

**Optimality conditions for nonlinear and nonconvex
programming problems**

(Abstract)

Yusuke Saeki

Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering
Shimane University

March, 2015

第1章 はじめに

数理計画法の研究において、多くの数学者が数理計画問題に対する最適性条件を考察してきた。Karush-Kuhn-Tucker 条件は最もよく知られている最適性条件である。制約に課された特定の条件の下で、Karush-Kuhn-Tucker 条件は微分可能計画問題に対する最適性の必要条件となる。そのような制約に課された特定の条件は制約想定と呼ばれている。微分可能計画問題における最適性条件に対する制約想定として、1 次独立制約想定、Cottle 制約想定、Abadie 制約想定および Guignard 制約想定が提案されている。また凸計画問題における最適性条件に対する制約想定として、Slater 条件、Farkas-Minkowski および basic constraint qualification が提案されている。それらの制約想定の中には、微分可能計画問題における最適性の必要条件に対する必要かつ十分な制約想定があり、また凸計画問題における強双対性および大域的な最適性条件に対する必要かつ十分な制約想定がそれぞれある。

本論文では、非線形および非凸計画問題に対する最適性条件とその条件のための制約想定について考察する。本論文の目的は、この論文で扱う数理計画問題における最適性条件に対する必要かつ十分な制約想定について議論することである。

第2章 数理計画問題と制約想定

本論文では、主に4つの最適性条件に対する制約想定について考察している。1 つ目は、実局所凸ハウスドルフ線形位相空間 X において、次のような凸不等式制約付き DC 計画問題における局所的な最適性条件に対する制約想定について考察している。

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x) - g(x), \\ & \text{条件} && h_i(x) \leq 0, \quad i \in I. \end{aligned} \tag{1}$$

ただし、 I は添え字集合、 $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は下半連続な真凸関数、 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ は下半連続な凸関数、 $h_i: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($i \in I$) は下半連続な真凸関数である。その問題における局所的な最適性条件に対して、basic constraint qualification と呼ばれる次のような制約想定を扱う。

$$N_S(\bar{x}) = \text{cone co} \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial h_i(\bar{x}).$$

ただし、 $\bar{x} \in S = \{x \in X \mid h_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ である。また、上の結果を次のような分数計画問題に応用している。

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x)/g(x), \\ & \text{条件} && h_i(x) \leq 0, \quad i \in I. \end{aligned} \tag{2}$$

ただし、 I は添え字集合、 $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は下半連続な真凸関数、 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ は下半連続な凸関数、 $h_i: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($i \in I$) は下半連続な真凸関数であり、また $\{x \in X \mid h_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ 上での f の値は非負、 g の値は正である。さ

らに, 滑らかな実 Banach 空間 X において, 次のような弱凸計画問題に応用している.

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x) - \frac{\rho}{2}\|x\|^2, \\ & \text{条件} && h_i(x) \leq 0, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (3)$$

ただし, I は添え字集合, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は下半連続な真凸関数, $h_i: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($i \in I$) は下半連続な真凸関数, $\rho \geq 0$ である.

2つ目は, ユークリッド空間 \mathbb{R}^n において, 次のような逆凸制約付き DC 計画問題における大域的最適性の十分条件に対する制約想定を考える.

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x) - g(x), \\ & \text{条件} && h_i(x) \geq 0, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (4)$$

ただし, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数, $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は擬凸関数である. その問題における大域的最適性の十分条件に対する制約想定として, 次のような条件を扱う.

$$S \subset \bar{x} + T_S(\bar{x}). \quad (5)$$

ただし, $\bar{x} \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \geq 0, \forall i \in I\}$ である. また, 上の結果を次のような DC 計画問題に応用している.

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x) - g(x), \\ & \text{条件} && f_i(x) - g_i(x) \leq 0, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (6)$$

ただし, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は多面凸関数, $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数である. さらに, 次のような分数計画問題に応用している.

