

水中翼船用ウォータージェット 推進装置のまわりの流れの解析

（第二報：変形円柱面を外側境界面とする領域内の
グリーン関数とその応用）

坂 尾 稔*

Minoru SAKAO

On the Analysis of the Flow Around a
Waterjet Propulsion System of Hydrofoil Craft
(2nd Report: Green's Function for the Region Bounded
by a Deformed Circular Cylinder Surface and its Application)

1. ま え が き

第一報¹⁾では水中翼船用ウォータージェット推進装置（以下WJと略記する）を対象としてそのまわりの流れの全体を統一的に解析する方法について基礎的な考察を行なった。第一報第二章ではダクト内の流れを一次元的流れて近似した場合について簡単な解析を行なった。第三章ではWJのまわりの全体の流れについての三次元的解析法について検討を行なった。すなわちインペラ自由渦の存在を前提としこの渦の誘導速度をビオ-サバールの法則を用いて計算しこの結果と速度ポテンシャルに対するグリーンの公式を用いてWJのまわりの全体の流れの表示式を求めた。ただこの流れの表示式はダクト表面に分布させた束縛渦の強さと自由表面上の特異点の強さが未知量として含まれているので流れを陽に求めるためにはこれらの未知量を境界条件により定めることが必要となる。第一報ではこれらの未知量の決定法については具体的に示すことができなかった。

さて実際のWJの形とはかけ離れるが次のようなWJのモデルについて考えてみる。すなわちWJは吸い込み部とインペラー部（ノズルを含む）に分けることができ

* 島根大学教育学部技術科研究室

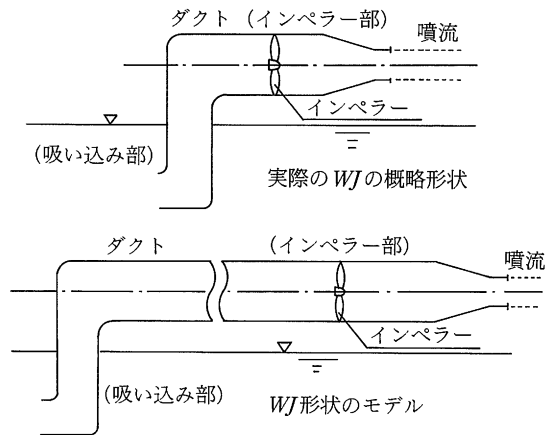


図1 WJ形状のモデルの説明

るがこのモデルとして図1に示すように両者が無限に離れたWJについて考えてみる。このようなWJのモデルの場合は直感的に吸い込み部による流れの攪乱はインペラー部の流れに影響を与えないことが分る。逆にインペラー部は吸い込み部の流れに影響しないことも分る。このように上述のWJのモデルでは両方の部分の流れを分離して取り扱うことが可能となり流れの解析が簡単となる。実際のWJの流れを求めるには次のような方法が考えられる。吸い込み部のまわりの流れとインペラー部ま

わりの流れが独立に解析的に求めたものとする。インペラー部を実際の WJ 程度まで吸い込み部に近付けた場合には、インペラー部の流れをそのまま前方に平行移動して吸い込み部の流れに重ね合せたのでは吸い込み部ダクト面上の流れの条件が満たされなくなるのでインペラー部による吸い込み部ダクト表面上の流れの攪乱を打ち消すようにダクト表面に分布させる特異点強さを補正する。インペラー部についても吸い込み部による攪乱が加わるのでインペラー部の特異点強さを同様に考えて補正する。このような補正は吸い込み部とインペラー部の干渉によるものであり上述のような補正を収束するまで繰り返し行うことにより実際の WJ のまわりの流れを求めることが可能となる。しかし実用上は一回の補正で充分ではないかと思う。本論は上述の繰り返し法の初期値となる流れの中で WJ の主要部であるインペラー部の流れをとりあげて、その三次元的解析法について具体的に検討したものである。本論では解析に当っては所謂グリーン関数を導入することによりグリーンの公式による流れの表示法の簡単化をはかった。円柱面を固定外部境界面とする領域内のグリーン関数は古くからベッセル関数を含む無限級数の形で求められている²⁾。しかるにインペラー部のダクトはインペラー前方では半無限長さの円柱と考えて差しつかえないがインペラー後方にはノズルがあり更にその後方は噴流である。一般にノズル部は横断面形状は円と考えてよいと思われるがその半径はインペラー位置のダクト半径と異なる。ノズル後方の噴流の半径も厳密に言えばノズル出口半径と若干異なるが実用上はノズル出口半径と同じと考えてよいと思う。したがってインペラー部は軸対称領域であるがその外部境界面は円柱表面とは幾分相違しており境界面の半径はダクトの前後方向に変化する。したがってこのような領域におけるグリーン関数は円柱面を外部境界面とする領域のグリーン関数とは異なってくる。本論においてはまず外部境界面の形状が円柱表面と若干異なる領域におけるグリーン関数の近似解について検討する。次いでこのグリーン関数を用いてインペラー部の流れを三次元的に表す方法について検討する。なお本論においても第一報におけると同様にインペラー翼数が無限大の場合を対象とする。また本論で使用した主な記号についてはその説明を末尾にまとめて示す。

