

数学的な思考力・表現力を伸ばす授業づくりに関する研究

—低学年の学びを中心に—

三浦 洋子

Yoko MIURA

Development of Abilities to Think and Express in Mathematics

—For the First and the Second Grade Students—

【 要 旨 】

本研究は、「数学的な思考力・表現力」を、これまでも算数・数学科の主要な目標にあげられてきた「数学的な考え方」ととらえ、「数学的な考え方」を低学年の時から子どもが使えるように具体化し、指導の対象とした授業開発を目的とした。先行研究より「数学的な考え方」を明らかにし、低学年の教科書の問題解決時に子どもが使うであろう「数学的な考え方」の分析や、実際の低学年の算数科の授業の中で、子ども達が使った「数学的な考え方」を子ども達の発言やつぶやき等から分析を行った。その結果、低学年においても「数学的な考え方」が指導の対象になることが明らかになったとともに、問題解決学習のそれぞれの過程において子ども達が使う「数学的な考え方」が見えてきた。これらのことをもとに、「数学的な考え方」を低学年の子どもが使えるよう具体化したものと、「数学的な考え方」を指導の対象とした授業の展開例を示した。

【キーワード：数学的な思考力・表現力，数学的な考え方，低学年】

I テーマ設定の背景

1 新しい算数科のめざすもの

平成 17 年 4 月より中央教育審議会が教育課程の基準全体の見直しを行い、その間、教育基本法、学校教育法の一部改正もあり、それを受けて、平成 20 年 1 月中央教育審議会が答申を出した。そこに示された算数科、数学科の改善の基本方針を受けて行われた学習指導要領の算数科改訂(2008)の基本方針には、数学的な思考力・表現力の育成が大きな柱の一つとして掲げられ、重視された。そして、具体的な方針として「根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えること」「言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決すること」「自分の考

えをわかりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝えあったりすること」などについて指導の充実を図ることが記されている。

また、算数科の統括的目標には「表現する(能力を育てる)」の文言が加えられ、考える能力と表現する能力は補完し合う関係であることから、考える能力と表現する能力が並べて記された。さらに、数学的な思考力・表現力は、合理的、論理的に考えを進めるとともに、互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものであるとして、数学的な思考力・表現力を育成する算数的活動が各学年の内容で具体的に例示されたのも今回の改訂の大きな特徴の一つである。また、「スパイラル」という言葉が用いられ、指導内容を

なだらかに発展させたり、学び直しの機会を設けたりするなど、発達や学年の段階に応じた学習指導も求められている。

このように、数学的な思考力・表現力の育成は今日、算数科がねらう重点項目の1つとして重要視され、学校現場においても子どもたちの数学的な思考力・表現力を伸ばすための発達段階に応じた授業の改善が必要である。

2 私のこれまでの実践より

筆者自身もこれまで、数学的な思考力・表現力を育成するために試行錯誤しながら実践を重ねてきた。その結果、次の3点が見えてきた。

(1) 子ども達が自分の考えを図や式、言葉で表現することは、自分の思考の道筋を明らかにできることや相手に自分の考えを伝える時(表現する時)の手立てになること。また、聞いている側は図を見て相手の思考の道筋がわかったり、自分の考えを深めたりできること。そして、思考力と表現力は密接に関係し合っていること。

(2) 自分の考えを図や式、言葉に表す力、友達に説明するなどの力は低学年時から身に付けてスパイラルに伸ばしていくことが大切だということ。

(3) 子ども自身が自分で考え、考えたことをノート等に表現したり友達に発表したりすること、また、友達の考えを聞いたり、友達の考えを読み取ったりする授業は子どもが主体的となり、子どもの関心・意欲を高めたり、知識・技能の習得などにもつながったりするのではないかということ。

しかし同時に、筆者自身が数学的な思考力・表現力とはどのようなものかということが具体的に分かっていないということ、また、発達段階に応じた数学的な思考力・表現力の育成を図るためには、小学校6年間、中学校に向けてどのように指導を行えばよいのか、という課題も見えてきた。

II 研究の目的

今、それぞれの発達段階に応じた数学的な思考力・表現力の育成が求められている。しかし、教師自身が数学的な思考力・表現力を明確にとらえていなければ、数学的な思考力・表現力を指導の対象とすることは不可能である。そこで、この研究では「数学的な思考力・表現力」とは具体的にどのようなものであるのかを明らかにし、それぞれの発達段階における「数学的な思考力・表現力」の特徴を考察した上で「数学的な思考力・表現力」

を伸ばす授業のあり方を追求していくことを目指して、本稿ではまず低学年段階について研究することにした。

III 数学的な思考力・表現力とは

1 「思考」「表現」の一般的な意味とは

広辞苑によると、「思考」とは「思いめぐらすこと、考え」、「考え」とは「考えること、また、考えて得た内容」、そして「考える」とは「実情を調べたす」「思考をめぐらす。あれこれと思量し、ことを明らかにする。試案する」「学ぶ、学習すること」とある。「表現」とは「心的状態・過程または性格・志向・意味など総じて内面的・精神的・主体的なものを外面的・感性的形象として表すこと。また、この客観的・感性的形象そのものすなわち、表情・身ぶり・動作・言語・作品など」とある¹⁾。

2 心理学からみた思考力・表現力

多鹿(2010)によると心理学では「思考は概念、判断、推理の機能であり、思考力はそれらの機能を適切に活性化させること」「表現は内的な思考の過程を外化したもので、内的な思考の過程を言葉や絵など外的なものとして表すこと」といえるとしている。さらに、「表現の外化には、内的な思考過程を明確にするための表現と、明確にした内容を他者に伝える表現がある」といってよいと述べ、表現力も思考力を構成する要素の一部と考えてよいとしている²⁾。