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x)/g(x), \\ & \text{条件} && f_i(x)/g_i(x) \leq c_i, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (7)$$

ただし, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は多面凸関数, $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は $g_i > 0$ を満たす微分可能な凸関数, $c_i \geq 0$ ($i \in I$) であり, また制約集合上での g の値は正である.

3つ目は, 実局所凸ハウスドルフ線形位相空間 X において, 再び次のような凸不等式制約付き DC 計画問題における ε 最適性条件に対する制約想定について考察している.

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x) - g(x), \\ & \text{条件} && h_i(x) \leq 0, \quad i \in I. \end{aligned}$$

ただし, I は添え字集合, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は下半連続な真凸関数, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ は下半連続な凸関数, $h_i: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($i \in I$) は下半連続な真凸関数である. その問題における ε 最適性条件に対して, Farkas-Minkowski と呼ばれる次のような制約想定を扱う.

$$\text{cone co } \bigcup_{i \in I} \text{epi } h_i^* + \{0\} \times [0, +\infty) \text{ が汎弱閉.}$$

また，上の結果を次のような分数計画問題に応用している．

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x)/g(x), \\ & \text{条件} && h_i(x) \leq 0, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (8)$$

ただし， I は添え字集合， $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は下半連続な真凸関数， $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ は下半連続な凸関数， $h_i: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($i \in I$) は下半連続な真凸関数であり，また $\{x \in X \mid h_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ 上での g の値は正である．

4つ目は，ユークリッド空間 \mathbb{R}^n において，次のような不等式制約問題型の微分可能計画問題における最適性の十分条件のための制約想定について考察している．

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x), \\ & \text{条件} && g_i(x) \leq 0, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (9)$$

ただし， $I = \{1, 2, \dots, m\}$ ， f は \mathbb{R}^n から \mathbb{R} への関数， g_i ($i \in I$) は \mathbb{R}^n から \mathbb{R} への関数である．その問題型の微分可能計画問題における最適性の十分条件のための制約想定として，次のような条件を扱う．

$$S \subset \bar{x} + C_S(\bar{x}). \quad (10)$$

ただし， $\bar{x} \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$ である．また，上の結果を次のような多目的計画問題型の微分可能計画問題に応用している．

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && F(x), \\ & \text{条件} && g_i(x) \leq 0, \quad i \in I. \end{aligned} \quad (11)$$

ただし， $I = \{1, 2, \dots, m\}$ ， F は \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^p への関数， g_i ($i \in I$) は \mathbb{R}^n から \mathbb{R} への関数である．

第3章 結論

本論文では，主に4つの結果を得ている．1つ目は，basic constraint qualification は凸不等式制約付き DC 計画問題 (1) における局所的な最適性条件に対する必要かつ十分な制約想定である．また，basic constraint qualification は分数計画問題 (2) および弱凸計画問題 (3) における局所的な最適性条件に対する必要かつ十分な制約想定である．

2つ目は，条件 (5) は逆凸制約付き DC 計画問題 (4) における大域的最適性の十分条件に対する必要かつ十分な制約想定である．また，条件 (5) は DC 計画問題 (6) および分数計画問題 (7) における大域的最適性の十分条件に対する必要かつ十分な制約想定である．

3つ目は，Farkas-Minkowski は凸不等式制約付き DC 計画問題における ε 最適性条件に対する必要かつ十分な制約想定である．また，Farkas-Minkowski は分数計画問題 (8) における ε 最適性条件に対する必要かつ十分な制約想定である．

4つ目は条件 (10) は目的関数がある点において擬凸関数である問題 (9) 型の微分可能計画問題における最適性の十分条件に対する必要かつ十分な制約想定であ

る．また，条件 (10) は目的関数の成分関数またはこれらの線形結合で表される関数がある凸性に関する条件をもつ問題 (11) 型の微分可能多目的計画問題におけるパレート最適性および弱パレート最適性に対する必要かつ十分な制約想定である．