

Duffing系の周波数応答関数における位相角の精度

田村 晋司¹⁾, 寺本 界²⁾

¹⁾島根大学大学院総合理工学研究科 機械・電気電子工学領域

²⁾島根大学総合理工学部 電子制御システム工学科

Accuracy of phase angle of frequency response function for Duffing oscillator

Shinji TAMURA¹⁾ and Kai TERAMOTO²⁾

¹⁾*Department of Mechanical, Electrical and Electronic Engineering,
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University*

²⁾*Department of Electronic and Control Systems Engineering,
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University*

Abstract

The accuracy of the frequency response functions for the amplitude ratio and the phase of a Duffing oscillator is investigated. The authors proposed the criterion to distinguish the states of the stochastic jump phenomenon using wavelet transform and the phase of the frequency response function which is derived by the method of multiple scales. But, the amplitude ratio is verified in many studies, the phase is seldom examined. So it is necessary to confirm the accuracy of the phase of the frequency response function. In this study, the amplitudes and phases of approximated frequency response functions are compared to the results of numerical integration. The amplitudes ratio by the numerical integration are evaluated from the maximum value of response and the discrete Fourier transform at the frequency of the excitation, and the phase is evaluated only from the discrete Fourier transform. These results agree well, and the accuracy of the approximated frequency response function for the phase as well as the amplitude ratio is confirmed.

1. 諸言

パワースペクトルにピークを有する狭帯域性の不規則励振力がDuffing系などの剛性非線形系に作用した場合、応答の標本関数において、振幅が時間的に急激に変化し、しかも大振幅と小振幅の状態間の推移がランダムに発生する、確率論的ジャンプ現象が生じることが知られている⁽¹⁾。このような場合には、等価線形化法で得られるRMS応答が多価となることが報告され、これらの値は大振幅時、小振幅時の局所RMS応答と全体のRMS応答に対応すると推測されてきた⁽¹⁾。しかし、この推測の妥当性を検証するためには、応答の標本関数において大振幅と小振幅の2つの状態を合理的に分類する指標が必要になる。また、信頼性解析の立場からは、各状態をとる確率、および各状態の安定性の尺度である継続時間が重要となる。

これらの大振幅状態と小振幅状態は振幅だけではなく、励振と応答の位相差にも現れ、例えばハードスプリング特性を持つ場合には、励振と応答の同位相／逆位相がそれぞれ大振幅／小振幅に対応する。そこで、著者らは励

振と応答のウェーブレット変換の積を取ることで励振と応答の位相差を求める指標を提案し、励振の帯域幅が広い場合でも応答の各状態を分類できることを示し⁽²⁾、この指標を利用して確率論的ジャンプ現象の統計量を調べた⁽³⁾。また、多重尺度法により得られた周波数応答関数の位相角における不安定解の存在領域を利用して、励振と応答の複素ウェーブレット変換より応答の各状態を判別する手法を提案した⁽⁴⁾。

一方、多重尺度法や調和バランス法などの近似解析法による周波数応答関数の精度について、振幅は数多くの研究で検証されているが、位相角に対してはあまり検証が行われていない。文献⁽⁵⁾において部分的に検証が行われているが十分とは言えない。そこで、本研究ではDuffing系の振幅と位相角の周波数応答関数について、近似解析法による結果と数値積分による結果を比較して、精度の検証を行う。

2. Duffing系と近似解析法による周波数応答関数

次式の運動方程式で表される一自由度 Duffing 系を考える.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2(x + \varepsilon\alpha x^3) = f(t) \quad (1)$$

ここで, 励振力 $f(t)$ は次式の調和励振とする.

$$f(t) = F \cos \Omega t \quad (2)$$

$\zeta = \varepsilon\mu$, $F = \varepsilon\delta\omega_n^2$ とおき, 応答を $x(t) = a \cos(\Omega t + \phi)$ と近似して, 調和バランス法を適用すると以下の関係式が得られる⁽⁵⁾.

$$\left[\left\{ 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 + \frac{3}{4} \varepsilon \alpha a^2 \right\}^2 + 4\varepsilon^2 \mu^2 \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right] a^2 = \varepsilon^2 \delta^2 \quad (3)$$

$$\arg \left[\left\{ 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 + \frac{3}{4} \varepsilon \alpha a^2 \right\} \frac{a}{\varepsilon \delta} - \frac{2\mu a}{\delta} \frac{\Omega}{\omega_n} i \right] = \phi \quad (4)$$

ここで, i は虚数単位である. 励振振動数 Ω を与えて式(3)を a について解き, 得られた解を式(4)に代入することによって, 周波数応答関数の振幅と位相角が得られる. また, 式(3), (4)は, 離調度 σ を $\varepsilon\sigma = \Omega^2 - \omega_n^2$ と定義して, 摂動法や多重尺度法を適用することによっても得られる⁽⁶⁾.