2. 固定された外部境界面形状が円柱面と多少異なる領域内のグリーン関数

通常用いられている第二種グリーン関数は領域内に単

位強さの点吸い込みがあり領域を囲む固定外部境界面上で境界面の法線方向の流速成分が 0 となるポテンシャル流れを表す関数として定義される。固定外部境界面が無限円柱面の場合には座標系として円柱座標 (x, r, θ) を用いれば第二種グリーン関数 G_2 は次式で与えられる。¹⁾

$$G_2(x, r, \theta) = -\frac{2}{a^2} |x - x'| \quad (1)$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\epsilon_p \rho_s e^{-\beta_s |x-x'|} J_p(\beta_s r) J_p(\beta_s r')}{(\rho_s^2 - p^2) \{J_p(\rho_s)\}^2}$$

$\times \cos p(\theta - \theta')$

ただし $\epsilon_0 = 1, \epsilon_p = 2 (p \neq 0)$

$\rho_s : Z^{-p+1} J_p'(Z) = 0$ の正根

$\beta_s = \frac{\rho_s}{a} \quad (S : 1, 2, 3 \dots)$

a : 円柱半径

J_p : ベッセル関数

x', r', θ' : 単位強さの点吸い込みの位置の座標

(1)は円柱座標系による次の連続の条件式を領域内で満し、 $r = a$ の円柱表面上で法線流速成分 $\partial G_2 / \partial r$ が 0 となる。

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 G_2}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_2}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

さて前述のように本論では外部境界面として円柱面と若干異なる軸対称面をとった場合のグリーン関数について考察する。このために以下においては次式により子午面上の (x, r) 座標系から変換される直交曲線座標系 (m, n) を用いてこの問題を検討する。(図 2 参照のこと)

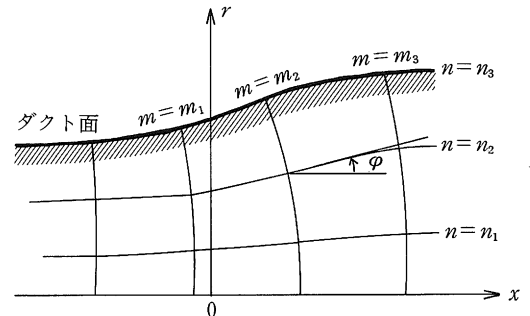


図 2 直交曲線座標 (m, n) の説明

$$\begin{aligned} x &= x(m, n) \\ r &= r(m, n) \end{aligned} \quad (3)$$

(m, n) 座標は直交曲線座標であるから次の直交条件を満たす。

$$\frac{\partial x}{\partial m} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} = 0 \quad (4)$$

$$\text{あるいは} \quad \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial m}{\partial r} + \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial r} = 0 \quad (5)$$

さらに図2からも明らかなように (m, n) 座標系は $n = \text{一定}$ の曲線の一つが (x, r) 平面で外側境界面と一致するように定められる。(3)の座標変換の関係式はこれらの条件を満たすものである。したがって (m, n, θ) 系では外側境界面上でその法線速度成分が0となる条件は次式で表されることになる。

$$\frac{\partial G_2}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad n = \text{一定} = a \quad (6)$$

さて以下においては直交曲線座標 (m, n) として共役座標を採用する。 φ が小にして (m, n) 座標系が (x, r) 座標系とくらべてそれ程大きな差がないときは付録に示すように連続の条件式(2)は近似的に次式となる。

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial m^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 G_2}{n^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{n} \frac{\partial G_2}{\partial n} = 0 \quad (7)$$