3 学習指導要領解説(算数編)の教科の目標における数学的な思考力・表現力

「学習指導要領解説(算数編)」(2008)の教科の目標には「見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てる」という文言があり、続けてそれについて、「今回の改訂では、『考え、表現する能力を育てる』というように、『表現する(能力)』の文言を加えて示している。考える能力と表現する能力とは互いに補完しあう関係にあるといえる。考えを表現する過程で、自分のよい点に気付いたり、誤りに気付いたりすることがあるし、自分の考えを表現することで、筋道を立てて考えを進めたり、よりよい考えを作ったりできるようになる。授業の中では、様々な考えを出し合い、お互いに学び合っていくことができるようになる。そうした考えから、目標において考える能力と表現する能力を並べて示すこととした。」と説明がある。また、帰納的な考え方、類推的な考え方、演繹的な考え

方といった考え方が筋道を立てた考えとして具体的に挙げられている。そして「具体物を用いたり、言葉、数、式、図、表、グラフなどを用いたりして、自分の考えたことを表現したり、友達に説明したりする」という数学的に表現する学習活動を取り入れることが重要であると記してある³⁾。

4 先行研究における「数学的な思考力・表現力」のとらえ

(1) 向山(2009)のとらえ

向山は中教審答申の「数学的な思考力・表現力は、合理的、論理的に考えを進めるとともに、互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである。」の部分で数学的な考え方と重なるとする一方、「数学的な考え方は『自主的な態度』が前提であり、数学的な思考力・表現力とはこのことは重ならない」としながらも、「ただ、数学的な考え方には『簡潔・明確に表そうとする』、『よりよいものを求めようとする』などの数学的な態度も含まれる。これは数学的な思考力・表現力にもつながることである。」と述べ、次のような図をイメージし、数学的な思考力・表現力を数学的な考え方に基づけてとらえることが大切だと述べている⁴⁾。

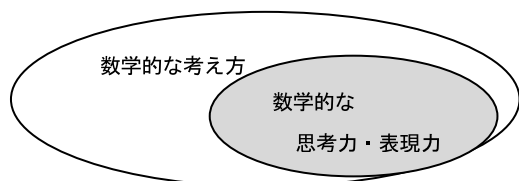


図1 向山の「数学的な思考力・表現力」のとらえ

(2) 富竹(2010)のとらえ

富竹は「数学的な思考力・判断力は数学的な考え方であり、数学的な表現力は数学的な考え方の一部と相手への思いから成っている。」と述べ数学的な思考力・表現力を次のようにとらえている⁵⁾。

①数学的な思考力

「思考力というのは非常に広い、一般的な概念であるから、それを伸ばす具体的な指導を見つけにくい。この思考力には知識や技能を適切に使うことも含まれていようが、数学的な考え方を適切に使う力が、その主要な部分である」(片桐 2009)と述べられるように、数学的な思考とは、これまでも算数・数学の主要な目標とされてきた、数学的な考え方である。」

②数学的な表現力

「数学的な表現力とは、具体物(半具体物を含む)

や記号(数式、表、用語、図、グラフなど)で表現する力、すなわち、抽象化(具体化)、記号化、数量化、図形化という数学的な考え方当たる。記号などで表そうとし、記号などをよもうとし、使おうとすることであり、それは、みんなで考え合って、よりよいものを求めようとして行われる。「だれに対して表現するのかのだれが変われば、表現も変わる。だれにがキーワードになっている。」富竹のとらえを図に表すと次のようになると思われる。

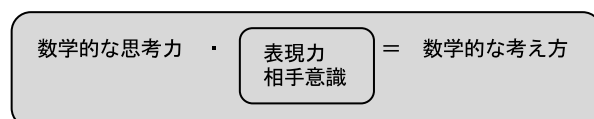


図2 富竹の「数学的な思考力・表現力」のとらえ

5 この研究における「数学的な思考力・表現力」のとらえ

以上のことをふまえ、研究にあたり「数学的な思考力・表現力」を次のようにとらえた。

「数学的な思考力」とは、数学的に思考する力であり、数学的な思考とは算数・数学的問題を自主的に創造し、解決、発展する時に役立つ考え方である。また、「数学的な表現力」とは、数学的に表現する力であり、数学的な表現とは自分の考え方や解き方を図や式、言葉や数、表、グラフ、記号等を用いて表したり、相手に伝えたりすること、および相手の表現したものを読み取ることである。

そして、「数学的な思考力」と「数学的な表現力」は相互に補い合うものであり、「数学的な思考力・表現力」はこれまでも算数科・数学科の目標にもあげられ、指導要録の観点別評価でも今なお観点としてあげられている「数学的な考え方」の部分集合であるにとらえた。

片桐(2004)は「数学的な考え方」には数学的な考え方を支え、発動させる力、数学的な考え方の driving forces として「数学的な態度」も含まれると述べている。そして、「数学的な態度」として①自ら進んで自己の問題や目的・内容を明確に把握しようとする、②筋道の立った行動をしようとする、③内容を簡潔明確に表現しようとする、④よりよいものを求めようとするという4つを挙げている⁶⁾。数学的に思考する時、数学的に表現する時には、片桐が挙げた数学的な態度が確かに必要であると考え、この研究においても「数学的な考え方」は「数学的な思考力・表現力」と「数学的な態

度」から成り立っているととらえることとする。

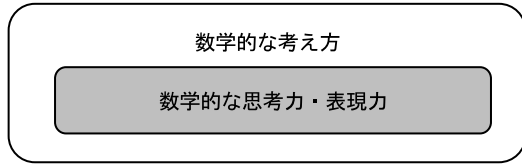


図3 この研究における「数学的な思考力・表現力」のとらえ

IV 「数学的な考え方」の具体化

上記のように本研究では「数学的な思考力・表現力」を「数学的な考え方」の部分集合であると捉えた。そこで、「数学的な考え方」とは具体的にどのようなものなのかを明らかにしていくこととする。

