}\right) \left\{ \beta_2^2 \left(2b - \frac{1}{\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 \left(2b + \frac{1}{\beta_2} \sin 2\beta_2 b \right) \right\}$$

(e) 実測例 (I)

標準試料として、市販のテフロンを用いた。厚さ 9.00mm, 直径 48.3mm のものを直径 48.4mm の円筒空洞に挿入した。

共振周波数 9695MHz H_{013} mode

short の場合の共振の Q 値は 13381.2

open の場合の共振の Q 値は 16214.8

共振の shift は

short の $\Delta = 10.97\text{mm}$

open の $\Delta' = 6.28\text{mm}$

これらを測定式に代入して,

$$\mu' = 1.004 \quad \varepsilon' = 2.049 \text{ を得た。}$$

次に $\tan \delta_e$, $\tan \delta_\mu$ について,

$$\begin{aligned} a &= 24.2 \times 10^{-3} \text{m}, & b &= 9.20 \times 10^{-3} \text{m} \\ \lambda_0 &= 30.897 \times 10^{-3} \text{m} & \lambda_g &= 49.268 \times 10^{-3} \text{m} \\ K &= \frac{2\pi}{\lambda_s} = 0.1675 \times 10^3 \text{m}^{-1}, & \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2 &= 0.6053 \\ \beta_0 &= 0.1275 \times 10^3 \text{m}^{-1} & \beta_2 &= 0.2452 \times 10^3 \text{m}^{-1} \\ \delta &= 3.6879 \sqrt{\lambda_0} \cdot F \times 10^{-6} & \text{MKS} &= 1.067 \times 10^{-6} \text{MKS} \end{aligned}$$

F は無負荷の Q_0 の測定と “マイクロウエーブ”

霜田 p105 を参照して $F = 1.646$ とした。

short の場合

$$\begin{aligned} l - b &= l = 53.768 \times 10^{-3} \text{m} \\ P &= 0.48233, \quad q = 7.1496 \text{ 等より} \\ Q_m &= 2.25607 \times 10^4 \text{ を得,} \end{aligned}$$

測定の $Q = 13578.8$

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_m} = 0.2932 \times 10^{-4} = 0.1227 \tan \delta_e + 0.28873 \tan \delta_\mu$$

Open の場合

$$\begin{aligned} l &= 46.147 \times 10^{-3} \text{m} & U &= 2.6170 \\ 2t &= 0.2094 \times 10^3 \text{m} \\ Q_m &= 2.63612 \times 10^4 & \text{測定値 } Q &= 1.62148 \times 10^4 \\ \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_m} &= 0.23738 \times 10^{-4} = 0.1000 \tan \delta_e + 0.27568 \tan \delta_\mu \end{aligned}$$

依って $\tan \delta_e = 2.48 \times 10^{-4}$, $\tan \delta_\mu = -0.04 \times 10^{-4}$

(結果) 9695MHz H_{013} mode

測定に用いたテフロン試料の open, short の組合せによる $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}$, $\frac{\mu'}{\mu_0}$, $\tan \delta_e$, $\tan \delta_\mu$ は

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} = 2.05, \quad \frac{\mu'}{\mu_0} = 1.00$$

$$\tan \delta_e = 2.5 \times 10^{-4}, \quad \tan \delta_\mu = -0.04 \times 10^{-4} \text{ (室温 } 30^\circ \text{C)}$$

実測例 (II) 測定試料 YIG-3 (Yttrium Iron Garnet) フェライト

周波数 9695MHz H_{013} mode

short の共振の $Q = 7994.8$, shiet $l = 0.8606\text{mm}$

open の共振の $Q = 13934.0$ $l' = 10.243\text{mm}$

厚さ $b = 1.447\text{mm}$, $\lambda_g = 49.239 \times 10^{-3}\text{m}$, $\lambda_0 = 30.912 \times 10^{-3}\text{m}$

$\epsilon' = 15.9604$, $\mu' = 0.9222$ を得,

次に $\tan \delta_e$, $\tan \delta_\mu$ について,

$$a = 24.2 \times 10^{-3}\text{m} \quad K = \frac{2\pi}{\lambda_c} = 0.1583 \times 10^{-3}\text{m}^{-1}$$

$$\delta = 1.065 \times 10^{-6} \text{ MKS}$$

$$\beta_2 = 0.7589 \times 10^3\text{m}^{-1}, \quad \beta_0 = 0.1276 \times 10^3\text{m}^{-1}$$