グリーン関数は前述のように領域内に単位強さの吸い込みがある場合の速度ポテンシャルとして定義される。しかしこの条件を文字通りに受けるとグリーン関数の出発点となる無限に拡がった領域における点吸い込みの速度ポテンシャルの (m, n, θ) 座標による表示式が複雑となり、このためそれ以後の展開がむづかしくなる。それでここでは (x, r) 平面を (m, n) 平面に写像して (x, r) 平面におけるグリーン関数の定義を形式的にそのまま (m, n) 平面に適用することにより求まる関数について検討する。かかる関数は (x, r) 平面におけるグリーン関数の近似関数であるがここではこの関数についてもグリーン関数と称することにする。 (m, n) 平面を子午面とする無限に拡がった領域における点吸い込みによる速度ポテンシャル Φ は次式で与えられる。

$$\Phi(m, n, \theta) = - \frac{1}{\sqrt{(m-m')^2 + n^2 + n'^2 - 2nn'\cos(\theta-\theta')}} \quad (8)$$

ただし (m', n', θ') : 点吸い込みの位置の座標
(8)は明らかに(7)を満たすから近似的に(2)を満たすことになる。すなわち(8)は近似的に (x, r) 面での単位強さの点吸い込みの速度ポテンシャルを表している。(8)から出発して (m, n) 平面上におけるグリーン関数を求めるためには (x, r) 平面におけるグリーン関数(1)を求めるに当って使用した手法がそのまま使用できる。したがって (m, n) 平面におけるグリーン関数として次式を得る。

$$G_2(m, n, \theta) = - \frac{2}{a^2} |m - m'| \quad (9)$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_p \rho_s e^{-\beta_s |m-m'|} J_p(\beta_s n) J_p(\beta_s n')}{(\rho_s^2 - p^2) \{J_p(\rho_s)\}^2} \times \cos p(\theta - \theta')$$

ただし a : ダクト面を示す n の値

$\varepsilon_0, \varepsilon_p, \rho_s, \beta_s$: (1)式に同じ

(m', n', θ') が(3)による (x', r', θ') に対応するものとすれば(9)の G_2 は (x', r', θ') に単位強さの吸い込みがありダクト面 $n = a$ 上でその法線方向の流速成分 $\frac{\partial G_2}{\partial n}$ が0となる条件を近似的に満しているので空間 (x, r, θ) における近似的グリーン関数と見なすことができる。(3)を次のように変形する。

$$\begin{aligned} m &= m(x, r) \\ n &= n(x, r) \end{aligned} \quad (10)$$

(9)(10)より近似グリーン関数を (x, r, θ) に関して陽に示すと次式となる。

$$G_2(x, r, \theta) = - \frac{2}{a^2} |m(x, r) - m(x', r')| \quad (11)$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_p \rho_s e^{-\beta_s |m(x, r) - m(x', r')|} J_p(\beta_s n(x, r)) J_p(\beta_s n(x', r'))}{(\rho_s^2 - p^2) \{J_p(\rho_s)\}^2}$$

$$\times \cos p(\theta - \theta')$$

3. インペラーによる固定ダクトおよび噴流内の流れ

静止座標系で見た非定常流れの場合は線形理論によれば速度ポテンシャル Φ' と加速度ポテンシャル ϕ の間には次の関係がある。

$$\phi = \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \quad (12)$$

ただし t : 時間

加速度ポテンシャル ϕ は圧力 p と次の関係で結ばれる。

$$\phi = \frac{p}{\rho} + \text{const} \quad (13)$$

ただし p : 圧力

ρ : 流体の密度

以下 WJ が x 軸の負の向きに一定速度で前進し同時にインペラーは x 軸のまわりに一定角速度で回転するときの流れについて考える。このような非定常流れは、 x 方向の一樣流れと x 軸まわりの回転流れの中にダクトとイン

ペラーを静止させて置いたときの定常攪乱流れと同じになる。かかる定常流れの速度ポテンシャルを Φ とする。 Φ と ϕ の関係は当然(12)とは異なる。この場合のダクト内の流れの圧力したがって ϕ はインペラー面以外では連続であり一価である。インペラー後方の自由渦が存在するところでも ϕ したがって ϕ は連続で一価である。しかし自由渦が存在するところでは Φ は一価とはならない。加速度ポテンシャルは以上の性質を有するからダクト内部に対してグリーン公式が適用できる。グリーン公式によるとダクト及び噴流内部の ϕ は次式で表すことができる。

$$\phi(x, r, \theta) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} \left\{ G_2 \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G_2}{\partial n} \right\} dS \quad (14)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_d} \left\{ G_2 \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G_2}{\partial n} \right\} dS$$