一方, 離調度 σ を $\varepsilon\delta = \Omega - \omega_n$ と定義して, 摂動法や多重尺度法を適用すると, 以下の関係式が得られる⁽⁷⁾.

$$\left[\left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega_n} \right) + \frac{3}{4} \alpha a^2 \right\}^2 + 4\mu^2 \right] a^2 = \delta^2 \quad (5)$$

$$\arg \left[\left\{ \frac{2}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\Omega}{\omega_n} \right) + \frac{3}{4} \alpha a^2 \right\} \frac{a}{\delta} - \frac{2\mu a}{\delta} i \right] = \phi \quad (6)$$

3. 数値積分における周波数応答関数

数値積分における周波数応答関数では, Runge Kutta Fehlberg法により運動方程式(1)の数値解を求め, 励振力 $f(t)$ と応答 $x(t)$ の離散フーリエ変換 $F(\omega)$, $X(\omega)$ により周波数応答関数を求める. ただし, 励振力と応答のフーリエ変換のうち, 周波数応答関数では励振振動数 Ω の成分だけが必要であるため, 本研究では高速フーリエ変換による離散フーリエ変換を行わず, 下記の式によって $F(\Omega)$, $X(\Omega)$ を求めた.

$$F(\Omega) = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \exp(-i\Omega t_j) \Delta t \quad (7)$$

$$X(\Omega) = \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) \exp(-i\Omega t_j) \Delta t \quad (8)$$

ここで, N はデータ数, Δt は時間ステップであり,

$t_j = j\Delta t$ とする. 式(7), (8)によって得られる励振力と応答の離散フーリエ変換より, 周波数応答関数の振幅倍率と位相角はそれぞれ以下の式によって求められる.

$$\frac{a}{F} = \left| \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} \right| \quad (9)$$

$$\phi = \arg \left(\frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} \right) \quad (10)$$

なお, 式(9)では応答の高調波成分による寄与が含まれない. そのため, 定常応答の最大値も求め, これらの結果との比較を行う.

4. 計算結果と考察

振幅倍率 a/F と位相角 ϕ について, 調和バランス法により式(3), (4)を解いて得られる結果と, 数値積分により式(9), (10)から得られる結果を比較する.

数値積分を行う際, 励振振動数を徐々に増加(減少)させる時に初期条件として用いる直前の励振振動数に対する応答と, 励振力との位相差を合わせるため, 励振力のちょうど200周期の計算を行い, 時間ステップ Δt は励振力の周期の $1/100$, つまり, 励振角振動数 Ω に対して

$$\Delta t = \frac{\pi}{50}$$

と設定した. そして, 後半100周期を定常応答とみなして, 振幅倍率と位相角を求めた.

また, 系のパラメータは以下のように設定し,

$$\zeta = 0.05, \quad \varepsilon = 0.1, \quad \alpha = 1.0$$

励振力の振幅は

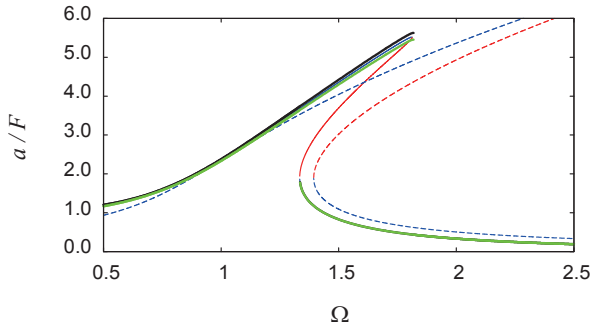
$$F = 1.0, \quad 2.0, \quad 5.0, \quad 10.0$$

と設定した.