1 「数学的な考え方」についての先行研究

長崎・滝井(2007)は、日本の多くの数学者、算数・数学教育者が創り上げた数学的な考え方は「算数・数学を発展させる考え方として、その内包を精緻にするとともに、その外延を拡張し具体化を図ってきた」とし、日本の戦後の算数・数学教育における数学的な考え方を再考した。また、変遷の概略をその誕生期・発展期・成熟期・精緻化期に分けて以下のような表にまとめている⁷⁾。

表1 日本の算数・数学教育における「数学的な考え方」の変遷

特徴	年	事項
誕生期	1955年	・昭和30年発行『高等学校学習指導要領数学科編』の目標に「数学的な考え方」。そしてその具体例「中心概念」が示される。
	1958年	・昭和33年告示「小学校学習指導要領 算数」の目標に「数学的な考え方」が現れる。
発展期	1966年	・東京教育大学付属小学校初等教育研究会『教育研究』における特集「数学的な考え方」 ・教育総合研究所『算数と数学』における特集『数学的な考え方』とは
	1968年	・米山国蔵の「数学的精神活動」 ・津宮俊雄の「発見的探究法」 ・川口延、中島健三らの「数学的な考え方」 ・秋月康夫の「数学的な考え方」
		1969年
成熟期	1977年	・島田茂の「数学的活動」
	1981年	・松原元一の「数学的見方考え方」 ・中島健三の「数学的な考え方」
精緻化期	1988年	・片桐重男の「数学的な考え方・態度」

長崎らが精緻化期に挙げた片桐(1988)は、「数学的な考え方」の具体化を図る上で、先行研究について考え方の特徴としてどのようなことをあげているかということに焦点をあて、①数学的な考え方についての一般的考察をしている先行研究②数学的な考え方の若干の内容を示している先行研究③問題解決のストラテジーの先行研究④数学的な考え方を構造的にとらえようとしている先行研究の4つに分類して考察し⁸⁾、「方法に関係した数学的な考え方」「内容に関係した数学的な考え方」「数

学的な態度」の3種に対応させ具体的に示した。

表2 数学的な考え方一覧(片桐 2004)

I 数学的な態度
1 自ら進んで自己の問題や目的・内容を明確に把握しようとする
① 疑問をもとうとする
② 問題意識をもとうとする
③ 事象から数学的な問題を見つけようとする
2 筋道の立った行動をしようとする
① 目的にあった行動をしようとする
② 見通しを立てようとする
③ 使える資料や既習事項、仮定に基づいて考えようとする
3 内容を簡潔明確に表現しようとする
① 問題や結果を簡潔明確に記録したり、伝えたりしようとする
② よりよいものを求めようとする
③ 思考を対象的(具体的)思考から、操作的(抽象的)思考に高めようとする
④ 自他の思考を評価し、洗練しようとする
⑤ 思考労力を節約しようとする
II 数学の方法に関係した数学的な考え方
1 帰納的な考え方
2 類推的な考え方
3 演繹的な考え方
4 統合的な考え方(拡張的な考え方を含む)
5 発展的な考え方
6 抽象化の考え方(抽象化、具体化、条件の明確化の考え方)
7 単純化の考え方
8 一般化の考え方
9 特殊化の考え方
10 記号化の考え方
11 数量化、図形化の考え方
III 数学の内容に関係した数学的な考え方
1 考察の対象の集まりや、それに入らないものを明確にしたり、その集まりに入るか同化の条件を明確にする(集合の考え方)
2 構成要素(単位)の大きさや関係に着目する(単位の考え方)
3 表現の基本原則に基づいて考えようとする(表現の考え方)
4 ものや操作の意味を明らかにしたり、広げたり、それに基づいて考えようとする(操作の考え方)
5 操作の仕方を形式化しようとする(アルゴリズムの考え方)
6 何を決めれば何が決まるかということに着目したり、変数間の対応のルールを見付けたり、用いたりしようとする(関数の考え方)
7 基本法則や性質に着目する(基本的性質の考え方)
8 何を決めれば何が決まるかということに着目したり、変数間の対応のルールを見付けたり、用いたりしようとする(関数の考え方)
9 事柄や関係を式に表したり、式をよもうとする(式についての考え方)

富竹(2010)はさらに、数学的な考え方を子どもに分かる言葉で命名し具体化している⁹⁾。片桐が一覧にした数学的な考え方に照らし合わせて富竹が命名したものを表にすると次のようになる。

表3 命名による「数学的な考え方」の具体化(富竹 2010)

数学の方法に関係した数学的な考え方	富竹による命名	数学の内容に関係した数学的な考え方	富竹による命名
帰納的な考え方	決まりがの考え方	集合の考え方	範囲の考え方
類推的な考え方	同じようにの考え方	単位の考え方	単位の考え方
演繹的な考え方	わけはの考え方	概括的把握の考え方	およその考え方
統合的な考え方	まとめる考え方	関数の考え方	関係の考え方
発展的な考え方	よりよいの考え方 変えたらの考え方	式の考え方	式の考え方
抽象化の考え方 (具体化、理想化の考え方を含む)	共通はの考え方 たとえばの考え方 算数を使う考え方		
単純化の考え方	簡単の考え方		
一般化の考え方	いつでもの考え方		
特殊化の考え方	特別な場合の考え方		
記号化の考え方(数学的用語を用いる考え方を含む)	記号の考え方		
数量化、図形化の考え方	数の考え方 図の考え方		