ただし S_i : インペラ表面

S_d : ダクト内面及び噴流外面

G_2 : (11)式のグリーン関数

n : 表面の内向き法線

しかるにダクト内面では $\frac{\partial G_2}{\partial n} = 0$ であり、また $\sin\varphi \doteq 0$ の場合には $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ もダクト内面で近似的に0となる。したがって(14)の第二項は近似的に0となる。また S_i 上の積分を翼の上面と下面に分けて示すと次のようになる。

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_i} G_2 \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'_i} G_2 \left(-\frac{\partial \phi_u}{\partial n'} + \frac{\partial \phi_l}{\partial n'} \right) dS' \quad (15)$$

ただし ϕ_u : インペラー翼上面の ϕ

ϕ_l : インペラー翼下面の ϕ

n' : インペラー翼の下面に向う法線

S'_i : インペラーの片側の表面

インペラー翼がうす翼であるとするれば翼面上で $\frac{\partial \Phi_u}{\partial n'} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial n'}$ である。したがって次の関係が成立する。

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial n'} = \frac{\partial \phi_l}{\partial n'} \quad \text{on } S'_i \quad (16)$$

すなわち(15)の積分の値は0となる。したがって(14)は次式となる。

$$\phi(x, r, \theta) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S'_i} \phi \frac{\partial G_2}{\partial n} dS' \quad (17)$$

(17)はさらに次のように変形される。

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_{(\text{上面})} \phi_u \frac{\partial G_2}{\partial n'} dS'$$

$$+\frac{1}{4\pi} \iint_{(\text{下面})} \phi_l \frac{\partial G_2}{\partial n'} dS'$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \iint_{S'_i} (\phi_u - \phi_l) \frac{\partial G_2}{\partial n'} dS'$$

あるいは

$$\phi(x, r, \theta) = -\frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S'_i} \Pi(x', r', \theta') \frac{\partial G_2(x, r, \theta; x', r', \theta')}{\partial n'} dS' \quad (18)$$

ただし $\Pi = \rho (\phi_u - \phi_l) = p_l - p_u$

(18)の ϕ の表示式はインペラー両面の圧力差を表す Π のみを未知量として含んでおり、ダクト面上の未知量は含まれていないので第一報の表示式にくらべると非常に簡単になっている。したがってたとえばインペラー形状が与えられた場合にはインペラー面上の条件により Π を定めればダクト内の流れを陽に求めることができる。またインペラー両面の圧力差 Π が与えられる場合には対応するインペラー形状は直接(18)を用いて計算することができるので更に簡単となる。以下花岡³⁾の研究を参考にして(18)を用いて攪乱速度ポテンシャル Φ を計算する方法について検討する。さて前述のようにダクト及びインペラーは x 軸方向の一樣流れ u_0 と x 軸まわりの角速度 Ω の回転流の中に静止しているものとする。また以下においては独立変数 x, θ のかわりに次の τ, σ を用いることにする。

$$\tau = \theta + \frac{x}{h}, \quad \sigma = \theta - \frac{x}{h} \quad (19)$$

ただし $h = \frac{u_0}{\Omega}$

自由渦がインペラーから流出するものとすれば一本の自由渦線上では σ は一定であり τ が変化する。この τ, σ を用いれば u_0 の一樣流れと Ω の回転流中の攪乱流れの Φ と(13)の ϕ の間の関係は次式となる。

$$\phi = 2\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \quad (20)$$

あるいは

$$\Phi = \frac{1}{2\Omega} \int_{\tau_0}^{\tau} \phi(\tau, \sigma, r) d\tau + \varphi(\sigma, r) \quad (21)$$

上式に含まれる $\tau_0, \varphi(\sigma, r)$ は積分常数であり、無限上流の流の条件から定まる。(18)は次のようにも書ける。

$$\phi(\tau, \sigma, r) = -\frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S'_i} \Pi(\tau', \sigma', r') \frac{\partial G_2(\tau, \sigma, r, \tau', \sigma', r')}{\partial n'} dS' \quad (22)$$

