島根大学教育学部紀要（自然科学）第22巻一第2号39～50頁　昭和63年12月

水中翼船用ウォータージェット推進装置のまわりの流れの解析（第一報：解析法の基礎的考察）

坂　尾　　稔*

Mimoru SAKAO

On the Analysis of the Flow Around a Waterjet Propulsion System of Hydrofoil Craft (1st Report: Basic study on the Flow Analysis)

1　ま　え　が　き

ウォータージェット推進装置（以下WJと略記する）は船底突出物が少ない。高速艇の場合は船底突出物による付加抵抗が全抵抗のかなりの部分を占めるのでWJは本来高速艇に適した推進装置であり高速船に多く用いられている。WJはこの他にキャビテーション等による水中騒音の発生が少ないとか，操船が容易である等の利点を持っているが，反面推進効率がダクト内のエネルギーロス等により通常プロペラに較べて小であり，またコストが高く保守が困難である等の欠点も持っている。[1)]

さてWJの抵抗とか推進効率の向上をはかるには，そのまわりの流れについての知見を高めることが必要であるがWJのまわりの流れ全体を統一的に検討した研究は見当たらない。このような観点から本論はまず水中翼船用のWJを取り上げてそのまわりの流れ全体の解析法について基礎的な検討を行なったものである。なお本論で特に水中翼船用WJを取り上げたのは次の理由による。他の形式のWJの場合には主船体とWJのまわりの流れが互いに干渉して流れの解析が複雑になるとともに，WJの性能のみを分離して論ずることが無理になる。これに対して水中翼船用WJの場合は両者の干渉が比較的に少なく両者のまわりの流れを切り離して夫々を独立に解析しても差し支えがなく流れの解析が簡単となるためである。

本論の流れの三次元解析においてはダクト内外の流れを，インペラの渦部以外は非回転流れで近似した場合について，流れの一般的表示式を説明するにとどめた。この流れの表示式はいくつかの未知量を含んだ形で示されており，この未知量は境界条件を満たすように定めねばならぬが未知量の決定法の具体的検討は行なっていない。また本論の解析では計算を簡単にするためWJのまわりの流れに対して次のモデル化を行なった。

1) 流体は完全流体とする。

2) インペラ翼数は無限大とする。またインペラ束縛渦の大きさは半径方向，周方向ともに一定として自由渦は翼先端と軸中心のみから流出する。また翼先端自由渦のピッチは一定とする。

3) インペラ後方にはステーターはないものとする。

なお本論で使用した主な記号の説明は末尾にまとめて示す。

2　ダクト内の流れを運動量理論的に近似した場合のWJのまわりの流れの解析

本章ではダクト内の流れはダクト中心線に平行な一次元流れと仮定する。ダクトの各断面上では流速は一定と考える。実際のWJの流れはダクト内はインペラに起因する束縛渦とか自由渦が存在するのでダクト内の流れもこのような一次元流れとはならないがこれらの渦にもとづく三次元流れについては次章で取り扱うことにする。このように一次元流れにより近似すると計算が三次元流れを取り扱う場合に較べてはるかに簡単になり，しかもこのようなダクト内の流れを持つWJは実際のWJの性能の上限を与えるものであるので，その特性が明らかになればWJ特性を概略的に把握したり，他の推進装置と性能の比較を行なう場合に役に立つと思われる。

さて本章ではインペラーを圧力差のみを与えるアクチェー

*　島根大学教育学部技術科研究室

ター・ディスクで置き換える。またダクト各断面の流れを中心線上の流れで代表させる。WJ は流速 u_0の一様流れの中に静止しているものとする。また本章では図1に示す記号を用いる。ただし Pは圧力を，uは流速を，hは水面から軸心までの距離を，Aは断面積を表す。P_aは大気圧である。まずダクト内の一次元流れとかダクトの内部流れによる推力について検討する。単位質量の流体粒子の全エネルギーを Hとすれば次式が成立する。