2 これまでの「小学校学習指導要領」の算数科の目標における「数学的な考え方」の具体化

昭和22年、戦後初めて学習指導要領が出され、そして、昭和30年、高等学校の学習指導要領において初めて「数学的な考え方」が目標の中で示された。その後、小学校の学習指導要領において初めて「数学的な考え方」が目標の中で示されたのは昭和33年のことである。ここでは、先行研究を文献研究することにより明らかになった「数学的な考え方」をもとにしながら、これまで、どのような「数学的な考え方」が算数科の目標の中で取り上げられてきたのかを整理した。

表4 学習指導要領の算数科の目標に見られる数学的な考え方の具体化

改訂年	目標に見られる数学的な考え方	
昭和33年	3. 具体的な事柄や関係を用語や記号を用いて、簡潔・明確に表したり考えたりすることができるようにする。	記号化の考え方
	4. 数量的なことがらや関係について、適切な見通しを立てたり筋道を立てて考えたりする能力を伸ばし、…。	帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方
昭和43年	日常の事象を数理的にとらえ、筋道を立てて考え、統合的・発展的に考察し、処理する能力と態度を育てる。	帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方 統合的な考え方 発展的な考え方
	3. 数学的な用語や記号を用いることの意義について理解させ、それらを用いて、簡潔、明確に表したり考えたりすることができるようにする。	記号化の考え方 数学的な態度
	4. (略)適切な見通しをもち、筋道を立てて考えるとともに、目的に照して結果を検討し処理することができるようにする。	帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方
昭和52年	(略)日常の事象を数理的にとらえ、筋道を立てて処理する能力と態度を育てる。	帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方
平成元年	(略)日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに、(略)	帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方
平成10年	(略)日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに、(略)	帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方
平成20年	(略)日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考え、表現する能力を育てるとともに(略)	帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方 式の考え方 記号化の考え方 数量化の考え方 図形化の考え方

このように、これまでの学習指導要領の算数科の目標において、「数学的な考え方」は用語としてねらいにあげられ、算数科の授業において「数学的な考え方」の育成が求められていた。特に、筋道を立てた考え方である演繹、類推、帰納的な考え方は途切れることなく育成が求められてきた。

3 学習指導要領解説算数編(2008)に例示されている低学年の算数的活動がねらう「数学的な考え方」の具体化

平成20年改訂の学習指導要領の算数科の目標では、「算数的活動を通して」という文言が文頭にきた。また、外的活動よりも内的活動を重視した捉え方に変更された。この学習指導要領解説算数編に例示されている算数的活動によって、子ども達にどのような「数学的な考え方」を経験させられるのかを考察し、明らかになったものを示す。

(1) 第1学年

「A数と計算」数量化の考え方、図形化の考え方、記号化(式の考え)による演繹的な考え方、具体化の考え方、数量化の考え方、図形化の考え方、単位の考え

「B量と測定」単位の考え

「C図形」抽象化の考え方、単位の考え

「D数量関係」数量化の考え方、図形化の考え方、記号化(式の考え)の考え方、具体化の考え方

(2) 第2学年

「A数と計算」具体化の考え方、帰納的な考え方

「B量と測定」概括的把握の考え方、単位の考え

「C図形」単位の考え

「D数量関係」数量化の考え方、記号化(式の考え)考え方、図形化の考え方、帰納的な考え方、演繹的な考え方、類推的な考え方

4 指導要録の評価の観点における「数学的な考え方」の具体化

指導要録の昭和36年版から現在使われているものに至るまで、評価の観点の一つとして「数学的な考え方」があげられている。観点の趣旨から読み取れる数学的な考え方を具体化し表に示した。

表5 指導要録の観点の趣旨に見られる「数学的な考え方」

	学習の記録の欄	観点の趣旨	数学的な考え方
昭和23年 (昭和23年は学籍簿)	なし		
昭和30年	数量的な洞察 理論的な思考	数量や数量的関係を直感的には握したり、明確に見通しをつけたりする。	数学的な態度
昭和36年	数学的な考え方	位取りの原理などをよく理解し、それをもとにして計算の方法を考え出すなど、数学的な考え方がよくできる。数量関係の複雑な問題について、よく解決の方向を見通し、すじ道の通った判断ができ、手順のよい計算の方法などを見つけて出すことができる。	数学的な態度 帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方 関数の考え

昭和 46 年	数学的な考え方	位取りの原理、計算法則などをもとにして計算のしかたを見い出したり、 <u>関数的な考え方、統計的な考え方</u> などができる。また、 <u>適切な見通しをもち、筋道の通った判断や説明</u> ができる。	数学的な態度 帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方 関数の考え 統計的な考え方
昭和 55 年	数学的な考え方	知識や技能の習得を通して、 <u>数学的な考え方</u> の基礎を身に付け、 <u>論理的に思考</u> することができる。	帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方
平成 3 年	数学的な考え方	数量や図形についての基礎的な知識と技能の習得や活用を通して、 <u>数学的な考え方</u> の基礎を身に付け、 <u>見通しをもち筋道を立てて考える</u> 。	数学的な態度 帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方
平成 13 年	数学的な考え方	算数の活動を通して、 <u>数学的な考え方</u> の基礎を身に付け、 <u>見通しをもち筋道を立てて考える</u> 。	数学的な態度 帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方
平成 22 年	数学的な考え方	<u>日常の事象を数理的にとらえ、見通しをもち筋道を立てて考え表現したり、そのことから考えを深めたりする</u> など、 <u>数学的な考え方</u> の基礎を身に付けている。	数学的な態度 帰納的な考え方 演繹的な考え方 類推的な考え方

指導要録の観点においては、「見通しをもつ」という数学的な態度、「筋道を立てて考える」という演繹、類推、帰納的な考え方が「数学的な考え方」の趣旨に長い間あげられていることが分かる。