また(11)の G_2 を次式で表す。

$$G_2(\tau, \sigma, r, \tau', \sigma', r') \quad (23)$$

$$= -\frac{1}{a^2} |m(\tau, \sigma, r) - m(\tau', \sigma', r')| + G_2^*$$

(23)の G_2^* は $|x| \rightarrow \infty$, あるいは $|m| \rightarrow \infty$ では0となる。

(21), (22), (23)より Φ は次式のように表される。

$$\Phi(\tau, \sigma, r)$$

$$= -\frac{1}{8\pi\rho\Omega} \iint_{S'_i} \Pi(\tau', \sigma', r') dS' \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial G_2^*}{\partial n'} d\tau \quad (24)$$

$$+ \frac{1}{4\pi\rho\Omega a^2} \iint_{S'_i} \Pi(\tau', \sigma', r') dS'$$

$$\times \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial}{\partial n'} |m(\tau, \sigma, r) - m(\tau', \sigma', r')| d\tau$$

$$+ \varphi(\sigma, r)$$

(24)はダクト形状を一般的に取り扱った場合のダクト内の攪乱流れの速度ポテンシャルの表示式である。しかし(24)によるとこれ以上の展開はむづかしいように思われる。

4. インペラー前方のダクトが半無限円柱の場合のダクト及び噴流内の流れ

ここでは具体的に図3に示すようなダクトを対象としてダクト内の流れについて考察する。すなわちインペラー上流側ではダクトはインペラー半径を半径とする半無限円柱面でありインペラー後方では図3に示すように外側境界面の半径がインペラー半径と異なる場合を対象とする。かかるダクトの場合には少なくともインペラーを含めてその上流側の領域では (m, n, θ) 座標系と (x, r, θ) 系は同じものとなる。したがって点 (τ, σ) がこの領域に入る場合には(24)において $m(\tau, \sigma, r) - m(\tau', \sigma', r') = x - x'$ となる。したがってこの領域では(24)は次式となる。

$$\Phi(\tau, \sigma, r) = -\frac{1}{8\pi\rho\Omega} \iint_{S'_i} \Pi(\tau', \sigma', r') dS' \quad (25)$$

$$\times \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial G_2^*}{\partial n'} d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\Omega a^2} \iint_{S'_i} \Pi(\tau', \sigma', r') dS'$$

$$\times \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial}{\partial n'} |x - x'| d\tau + \varphi(\sigma, r)$$

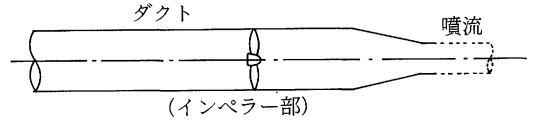


図3 インペラー部形状の具体例

ただし(25)の a' はインペラー上流のダクトの半径である。線形理論に従う場合には S'_i は u_0 , Ω により定まるピッチ $2\pi h = 2\pi \frac{u_0}{\Omega}$ の螺旋面にとることができる。この螺旋面の上面から下面に向う法線が n' であるから n' ベクトルの x, r, θ 軸に対する方向余弦を l, m, n とすればこれらは次のようになる。

$$l, m, n = \frac{\mu'}{\sqrt{1+\mu'^2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{1+\mu'^2}} \quad (26)$$

ただし $\mu' = \frac{r'}{h}$
しかるに次の関係がある。

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial \sigma'} \frac{\partial \sigma'}{\partial n'} + \frac{\partial}{\partial \tau'} \frac{\partial \tau'}{\partial n'}$$

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial n'} = l \frac{\partial \sigma'}{\partial x'} + n' \frac{\partial \sigma'}{\partial \theta'} = \frac{-1}{h\sqrt{1+\mu'^2}} (\mu' + \frac{1}{\mu'})$$

$$\frac{\partial \tau'}{\partial n'} = l \frac{\partial \tau'}{\partial x'} + n' \frac{\partial \tau'}{\partial \theta'} = \frac{1}{h\sqrt{1+\mu'^2}} (\mu' - \frac{1}{\mu'})$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{1}{h\sqrt{1+\mu'^2}}$$

$$\times \left\{ -(\mu' + \frac{1}{\mu'}) \frac{\partial}{\partial \sigma'} + (\mu' - \frac{1}{\mu'}) \frac{\partial}{\partial \tau'} \right\} \quad (27)$$

(27)を用いれば次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial n'} |x - x'| = -\text{sgn}(x - x') \frac{\mu'}{\sqrt{1+\mu'^2}} \quad (28)$$

無限上流のダクト内領域では $\text{sgn}(x - x')$ は $(-)$ となるから(28)は次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial n'} |x - x'| = \frac{\mu'}{\sqrt{1+\mu'^2}} \quad \text{for } x \rightarrow -\infty \quad (29)$$