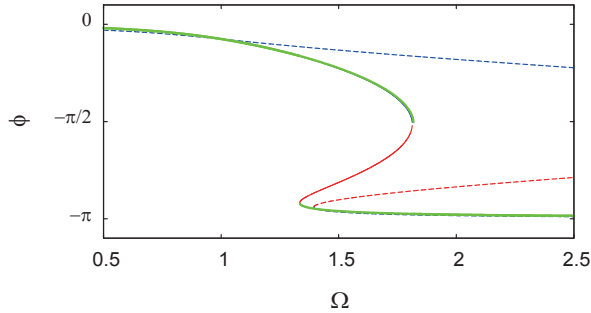
振幅と位相角の周波数応答曲線を図1~4に示す. 図1~4はそれぞれ, $F = 1.0$, $F = 2.0$, $F = 5.0$, $F = 10.0$ に対応し, (a), (b)はそれぞれ, 振幅倍率 a/F と位相角 ϕ である. 図中, 青と赤の実線はそれぞれ, 式(3), (4)による安定解と不安定解を表し, 図1における青と赤の破線は, 式(5), (6)による安定解と不安定解を表す. 緑の実線は数値積分結果の離散フーリエ変換により求めた結果であり, 振幅倍率の図にのみ描かれている黒の実線は応答の最大値から求めた振幅である.

図1における式(5), (6)の近似解析は, 式(3), (4)の近似解析や, 数値積分結果と比べて精度が悪いことが分かる. そのため, 以降の図2~4では式(5), (6)の近似解析を省略した.

数値積分結果の振幅倍率において, 離散フーリエ変換による結果と最大値による結果は, 高調波成分を考慮していないことによる大振幅部分での若干の差と, 図3の小

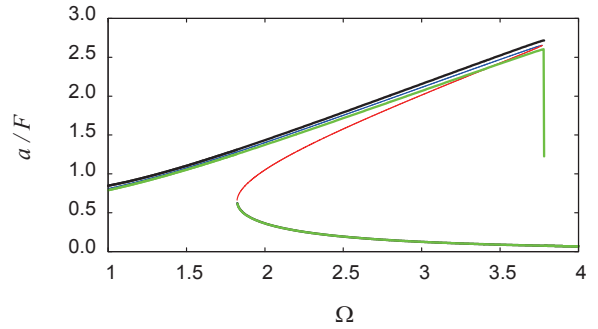


(a) 振幅倍率

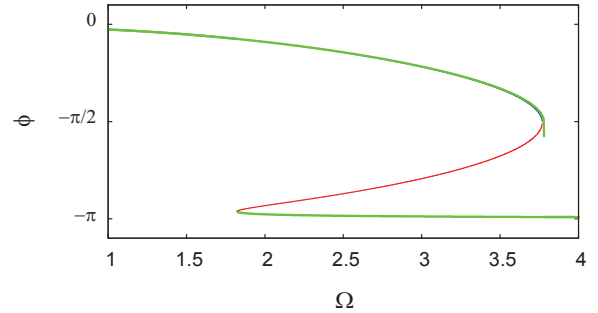


(b) 位相角

図1 周波数応答関数 ($F = 1.0$)

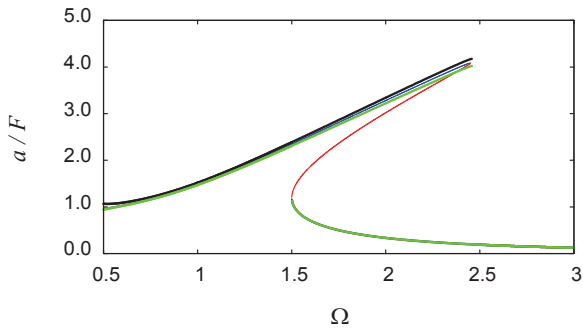


(a) 振幅倍率

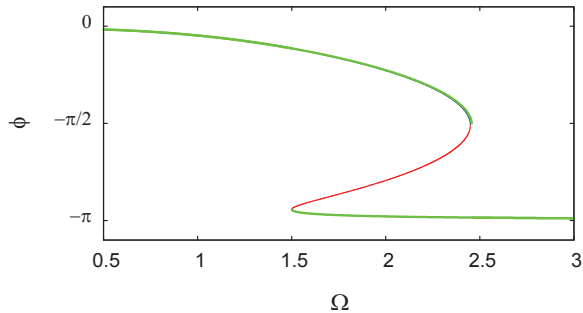


(b) 位相角

図3 周波数応答関数 ($F = 5.0$)