V 低学年算数科における「数学的な思考力・表現力」の育成

1 発達心理学における小学校低学年段階の思考の特徴

ピアジェの発達理論によると、小学校低学年は「操作的思考の段階」である。11歳ごろまではその操作的思考を実用的問題や具体的場面にしか応用できないとされている。そして、具体的操作の根底には「群性体」とよばれる構造があり、具体的操作を支えている。低学年には、具体的操作により論拠を示したり、きまりを見つけて操作をしたりすることができたり、変形が量の大きさに無関係だということを論理的に理解したりすること等ができることが分かる。つまり、低学年の算数科の授業においても、子ども達が演繹的な考え方や帰納的な考え方を発揮することが十分考えられる。また、具体的操作期後の形式的操作期ではより抽象的・言語的水準での思考操作ができるようにするためにも、低学年において演繹的な考え方や帰納的な考え方等の論理的思考を具体物や半具体物の操作、絵や図等を根拠としながら経験を重ねて

おくことが大切であると考えられる。

2 算数科がめざす低学年段階における「数学的な思考力・表現力」の育成

(1) 先行研究の見解

向山(2010)は低学年の算数学習の特徴として1年生、2年生それぞれについて学習内容の例を挙げ、その内容で指導できる考え方を記している¹⁰⁾。
 (【 】は筆者による)

<p>1年生の算数学習の特徴</p> <p>①算数学習以前の経験(基礎的な経験)が基になる学習において (例)長さ比べ 演繹的な考え方による思考・判断【演繹的な考え方】 演繹的な考え方によって具体物の操作と言葉による表現をすることの指導ができる。【演繹的な考え方】</p> <p>②具体物を用いた活動などを通して数・量・形についての感覚を豊かにする学習 (例)10の合成 10に対する歩数の直観による判断力を育てる。【判断力】 (例)具体物の個数を数える 類推的に考えることの指導ができる。【類推的な考え方】</p> <p>③基礎的な知識・技能を身につける学習 (例)繰り上がりのある加法 演繹的な考え方による思考・判断【演繹的な考え方】 言葉と具体物の操作による表現の指導ができる。【表現力】</p> <p>④素地的な学習 (例)量の学習 広さやかさでは、類推的な考え方によって直接比較をし、それに基づいて演繹的に考えて結論付けたり、説明したりする学習となるように指導する。【類推的な考え方】</p> <p>2年生の算数学習の特徴</p> <p>①1年生での既習事項を基に理解を深める学習 (例)数の数え方、表し方 類推的に考えるようにする指導【類推的な考え方】 (例)十進位取り記数法の仕組み 帰納的に考えて明らかにする指導ができる【帰納的な考え方】</p> <p>②1年生での素地的学習や既習事項を基に理解したり考えたりする (例)三角形、四角形の学習 図形を構成する要素に着目して図形を考察する指導をする。【単位の考え】</p> <p>③具体物を用いた活動などを通して数・量・形についての感覚を豊かにする。 (例)三角形、四角形の学習 いろいろ発見する指導ができる。</p>

向山はまた、このような指導は、子どもが既習の知識・技能を活用したり、基礎的な経験や素地的学習を生かしたりして問題解決をする問題解決学習における指導であると述べている。問題解決学習では、数学的な思考、判断、表現が行われるのであり、低学年においてもこのことが十分にできると述べている。

(2) 小学校低学年の教科書で経験させられるであろう「数学的な考え方」とは

小学校1,2年生の算数科の教科書の学習を通してどのような「数学的な考え方」を指導の対象とすることができるのか分析するために、啓林館の教科書を問題ごとに子ども達がどのような考えをもつか、そしてそれは「数学的な考え方」の何に当たるかを具体化し、領域ごとに頻度を調べそれ

ぞれの単元で経験させたい主な数学的な考え方を整理した。

①第1学年(グラフは「A数と計算」のみ示す)

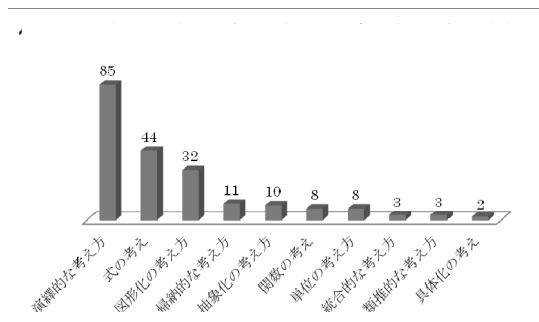


図4 教科書分析 1年生 (A数と計算)

「A数と計算」の領域では、図4のグラフからもわかるように、演繹的な考え方が頻度85と大部分をしめている。これは、数の大小の判断や計算の意味や計算の仕方を図や言葉、式を使って説明したり、わけを説明したりする学習活動が多く展開されるからである。続く、頻度44の式の考えは、1年生で初めて学習するたし算、ひき算の演算決定の場面で発揮される考え方である。この式の考えは、演繹的な考え方とセットで発揮されることが多い。また、大きな数になるにつれ、10のまとまりなどをつくって数える良さに気づき、単位の考え方を使うであろう。頻度は少ないが具体化の考えは身の回りのものから算数を見つける活動等を通して算数に親しむことができるよう1年生段階においても是非経験させておきたい考え方である。また、類推的な考え方も1年生では頻度が少ないが、学年が上がるにつれ、既習事項から類推することができるようになるため、おさえておきたい考え方である。