Short の場合

$$l = l_r - b = 71.695 \times 10^{-3}\text{m}$$

$$P = 0.09403, \quad S = 1.068 \times 10^{-3}$$

$$q = -4.1169 \times 10^{-3}$$

$$Q_m = 1.97976 \times 10^4 \quad \text{測定値 } Q = 0.79948 \times 10^4$$

依って

$$55.154 \times 10^{-4} = \tan \delta_e + 2.0895 \tan \delta_\mu$$

Open の場合

$$l = 50.002 \times 10^{-3}\text{m}$$

$$\sin 2\beta_0 l = \sin 2\beta_0 (b + l') = 0.15757, \quad t = 0.6024 \times 10^3\text{m}$$

$$S = \frac{\sin 2\beta_2 b}{\beta_2} = 1.0682 \times 10^{-3}\text{m}$$

$$Q_m = 2.87185 \times 10^4 \quad \text{測定値 } Q = 1,3934 \times 10^4$$

依って

$$22.9193 \times 10^{-4} = \tan \delta_e + 0.4121 \tan \delta_\mu$$

short, open を連立に解いて

$$\tan \delta_e = 1.499 \times 10^{-3}, \quad \tan \delta_\mu = 1.922 \times 10^{-3}$$

(結果)

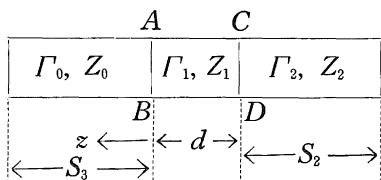
9695 MHz H_{013} mode

試料 YIG-3 フェライト (TDK 製)

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon_0} = 15.96 \quad \tan \delta_e = 1.5 \times 10^{-3}$$

$$\frac{\mu'}{\mu_0} = 0.922 \quad \tan \delta_\mu = 1.9 \times 10^{-3} \quad (\text{室温 } 30^\circ\text{C})$$

(2) 吸収の比較的大きい場合

impedance Z , 伝播定数を Γ とすれば,

$$Z = Z_0 \left[\frac{Z_{AB} + Z_0 \tanh \Gamma_0 z}{Z_0 + Z_{AB} \tanh \Gamma_0 z} \right]$$

$$Z_{AB} = Z_1 \left[\frac{Z_{CD} + Z_1 \tanh \Gamma_1 d}{Z_1 + Z_{CD} \tanh \Gamma_1 d} \right] \quad \dots\dots\dots (1)$$

 S_2 領域が空気層なら

$$Z_{CD} = jZ_0 \tan \beta_0 S_2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$Z'_{AB} = Z_0 \tanh \Gamma_1 S_3 \doteq jZ_0 \tan \beta_0 S_3$$

$$\text{共振条件 } [Z_{AB}]_{\text{ing}} + [Z'_{AB}]_{\text{ing}} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

(a) $S_2 = 0$ の場合

$$Z_{AB} = Z_0 \left[\frac{\tanh \Gamma_1 d}{\frac{Z_0}{Z_1}} \right] \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\frac{\tanh \Gamma_1 d}{\frac{Z_0}{Z_1}} = x + jy, \quad \frac{\tanh 2\Gamma_1 d}{\frac{Z_0}{Z_1}} = x' + jy' \quad \dots\dots\dots (5)$$

(3)より $\tan \beta_0 S_3 + y = 0$, 共振の shift を Δ とすれば

$$\tan \beta_0 (d + \Delta) = y, \quad \text{同様に} \quad \tan \beta_0 (2d + \Delta') = y' \quad \dots\dots\dots (6)$$

軸長変化法を用い共振曲線を求めた場合, 半値幅 $2\Delta S_3$ の条件として

$$\Delta Z'_{AB} = jZ_0 \sec^2 \beta_0 S_3 \cdot \beta_0 \Delta S_3 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$|Z'_{AB}| = [Z_{AB}]_{\text{real}} \quad \text{依って}$$

$$x = \frac{2\pi}{\lambda_g} \left[\frac{\text{負荷半値幅} - \text{無負半値幅}}{2} \right] \sec^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_g} \cdot S_3 \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

 x' についても同様の式を得

$$\tanh 2\Gamma_1 d = \frac{2 \tanh \Gamma_1 d}{1 + \tanh^2 \Gamma_1 d} \quad \text{の関係を用いて}$$

$$\tanh \Gamma_1 d = \left[2 \left(\frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} \right) + 2j \left(\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2} \right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} = A + jB \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 d &= \frac{1}{2} \log_e \left[\frac{1 + A + jB}{1 - A - jB} \right] = \frac{1}{2} \log_e (u + jv) \\ &= \frac{1}{2} [\log_e r + j(\varphi + 2n\pi)] \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ただし

$$r = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \tan \varphi = \frac{v}{u}$$