したがって次式が成立する。

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\partial}{\partial n'} |x - x'| d\tau = \frac{\mu'}{\sqrt{1+\mu'^2}} (\tau - \tau_0)$$

$$\text{for } x \rightarrow -\infty \quad (30)$$

また(25)の第一項は無限上流のダクト内領域では0となる。したがって無限上流域では(25)の速度ポテンシャル Φ

は次式となる。

$$\Phi(x \rightarrow -\infty) = \frac{(\tau - \tau_0)}{4 \pi \rho \Omega a'^2} \iint_{S'_i} \Pi(\tau', \sigma', r') \frac{\mu'}{\sqrt{1 + \mu'^2}} dS' + \varphi(\sigma, r)$$

しかるに

$$\frac{\tau_0}{4 \pi \rho \Omega a'^2} \iint_{S'_i} \Pi(\tau', \sigma', r') \frac{\mu'}{\sqrt{1 + \mu'^2}} dS'$$

は常数であるから、これと $\varphi(\sigma, r)$ を合せて改めて $\varphi(\sigma, r)$ とおくことにすれば上式は次式となる。

$$\Phi(x \rightarrow -\infty) = \frac{T\tau}{4 \pi \rho \Omega a'^2} + \varphi(\sigma, r) \quad (31)$$

$$\text{ただし } T = \iint_{S'_i} \Pi(\tau', \sigma', r') \frac{\mu'}{\sqrt{1 + \mu'^2}} dS'$$

しかるに $\tau = \sigma + \frac{2}{h}x$ であるから(31)はさらに次式となる。

$$\Phi(x \rightarrow -\infty) = \frac{Tx}{2 \pi \rho u_0 a'^2} + \frac{T\sigma}{4 \pi \rho \Omega a'^2} + \varphi(\sigma, r) \quad (32)$$

しかるにダクト内の攪乱流れは無限上流ではインペラーに向う x 方向の一樣流となる筈であり、無限上流の Φ は x のみの関数にならねばならぬ。このことから(32)の $\varphi(\sigma, r)$ は次式となる。

$$\varphi(\sigma, r) = -\frac{T\sigma}{4 \pi \rho \Omega a'^2} \quad (33)$$

したがって無限上流の Φ は次式となる。

$$\Phi(x \rightarrow -\infty) = \frac{Tx}{2 \pi \rho u_0 a'^2} \quad (34)$$

したがって本章で取り扱っているダクトの場合は領域内の攪乱流れの速度ポテンシャルは全域では次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, \sigma, r) &= -\frac{1}{8 \pi \rho \Omega} \iint_{S'_i} \Pi(\tau', \sigma', r') dS' \\ &\times \int_0^\tau \frac{\partial G_2^*}{\partial n'} d\tau + \frac{1}{4 \pi \rho \Omega a'^2} \iint_{S'_i} \Pi(\tau', \sigma', r') dS' \\ &\times \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial n'} |m(\tau, \sigma, r) - m(\tau', \sigma', r')| d\tau \\ &- \frac{T\sigma}{4 \pi \rho \Omega a'^2} \end{aligned} \quad (35)$$

インペラー後方のダクト内の流れについてもノズル部の形状が具体的に与えられれば、本章で対象としているダクトの場合に対しては(24)を用いて具体的に検討することができる(付録参照)。しかし時間的余裕がなかったので

これ以上触れることができなかった。今後の問題である。最後にインペラー推力, トルクに触れておく。インペラー推力およびトルクは図4から明らかなように次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{インペラー推力 } T &= \iint_{S'_i} \Pi \frac{r' \Omega}{\sqrt{u_0^2 + (r' \Omega)^2}} dS' \\ &= \iint_{S'_i} \Pi \frac{\mu'}{\sqrt{1 + \mu'^2}} dS' \\ \text{インペラートルク } Q &= \iint_{S'_i} \Pi \frac{r' u_0}{\sqrt{u_0^2 + (r' \Omega)^2}} dS' \\ &= \iint_{S'_i} \Pi \frac{r'}{\sqrt{1 + \mu'^2}} dS' \end{aligned} \quad (36)$$

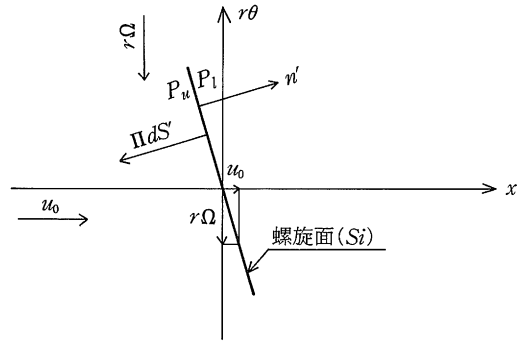


図4 インペラー面の力の説明

したがって(31)の T はインペラー推力に他ならないことが分る。なお(36)の推力, トルクは第四章で取り扱ったダクトの場合に対してのみ成立する表示式でありダクト一般に対して成立するものではない。