【以下は結果のみ示す】

「B量と測定」領域では、数量化の考え単位の考え、演繹的な考え方を経験させられる。

「C図形」領域では、単位の考え、数量化の考え方、記号化の考え方を経験させられる。

「D数量関係」では学習指導用解説算数編(2008)であげられている式による表現の内容の「加法及び減法の場面に式を表す」については、本稿では、「A数と計算」領域に入れており、その時使われる考え方も「A数と計算」領域に整理した。ここでは、「絵や図を用いた数量の表現」の内容である「絵(図)から何がわかるかな」と、数の増減をブロックに置き替えて考える「ふえたりへったり」の内容から図形化の考え、関数の考えが経

験させられると思われる。

②第2学年

第2学年においても領域ごとに頻度を調べたが、ここでは2年生全体の学習におけるグラフを示す。

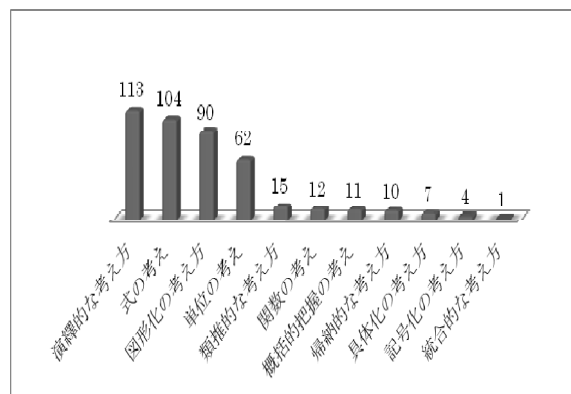


図5 教科書分析 2年生 (全領域)

2年生においては演繹的な考え方、式の考え、図形化の考え方の頻度が大きい。この3つの考え方は、主に数と計算領域において使われ、1つの問題を解くときに同時に使われることが多い。1年生からのその式になるわけや計算の仕方、その答えになるわけなどを図や数、式や言葉を使って説明する活動の経験が2年生においてもこれらの考え方をする時に役に立つと思われる。また、2年生では新たにかけ算が入り、式で表すこと、記号で表すことのよさを実感的に経験させたい。頻度が少ない考え方についても1年生と同じように、3年生以降の学習で生かされるようその学習において丁寧に抑えていく必要のある考え方である。

以上のような考察をもとに、1年生、2年生におけるそれぞれの単元で主に経験させたい数学的な考え方を整理したが、ここでは省略する。

(3) 実際の授業でみられた小学校低学年児童の「数学的な考え方」

低学年の授業において、子ども達がどのような場面でどんな数学的な考え方を使っているのかを分析するために、平成23年10月～11月上旬にかけて、23の授業を記録した。全ての授業が問題解決学習ではないため、ここでは①問題・課題把握場面②一人で考える場面③みんなで考える場面④まとめの場面において子ども達がどのような考え方をどのようにしているのかをみていく。

①問題・課題把握場面

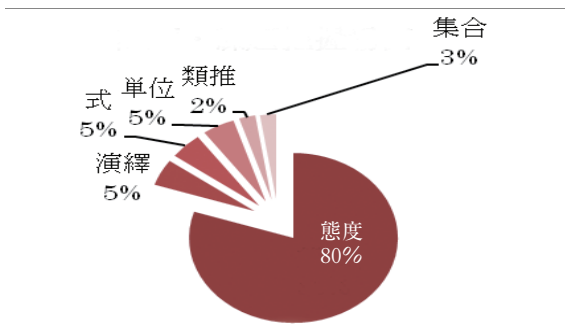


図6 問題・課題把握場面で見られた「数学的な考え方」

問題・課題把握場面で見られた数学的な考え方は数学的な態度が8割を占めている。この態度とは、片桐が一覧に示した数学的な態度の中の「自ら進んで自己の問題や目的・内容を明確に把握しようとする」と「筋道の立った行動をしようとする」の2つの態度である。今回の参観では、教師の発問によって問題把握の場面の時に「何が分かるのか」「求めるものは何か」ということを明確にする授業が多く見られた。問題・課題把握場面で見られるこのような数学的な態度は、片桐が言うようにその後の解決の実行の時に使われる「数学的な考え方」の原動力となっていると思われる。1年生段階では教師の発問によって問題を明確に把握したり、解決の見通しを持ったりする場面が多いと思われるが、その経験の積み重ねが、自主的に数学的な態度を発揮し、さらには数学的な考え方の原動力となるのではないかと思う。また、子どもが課題に対して問題意識が高まった時にこのような数学的な態度が発揮しやすいことから、そのような課題提示が必要なことも見えてきた。

②一人で考える場面

今回参観した授業では、一人で考える時に類推、帰納、演繹的な考え方である筋道を立てた考え方や図形化の考え方、記号化の考え方、具体化の考え方、単位の考え方、式の考えを使っている姿がみられた。一人で考える場面では領域や学習内容、課題の提示の仕方、子ども達が使う「数学的な考え方」が違って来るようであった。子どもにとっては一人で考える場面は解決の見通しが持てなければ不安な時間である。だからこそ、教師はこの学習で経験させたい「数学的な考え方」を明確にしておく必要があることを確信した。そして見通しが持てない子どもには、教師はその答えを教えるのではなく、発問の形で見通しを持たせたり、例えば「絵や図に表せないかな」、「似た問題を解いたこ