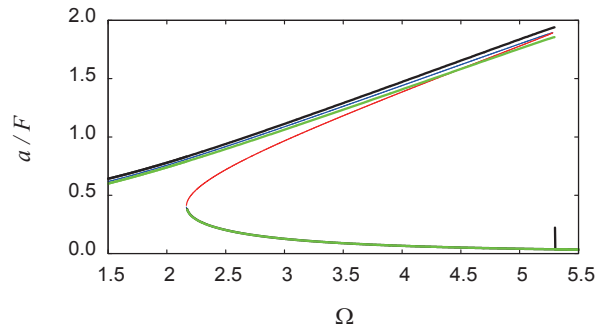


(a) 振幅倍率

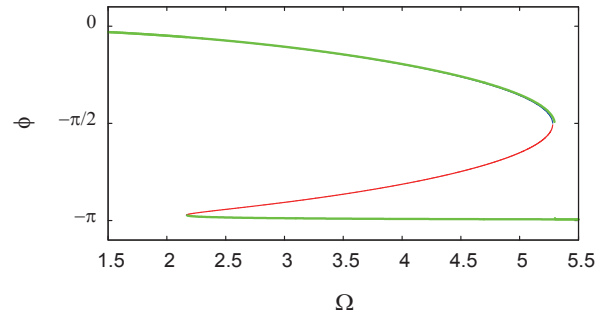


(b) 位相角

図2 周波数応答関数 ($F = 2.0$)



(a) 振幅倍率



(b) 位相角

図4 周波数応答関数 ($F = 10.0$)

振幅から大振幅へのジャンプが起こる部分での差を除くと、非常に良く一致している。よって、離散フーリエ変換による周波数応答関数は精度の基準として妥当であることが示された。

これらの結果より、図3の大振幅から小振幅へジャンプする部分における100周期で定常状態に達しなかったた

めによる誤判定を除けば、調べた範囲内で式(3)、(4)の安定解と数値積分結果は非常に良く一致していることが分かる。

よって、固有角振動数が大きく変化する強い非線形性を示しているにも関わらず、式(3)、(4)により振幅、位相角ともに非常に精度の良い解析結果が得られていること

が示された.

5. 結論

Duffing系の振幅と位相角の周波数応答関数について, 近似解析法による結果と数値積分による結果を比較して, 精度の検証を行った. 数値積分では離散フーリエ変換の励振振動数成分, および最大値により周波数応答関数を求めた. 本研究で得た知見を以下にまとめる.

- 数値積分結果の振幅倍率において, 離散フーリエ変換による結果と最大値による結果は非常に良く一致するので, 離散フーリエ変換による周波数応答関数は精度の基準として妥当である.
- 調和バランス法や離調度を $\varepsilon\sigma = \Omega^2 - \omega_n^2$ と定義した摂動法と多重尺度法から得られる周波数応答関数は, 振幅, 位相角とも調べた範囲内において, 非常に精度の良い解析結果となる.
- 離調度を $\varepsilon\sigma = \Omega - \omega_n$ と定義した摂動法と多重尺度法は, 調べた範囲ではあまり良い精度が得られなかった.

参考文献

- (1) Roberts, J. B., "Multiple solutions generated by statistical linearization and their physical significance", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.26, No.6 (1991), pp.945-959.
- (2) 田村晋司, 土屋博徳, 木村康治, "連続ウェーブレット変換を用いたDuffing系の不規則応答におけるジャンプ現象の解析", 日本機械学会論文集C編, Vol.73, No.728 (2007), pp.1029-1036.
- (3) 田村晋司, 鈴木康弘, 木村康治, "狭帯域不規則励振を受けるDuffing系の確率論的ジャンプ現象の各種統計量", 日本機械学会論文集C編, Vol.75, No.754 (2009), pp.1560-1567.
- (4) 田村晋司, 舟越良文, 加藤佑斗, "連続ウェーブレット変換を用いたDuffing系の不規則応答におけるジャンプ現象の解析 (第2報, 複素ウェーブレット変換による解析)", 日本機械学会論文集C編, Vol.77, No.783 (2011), pp.4081-4089.
- (5) 近藤孝広, 田村英之, 末岡淳男, "非線形系の定常振動の高次近似解法と安定判別法について", 日本機械学会論文集C編, Vol.51, No.466 (1985), pp.1180-1188.
- (6) 日本機械学会(編), 非線形系のダイナミクス -非線形現象の解析入門-, (2007), コロナ社.
- (7) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), John Wiley & Sons, New York.
- (1) Roberts, J. B., "Multiple solutions generated by statistical