5. あとがき

WJ のまわりの三次元流れ全体を統一的に解析するために第一報ではグリーンの公式を速度ポテンシャルに適用して全流体域で成立する三次元流れの表示式を示したが、この中には境界条件により定めねばならない多くの未知量が含まれておりこの表示式を流れの解析に使用するにはなお多くの問題が残されている。

このため本論では第一報とは異なる別の解析法について検討を行なった。すなわち本論第一章で示したように WJ の吸い込み部の流れとインペラー部の流れが互に干渉しないような実際の WJ の形状とはかけ離れた WJ のモデルを導入して吸い込み部まわりの流れとインペラー部まわりの流れを夫々独立に求める。かかる流れを初期値として用いて実際の WJ のまわりの流れを境界面上の

特異点強さを繰返し法により補正することにより求める方法を提案した。次いで初期値となる両部の流れの中で WJ の主要部であるインペラー部を対象としてそのまわりの流れの解析法について検討した。流れの解析に当ってはいずれにしてもまず未知量を含む形で流れの表示式を求める必要があるが未知量が多いと解析に不便となる。そこで本論では解析の簡単化を目的として流れの表示式にグリーン関数を導入することを試みた。ダクト表面上の流れの条件を満たすグリーン関数を用いればグリーン関数の公式を用いて求まる攪乱速度ポテンシャルをダクト上の条件を満たす形で表すことが可能となるので、含まれる未知量としてはインペラー表面上の特異点強さのみとなり流れの解析が容易になる。

インペラー部のダクトは一般に軸対称と考えてよいと思うがノズルを含んでいるので流体領域の外部境界面は円柱面と異なっている。かかる場合のグリーン関数は古くから知られている円柱面を外部境界面とする領域のグリーン関数とは異なってくる。それで本論では次に外部境界が円柱面と若干異なる軸対称固定境界面に囲まれる領域のグリーン関数について検討した。そのために子午面座標系 (x, r) を (m, n) に変換することとし (m, n) 座標系としてダクト面が $n = \text{一定}$ の曲線の一つに一致するような共役座標系を採用した。二次元流れの問題では (x, r) 平面の流れの複素ポテンシャルが解析関数であれば写像関数として解析関数を用いるときは写像される (m, n) 平面の流れの複素ポテンシャルも解析関数となり (m, n) 平面における流れの連続の条件を表す方程式は (x, r) 平面における方程式と全く同形となる。しかし上述のグリーン関数の場合はこれ程簡単ではなく (m, n) 座標系による連続条件を表す方程式は (x, r) 座標系による方程式にくらべて複雑となる。それで本論では (x, r) 座標系と (m, n) 座標系が余り大きく違はない場合を対象とすることにして、 (m, n) 座標系における連続の条件を表す方程式を (x, r) 座標系のそれと同様の形に近似し、この近似方程式を解くことによりグリーン関数を近似的に求めた。次いでこのグリーン関数をグリーン関数の公式を適用してインペラー部のまわりの攪乱流れの表示式を近似的に求めた。この表示式はインペラー表面の特異点強さのみを未知量として含んでいる。次いでインペラー前方のダクトが半無限長さの円柱の場合に上述の流れの表示式を適用し、このようなダクトの場合に対する完結した流れの表示式を求めた。しかしこの場合に対しても数値的な検討を行う余裕がなかった。これは今後の課題として残される。

記号の説明

x, r, θ	: 円柱座標
x', r', θ'	: 特異点位置の円柱座標
m, n, θ	: 直交曲線座標
m', n', θ'	: 特異点位置の直交曲線座標
τ	: $\theta + x/h$
σ	: $\theta - x/h$
h	: u_0/Ω
μ'	: $\frac{r'}{h}$
ρ	: 水の密度
u_0	: WJ の前進速度
Ω	: インペラーの回転角速度
p	: 圧力
p_u	: インペラー上面の圧力
p_l	: インペラー下面の圧力
ϕ	: 攪乱加速度ポテンシャル
Φ	: 攪乱速度ポテンシャル
G_2	: 第二種グリーン関数
Π	: $p_l - p_u$
S_i	: インペラー表面
$S_{i'}$: インペラーの片側表面
S_d	: ダクト内面
T	: インペラー推力
Q	: インペラートルク
a	: ダクト表面に対応する n 座標
a'	: インペラー前方のダクト半径