とはないかな」等の「数学的な考え方」を用いるような声掛けを用意したりしておく必要もある。

③みんなで考える場面

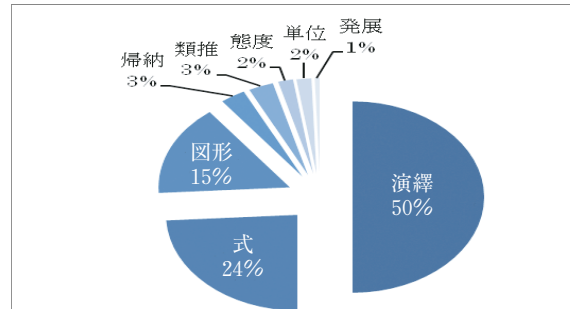


図7 みんなで考える場面で見られた「数学的な考え方」

みんなで考える場面では演繹的な考え方が全体の半分を占めている。これは、今回参観した授業では、その式になるわけやその答えになるわけ、計算の仕方等を説明する活動が多かったからである。みんなで考える場面では教師の発問や友達の質問から数学的な考え方を使うことが1、2年生段階では多く見られることが分かった。また、図形化の考え方を使うと説明が分かりやすい等、それぞれの考え方のよさに子どもたち自身が気づくことも必要であることも見えてきた。

④まとめの場面

子ども達による「数学的な考え方」はふりかえりの場面では見られなかったが、授業者が数学的な考え方を促したり数学的な考え方のよさを子ども達に伝えたりする場面が見られた。

VI 小学校低学年における授業開発

1 問題解決学習

低学年の実際の授業参観から、個人思考の場が確保でき、他者と自分との考えを比較検討することができるなど、数学的な考え方を子ども達が発揮するには問題解決学習による展開がふさわしいと考え、ここでは問題解決学習の過程に対応させた指導案を作成したいと考える。問題解決のそれぞれの過程において配慮すべきことをまとめた。

(1) 問題や課題をよむ場面

提示された問題や課題について何がわかり、何が分からないのか、求めることは何かを子ども達が見出し把握する場面である。できる限り子ども達自身が問題を解決する時に必要な情報に自分で気づき、見通しをもとめたり、分からないことがあれば自分から質問したりすることができるような課題提示を工夫したい。

(2) 一人で考える場面

課題を解決するためにこれまで体得した知識、技能を使ったり似た場面を思い出したり、図にかくなどして、自分なりに自分の考えを筋道立て、表現しながら解決を試みる場面である。この場面では、子どもが自発的に数学的な考え方を発揮する可能性が大きいので、一人で解決する時間を確保したい。このとき、解決が思うように進まない子どもには数学的な考え方を引き出す授業者の発問を準備しておく必要がある。

(3) みんなで考える場面

一人ひとりが考えたり表現したりしたことを発表し、それについてみんなで考える場面である。発表する子は相手にわかりやすい説明の仕方を工夫するなどよりよい数学的な表現力を目指したり、他者からの質問により数学的な考え方を発揮したりする。また、他者の発表を聞く時に、自分の考え方とどこが違うのか、どこが同じなのかを考える際、図をよんだり式をよんだりしながら、図形化の考え方や式の考え方を発揮しながらお互いの考えを共有する。ここでも、授業者はこの学習で経験させたい考え方が出ていない時や一般化したい時に必要な発問を準備しておく必要がある。

(4) まとめの場面

一人で考える場面、みんなで考える場面で考えたり表現したりする活動を通して、学級全体で明らかにした内容やその時に使われた考え方を振り返りまとめる場面である。このまとめる場面は、学年が上がるにつれ子ども達の言葉でまとめることができるようになるためにも、低学年段階では授業者が丁寧にその考え方や考え方のよさをおさえ、今後いつでも使えるようにしておく必要がある。

2 低学年段階に応じた「数学的な考え方」を引き出す発問及び命名

片桐が示した「数学的な考え方についての発問一覧」及び、富竹が示した「命名による数学的な考え方の具体化」を参考にし、ここまで述べてきた低学年の子に経験させられるであろう、または、低学年の子が発揮するであろう数学的な考え方を考慮しながら、数学的な考え方を子ども達にとっては「役に立った考え方の名前」と表し、教師の側からは「数学的な考え方」を引き出すための発問を一覧にした。(表6)

表6 低学年児童に応じた数学的な考え方及び発問

数学的な態度	役に立った考え方の名前	考え方の発問による表現
自ら進んで問題や目的・内容を明確に把握しようとする	わかることの考え もとめることの考え	問題を読んで分かることは何か 問題で求めることは何か
見通しを立てようとする	こうやったらできそうかの考え	どうやったらできそうかな
分かっていることや習ったことを基に考えようとする	あのやり方でできるかなの考え	似た問題をやったことはないかな
自分や友達のえ方のいいところをいそうとする	じぶんや○○さんのやり方のいいところの考え	この考え方のいいところはどこかな
速く、簡単に、正確に問題を解決しようとする	べんりなやり方の考え	もっとはやくて簡単なやり方はないかな
数学の方法に関係した考え方	役に立った考え方の名前	考え方の発問による表現
帰納的な考え方	きまりの考え	きまりやルールが見つからないかな
演繹的な考え方	わけの考え	わけを言えないかな
類推的な考え方	あのやりかたとおなじの考え	今まで似た問題を解いたことはないかな
統合的な考え方	まとめると…の考え	一つにまとめられないかな
抽象化の考え方	どれもいっしょなのはの考え	同じ事が見つけれられないかな
具体化の考え方	たとえば…の考え	例えば何があるかな
記号化の考え方	さんすうでつかうことばの考え	算数で使う言葉で言えないかな
	さんすうでつかうしりの考え	算数で使う記号で表せないかな
図形化の考え方	えやずであらわすと…の考え	絵や図で表せないかな
数量化の考え方	かずであらわすと…の考え	数にできないかな
一般化の考え方	いつでもできるの考え	いつでもできるようにできないかな
数学の内容に関係した考え方	役に立った考え方の名前	考え方の発問による表現
集合の考え	なにについての考え	何について考えているのかな どこまで考えているのかな
単位の考え	まとまりの考え	まとまりにできないかな
	かど、へん、ちよう点の考え	角や辺や頂点はどうなっているかな
概括的把握の考え	だいたいこれぐらいの考え	およそ、だいたいどれくらいかな
関数の考え	○と△のかんけいの考え	○と△のかんけいはどうなっているかな
式の考え	しきであらわすと…の考え	式にできないかな