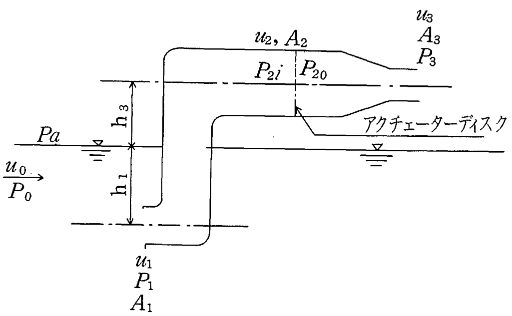

図 1

$$H=p+\frac{\rho}{2}u^2+\rho gz \tag{1}$$

同一流線上の粒子に対してはベルヌーイの定理から次式が成立する。

$$H_0=H_1=H_{2i} \tag{2}$$
$$H_{20}=H_3$$

また連続の条件から

$$A_1u_1=A_2u_2=A_3u_3=\frac{Q}{\rho} \tag{3}$$

ただし　Q：ダクト内流量

H_0は具体的には次のようになる。

$$H_0=P_0+\frac{\rho}{2}u_0^2-\rho gh_0$$

しかるに $P_0=P_a+\rho gh_0$であるから

$$H_0=P_a+\frac{\rho}{2}u_0^2 \tag{4}$$

したがって(2)，(3)，(4)より次の関係が成立する。

$$H_0=P_a+\frac{\rho}{2}u_0^2=H_1=P_{2i}+\frac{\rho}{2}u_2^2+\rho gh_3 \tag{5}$$

$$P_{20}+\frac{\rho}{2}u_2^2+\rho gh_3=P_a+\frac{\rho}{2}u_3^2+\rho gh_3$$

またアクチェーター・ディスクの駆動動力を Lとすれば Lは次式で示される。

$$L=\frac{Q}{\rho}(P_{20}-P_{2i})=\frac{Q}{\rho}\Delta P \tag{6}$$

ただし　$\Delta P=P_{20}-P_{2i}$

(5)，(6)より次式を得る。

$$P_a+\frac{\rho}{2}u_0^2=P_{20}+\frac{\rho}{2}u_2^2+\rho gh_3-(P_{20}-P_{2i})$$
$$=P_a+\frac{\rho}{2}u_3^2+\rho gh_3-\Delta P \tag{7}$$

(6)と　$u_3=\frac{Q}{\rho A_3}$　の関係を用いると(7)は次式となる。

$$\frac{\rho}{2A_3^2}\left(\frac{Q}{\rho}\right)^3+\rho\left(gh_3-\frac{1}{2}u_0^2\right)\frac{Q}{\rho}-L=0 \tag{8}$$

Lが与えられればそのときの流量 Qは(8)で定まることが分かる。また Qには h_0，h_1は含まれないことが分かる。Qが求まれば(3)よりダクト内各部の流速が定まる。ダクト内の圧力は(2)より求まる。

次に WJ の全推力はダクト内外面の水圧から発生するが，まずダクト内面の圧力による推力成分について検討する。ダクト内の流れにより定まる推力はアクチェーター・ディスクの発生する推力とダクト内面の水圧により発生する推力からなる。これらを夫々に T_p，T_aで表す。さてダクト内及びダクト外部の水面下の流体全領域 Vの全流体粒子の x方向の運動量の時間的変化率は定常流れの場合は次式で示される。

$$\frac{D}{Dt}\int_V\rho u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_V\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\times\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_S\rho u(lu+mv+nw)\,\mathrm{d}s \tag{9}$$

ただし，l，m，n：Sの外向き法線の方向余弦
（図2を参照のこと）

また次の関係あり。

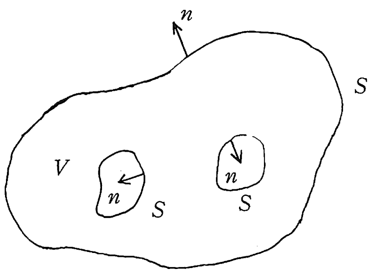

図 2

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{10}$$

(9)，(10)より次式を得る。

$$\int_S u(lu+mv+nw)\,\mathrm{d}S=-\frac{1}{\rho}\int_S lP\,\mathrm{d}S \tag{11}$$

(11)を便宜上ダクト内外部領域に分けて適用する。両域は図3に示すように a面で区分される。また Vのダクト内部，外部領域の境界の法線は図3に示すとおりである。

また V の境界 S を便宜上図3に示すように $S=S_f+S_i^1+S_i^2+S_u+S_i^1+S_i^2$ に分けて考える。さて(11)をダクト内部に適用すると次式を得る。

$$-A_1u_1^2+A_3u_3^2=-\frac{1}{\rho}\left\{-A_1P_1+A_3P_3+(P_{2i}-P_{20})A_2+\int_{S_i^2+S_u} lPdS\right\} \tag{12}$$