(4), (9)式より $\frac{Z_0}{Z_1}$ が決まる。依って

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2 - \epsilon' \mu' (1 - j \tan \delta_e) (1 - j \tan \delta_\mu)} \\ \frac{Z_0}{Z_1} &= \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0 \mu (1 - j \tan \delta_\mu)} \quad \text{に代入すれば} \end{aligned}$$

$\mu', \tan \delta_\mu$ が決まり従って $\epsilon', \tan \delta_e$ が決まる。ただし $\mu = \frac{\mu'}{\mu_0} - j \frac{\mu''}{\mu_0}$
この方法は $\tan \delta_\mu$ が小さく、 $\tan \delta_e$ が大きい試料に適している。

実測例〔I〕

矩形型空洞共振器を用いて、市販のセチルアルコールを測定試料として求めた。

厚さ 2mm, 4mm の組合せで行った。

半値幅 ΔS_3 の測定法の一つとして

$$\begin{aligned} H_{013} \text{ mode 一般に} \quad \lambda_0 &= \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 + \left(\frac{s}{c} \right)^2}} \\ \lambda &= \frac{\lambda_g}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_c} \right)^2}} \quad \text{より} \quad \Delta \lambda = \left[\frac{\Delta \lambda_g}{1 + \left(\frac{\lambda_g}{\lambda_c} \right)^2} \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} s \lambda_g = c \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_g} \right)^3 \frac{\Delta c}{\frac{1}{2} s \lambda}, \quad \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta \omega}{\omega}$$

依って

$$\frac{1}{Q} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g} \right)^3 \frac{\Delta S_3}{\frac{1}{2} s \lambda_0}$$

$H_{013} \text{ mode } 9750 \text{ MHz}$

$$x = 0.00813, \quad y = 0.350, \quad x' = 0.1251, \quad y' = 1.162$$

$$\tanh \Gamma_1 d = 0.0394 + j0.6383$$

$$\Gamma_1 d = 0.02796 + j0.05685, \quad \frac{Z_0}{Z_1} = 1.8253 - j0.07017$$

$$\text{(結果)} \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} = 2.324, \quad \tan \delta_\varepsilon = 0.0783$$

$$\frac{\mu'}{\mu_0} = 1.02 \quad \tan \delta_\mu = 0.0015$$

実測例〔Ⅱ〕 測定試料 $Ni-Cd$ フェライト

9760MHz H_{013} mode 矩形型空洞共振器

試料の厚さ 0.514mm と 0.253mm の組合せ

$$x = 0.0172, \quad y = 0.0135$$

$$x' = 0.0352 \quad y' = 0.0261$$

$$\tanh \Gamma_1 d = 0.1108 + j0.1289, \quad \Gamma_1 d = 0.1094 + j0.1327$$

$$\frac{Z_0}{Z} = 7.624 + j0.3464$$

$$\text{(結果)} \quad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} = 15.6, \quad \frac{\varepsilon''}{\varepsilon_0} = 10.8$$

$$\frac{\mu'}{\mu_0} = 0.455, \quad \frac{\mu''}{\mu_0} = 0.402$$

これは定在波法⁽⁵⁾で得た値に近い。

(b) $S_2 = 0$ の場合と $S_2 = \frac{1}{4}\lambda_g$ 或は等価 open の場合との組合せによる方法及びこれらと S_2 を任意にとった場合との組合せによる方法。

(1) 式で $\tanh \Gamma_2 S_2 = \infty$ であれば

$$Z_{AB} = Z_0 \left[\frac{1}{\frac{Z_0}{Z_1} \tanh \Gamma_1 d} \right] \quad \text{依って}$$

$$\frac{1}{\frac{Z_0}{Z_1} \tanh \Gamma_1 d} = x' + jy' \quad \text{とおけば}$$

(a) の場合と同様にして、共振点の shift で y' が決まり、共振曲線の半値幅から x' が決まる。

依って $S_2 = 0$ の場合の

$$\frac{\tanh \Gamma_1 d}{\frac{Z_0}{Z_1}} = x + jy \quad \text{とから} \quad \tanh \Gamma_1 d \quad \text{及び} \quad \frac{Z_0}{Z_1} \quad \text{が決まる。}$$

依って(a)と同様の計算から $\frac{\epsilon'}{\epsilon_0}$, $\tan \delta_\epsilon$, $\frac{\mu'}{\mu_0}$, $\tan \delta_\mu$ が求められる。

この実測例として、円筒空洞共振器の場合について行った。

吸収のすくない誘電体としてテフロンを用いその厚さ $S_2 = 6.79\text{mm}$ を用いた。直径 48.3 mm のものを円筒空洞の一端に入れ、その上に YIG-3 フェライト板を置いた。即ちテフロンフェライト二層として、Short の場合の測定を行った。これはテフロンがない場合の $\frac{1}{4}\lambda_g$ の空気層のあるとき、即ち Open の場合と等価