また、授業提案としては第1学年の「3つの数の計算」、第2学年の「三角形と四角形」の単元から展開を作成した。展開では、この単元で経験させられるであろう「数学的な考え方」を指導の対象として位置付け、その考え方を引き出す教師の発問を示したり、その考えが出た時にはその考え方のよ

さを認めるようにしたりした。(表7)

表7 「数学的な考え方」を指導の対象とした展開例
(一部抜粋)

学習活動	予想される子どもの反応 【数学的な考え方】	指導上の留意点 【数学的な考え方 を促す発問】	評価規準 と評価方法
一人で考える	○式に表したり、その式になるわけを考える。 ○2 ひきおりのからひき算だ。 ○ブロック4個から2個取るからひき算だ。 【類推的な考え方】 【演繹的な考え方】 ○次は5ひきのから増えるからたし算だ。 ○ブロック2個と5個を合わせるからたし算になるよ。 【類推的な考え方】 【演繹的な考え方】	【どういう式になるかと考える時、今までどうやっていたかな。それと同じようにできないかな】 【ブロックではどんなうごきになりますか】 【絵に表せないかな】 【ブロックを動かしながらお話できるかな】 【ブロックの動きを式に表せないかな】	【考】 ブロックを操作したり絵にかいたりしながら減って増える場面を式に表し、その式になるわけを考えることができる。(観察・ノート)

VI 研究のまとめと今後の課題

「数学的な思考力・表現力」とは何かということ調べているうちに行き着いたところが「数学的な考え方」であった。「数学的な考え方」を先行研究より具体化し、実際の授業を分析すると、問題・課題把握場面では問題を明確に把握しよう、見通しを立てようといった数学的な態度が多く見られた。1年生段階では教師の発問によって促される場合が多いが、考え方とそのよさの経験の積み重ねが、学年が上がるにつれ自主的に数学的な態度を発揮されることにつながると思われる。また、課題の出し方によっては子ども自らが問題を明確に把握しようしたり、見通しを立てようとする態度が育まれるのではないかと考えた。一人で考える場面では領域や学習内容、課題の提示の仕方、また子どもの個人差によって子ども達が使う「数学的な考え方」が違ってくる。この学習で何を教えたいのか、どんな「数学的な考え方」を経験させたいのかを教師は明確にして授業に臨まなくてはならない。見通しが持てない子どもには、「数学的な考え方」を用いるような発問の形で見通しがもたせられるよう用意しておく必要がある。みんなで考える場面では、教師の発問や友達の質問から「数学的な考え方」を使う姿が見られた。ここでは、他者の考えや表現、経験したことがない「数学的な考え方」とであえる場面であり、それぞれの考え方のよさに子どもたち自身が気づくこともできる場面でもある。授業のまとめの場面では、授業者が出てきた「数学的な考え方」を振

り返らせたり、これから使うことを促したり、よさを伝えることが子ども達の「数学的な考え方」を伸ばすことにつながるのではないと思われる。

また、教科書分析によってその学習で経験させられる「数学的な考え方」が明らかとなり、指導の対象として位置付けることができるようになった。具体化されたものをもとに「数学的な考え方」を指導の対象とした指導案を作成すると、経験させたい考え方を経験させられるような課題を考えればよいこと、困っている子に対しては「数学的な考え方」を促す発問を考えることが、支援と重なることだということが分かった。

今後の課題は、「数学的な考え方」を指導の対象とした授業実践を行い、子ども達の「数学的な思考力・表現力」が実際にどのように伸びたかどうか、「数学的な考え方」を低学年が使えるよう一覧にしたものが実際の授業の中で子ども達に合っているのかどうかを検証していく必要がある。さらに、今年度は低学年を中心に研究を行ったが、中学年、高学年段階においても研究を進めていきたい。

【謝辞】

本論文の作成にあたり、熱心にご指導いただいた富竹徹先生をはじめ、島根大学の関係者の皆様には、研修の場として最善の環境を整えていただきました。また、授業参観校の皆様には本研究の趣旨を理解し、快く協力いただきました。皆様への心からの感謝の気持ちとお礼を申し上げます。

<参考・引用文献>

- 1) 広辞苑第六版：岩波書店(2008)
- 2) 多鹿秀継：「中学年の発達段階におけるの思考力・表現力とは」新しい算数研究No.473, pp.4-7, 東洋館出版社(2010)
- 3) 文部科学省：小学校学習指導要領解説(算数編), 東洋館出版社(2008)
- 4) 向山宣義：「算数的活動で子どもの思考力・表現力を育てる」, 明治図書出版(2009)
- 5) 富竹徹：「思考力・表現力を育成するための授業改善」新しい算数研究No.475, pp.4-7, 東洋館出版社(2010)
- 6) 片桐重男：「新版 数学的な考え方とその指導第1巻 数学的な考え方の具体化と指導」, 明治図書出版(2004)
- 7) 長崎栄三：「算数の力—数学的な考え方を乗り越えて—」滝井章共編者, 東洋館出版社(2007)
- 8) 片桐重男：「数学的な考え方・態度とその指導 1 数学的な考え方の具体化」, 明治図書出版(1988)
- 9) 富竹徹：「命名と発問化による数学的な考え方の具体化とそれぞれの考えのよさ」, 日本数学教育学会誌第93巻第2号, pp.37-38(2011)
- 10) 向山宣義：「低学年における思考力・表現力の指導はどうあるとよいか」, 新しい算数研究, No.472, pp.8-11, 東洋館出版社(2010)