参 考 文 献

- 1) 坂尾稔: 島根大学教育学部紀要(自然科学編), 第2巻-第2号, 昭和63年12月
- 2) A. GRAY, G. B. MATHEW: A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics, Macmillan and Co. Limited, 1922
- 3) 花岡達郎: Proceedings of the 11th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1961

付 録

外部境界面が軸対称の固定面である領域内のグリーン関数の連続の条件式は円柱座標系 (x, r, θ) に対して本文(2)式で表される。子午面上の座標系 (x, r) を直交曲線座標系 (m, n) に変換するときは本文(2)式は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial m^2} + \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial^2 G_2}{\partial n^2} + \frac{1}{h_1 h_2 r^2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial \theta^2} \\ & + \frac{\partial G_2}{\partial m} \left\{ \frac{\sin \varphi}{r h_2} + \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \right\} \\ & + \frac{\partial G_2}{\partial n} \left\{ \frac{\cos \varphi}{r h_1} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1 a)$$

ただし

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial m} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial m} \right)^2 \\ \frac{1}{h_2^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{\partial m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial r} \right)^2 \\ h_2^2 &= \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 \end{aligned}$$

直交曲線座標 (m, n) を以下共役座標にとるものとするば, m, n は次のコーシー・リーマンの関係を満たす。

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial r}, \quad \frac{\partial m}{\partial r} = -\frac{\partial n}{\partial x} \quad (2 a)$$

(1 a), (2 a) より共役座標の場合には $h_1 = h_2$ となる。また次の関係が成立する。

$$\Delta x = \Delta r = 0 \quad (3 a)$$

$grad x, grad r$ は h_1, φ で表されるからこの関係と (3 a) より次式を得る。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial n}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial m} \quad (4 a)$$

さて共役座標を用いれば $h_1 = h_2$ であるから (1 a) は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 G_2}{\partial m^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial n^2} + \frac{1}{(r h_1)^2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial \theta^2} \\ & + \frac{\sin \varphi}{r h_1} \frac{\partial G_2}{\partial m} + \frac{\cos \varphi}{r h_1} \frac{\partial G_2}{\partial n} = 0 \end{aligned} \quad (5 a)$$

しかるに

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} (r h_1) &= h_1 \frac{\partial r}{\partial m} + r \frac{\partial h_1}{\partial m} \\ \frac{\partial}{\partial n} (r h_1) &= h_1 \frac{\partial r}{\partial n} + r \frac{\partial h_1}{\partial n} \end{aligned}$$

上式と (4 a) より次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial (r h_1)}{\partial n} - r h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial m} &= \cos \varphi \\ \frac{\partial (r h_1)}{\partial m} + r h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \sin \varphi \end{aligned} \quad (6 a)$$

(6 a) より $r h_1$ を求めると $r = 0$ で $n = 0$ の条件より次式を得る。

$$\begin{aligned} r h_1 &= \exp \left(\int_0^n \frac{\partial \varphi}{\partial m} dn \right) \int_0^n \cos \varphi \\ & \times \exp \left(- \int_0^n \frac{\partial \varphi}{\partial m} dn \right) dn \end{aligned} \quad (7 a)$$

φ が小として $r h_1$ の第一近似を求めれば上式より次式を得る。

$$r h_1 \doteq \int_0^n dn = n \quad (8 a)$$

したがって φ が小さいときは, (5 a) は次式で近似される。

$$\frac{\partial^2 G_2}{\partial m^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial n^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 G_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{n} \frac{\partial G_2}{\partial n} = 0 \quad (9 a)$$

いまダクト境界面を外部境界とする二次元領域内のポテンシャル流れの速度ポテンシャルを Φ , 流れの関数を ψ で表すと次式が成立する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10 a)$$

したがって

$$m = \Phi(x, r), \quad n = \psi(x, r) \quad (11 a)$$

にとればかかる (m, n) は共役座標となる。またダクト面上では $\psi = n = \text{一定}$ である。

例えば本文第四章のインペラー部を例にとり, そのダクト内の共役座標について考える。ダクト面はインペラー前方では半径 a' の円柱面である。かかるダクト内の二次元非回転流れの中で最も簡単な流れは, 無限上流で断面上で一様にして x 方向流速成分のみを有する二次元流れであろう。かかる流れを用いれば共役座標系を比較的簡単に求めることが可能である。