9712 MHz H_{013} mode 共振点の Shift

$$d' = 10.175\text{mm} \quad \tan \frac{2\pi}{\lambda_g} (d + d') = 12.514$$

一方 YIG-3 フェラト板の

みでの Short の場合 ($S_2 = 0$) での

$$\tan \frac{2\pi}{\lambda_g} (d + \Delta) = 0.3172$$

$$\tan \frac{2\pi}{\lambda_g} (d + \Delta) \tan \frac{2\pi}{\lambda_g} (d + d') = (\tan \beta d)^2 \text{ より}$$

$$\frac{\mu'}{\mu_0} = 0.948 \quad \frac{\epsilon'}{\epsilon_0} = 15.50$$

これは Open でテフロンを用いないで $\frac{1}{4}\lambda_g$ の空気層としたときの測定値と大体一致である。

以上のことから吸収のすくない既知誘電率の誘電体を円筒空洞或は矩形型空洞の一端につめて、 $\frac{1}{4}\lambda_g$ の空気層と等価にすることが可能であることを確めた。

然しこれは Open の場合としたが任意の場合としてもよい筈である。即ち

(1)式は S_2 領域が空気層でない場合のとき

$$\begin{aligned} Z_{AB} &= Z_1 \left[\frac{Z_{CD} + Z_1 \tanh \Gamma_1 d}{Z_1 + Z_{CD} \tanh \Gamma_1 d} \right] \\ &= Z_0 \left[\frac{\frac{Z_2}{Z_0} \tanh \Gamma_2 S_2 + \frac{\tanh \Gamma_1 d}{Z_1}}{1 + \frac{Z_2}{Z_0} \tanh \Gamma_2 S_2 \cdot \frac{Z_0}{Z_1} \tanh \Gamma_1 d} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{Z_2}{Z_0} \tanh \Gamma_2 S_2 \text{ は既知量}$$

従って

$$\frac{\frac{Z_2}{Z_0} \tanh \Gamma_2 S_2 + \frac{\tanh \Gamma_1 d}{\frac{Z_0}{Z_1}}}{1 + \frac{Z_2}{Z_0} \frac{Z_0}{Z_1} \tanh \Gamma_2 S_2 \tanh \Gamma_1 d} = x' + jy' \text{ において}$$

x' y' を共振点の shift と半値巾の測定から求めればよい。

$$\frac{\tanh \Gamma_1 d}{\frac{Z_0}{Z_1}} = x + iy \text{ は short の場合で決まる。}$$

従って $\frac{Z_0}{Z_1} \tanh \Gamma_1 d$ が決まる。逆に $\frac{Z_0}{Z_1} \tanh \Gamma_1 d$ を上述の等価 open の場合で決めておけば、上式の x' , y' を決めることによって

$$\frac{\tanh \Gamma_1 d}{\frac{Z_0}{Z_1}} \text{ が決定される。}$$

$\tan \delta_e$ の大きい試料は open をさけ、 $\tan \delta_\mu$ の大きい場合は short をさけて、組合せを行えばよいと考える。

III 結 語

吸収のすくない場合の測定式では、標準試料をテフロンにして、測定結果 $\frac{\mu'}{\mu_0} = 1.00$

$$\tan \delta_\mu = -0.04 \times 10^{-4} \text{ この試料は誘電体、従って } \frac{\mu}{\mu_0} = 1, \tan \delta_\mu = 0 \text{ でなければ}$$

ならない。その差は用いた装置の実験誤差の範囲内にあると考える。

次に吸収の大きい場合の測定式では標準試料としてセチルアルコールを用いた。

$$\text{測定結果は } \frac{\mu'}{\mu_0} = 1.02 \quad \tan \delta_\mu = 0.0015$$

これも誘電体で $\frac{\mu'}{\mu_0} = 1 \quad \tan \delta_\mu = 0$ となるべきものである。その差もやはり実験誤差の範囲と考えるとよいのではなからうか。解決しなければならぬ問題として測定限界の問題がある。

謝 辞

都立大小笠原直幸教授には特に吸収のすくない電磁気材料定数測定法については先生のご指導によるもので、YIG-3 試料その他多大のご助力を頂いた。深謝致します。

参 考 文 献

- (1) W. Jackson : Jour. I. E. E., Vol. 93, part III, No. 21, Jan 1946.
- (2) 斉藤・星合 : 電通研究所成果報告 第70号 1951.
- (3) 小笠原 : 電学誌, 75, 807, 昭31-12
- (4) 岡村・藤村・伊達 : 東北大科計測研究所報告 Vol. 2, No. 2, 1952.
- (5) 竹本 : 島大論集 (自然科学) 第8号, 昭33-2.