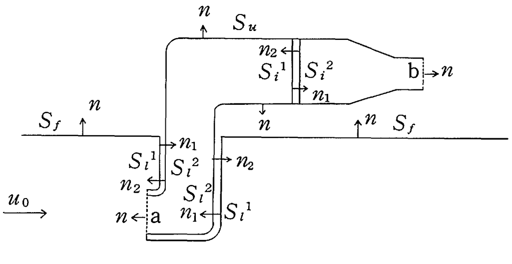

図　3

(12)より次式を得る。

$$T_p+T_d=Q(u_3-u_1)+(A_3P_3-A_1P_1) \tag{13}$$

しかるに

$$P_1=P_a+\frac{1}{2}\rho u_0^2+\rho gh_1-\frac{\rho}{2}\left(\frac{Q}{\rho A_1}\right)^2$$

であるから(13)は次式となる。

$$T_p+T_d=\frac{Q^2}{\rho}\left(\frac{1}{A_3}-\frac{1}{2A_1}\right)-A_1\left(\frac{1}{2}\rho u_0^2+\rho gh_1\right)+P_a(A_3-A_1) \tag{14}$$

しかるに $P_a\neq 0$ とすればWJはダクト外面上の圧力 P_a によっても推力を受ける。また後述の水面下の S_i^1 の圧力からも P_a に関連した推力成分が発生する。これらを合わせて考えると(14)の右辺第三項は打消されてくる。したがって以下では(14)の第三項は省略する。すなわち次式で考えることにする。

$$T_p+T_d=\frac{Q^2}{\rho}\left(\frac{1}{A_3}-\frac{1}{2A_1}\right)-A_1\left(\frac{1}{2}\rho u_0^2+\rho gh_1\right) \tag{15}$$

上式によればダクト内部の流体から発生する推力は流量 Q の関数である。しかるに前述のように Q は L が与えられれば定まるから (T_p+T_d) も L が与えられれば定まることになる。

次にダクトの外部領域の流れとかダクトに作用する推力について考察する。この部分の流れは無限上流で流速が u_0 で S_f 上で自由表面条件を満たし，S_i^1 面でこの面に垂直方向の流速成分が0であり a 面でこれに垂直方向の流速成分が u_1 であり，しかもこの領域内でいたるところ調和な流れである。このような条件を満たす外部の流れは例えば次のようにして求めることができる。まず S_i^1 面と a 面上に適当な強さ σ の吹出しを分布させる。次に水面下のダクト外部におかれた単位強さの吹出しによる流れとして，ダクト外部で調和で S_f で自由表面条件を満たす次のグリーン関数 G を速度ポテンシャルとして持つ流れを採用する。

$$G(x,\ y,\ z)=\frac{1}{r}+G'(x,\ y,\ z) \tag{16}$$

ただし G' は水面下で調和にして $\frac{1}{r}$ と合せて G が次の自由表面条件を満たすような関数である。

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+K_0\frac{\partial G}{\partial z}=0 \qquad or \qquad S_f \tag{17}$$

ただし　$K_0=\dfrac{g}{u_0^2}$

$G(x.y.z)$ は具体的には次式のような関数である。[2)]

$$\begin{aligned} G&(x,y,z\ ;\ x',y',z')\\ &=\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}-\frac{2K_0}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\theta\,d\theta\\ &\times\int_0^\infty\frac{exp[k(z+z')\cos\{k(x-x')\cos\theta\}]}{k-K_0\sec^2\theta}\\ &\times\cos\{k(y-y')\sin\theta\}\,dk\\ &+2K_0\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{K_0(z+z')\sec^2\theta}\sin\{K_0(x-x')\sec\theta\}\\ &\times\cos\{K_0(y-y')\sec^2\theta\sin\theta\}\sec^2\theta\,d\theta \end{aligned} \tag{18}$$

ただし $r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$

$r'^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2$

単位吹出しによる流れのポテンシャルとしてこのような G を用いるときはダクト外部の流れの速度ポテンシャルは次式で表される。

$$\phi(x,y,z)=-\int_{S_i^1+a}\sigma(\xi,\eta,\zeta)G(x,y,z;x',y',z')\,dS \tag{19}$$

上式で吹出しの強さ σ は未知量でありこれは S_i^1 と a 面における境界条件を満たすよう定められる。勿論(19)は S_f 上の自由表面条件を自動的に満たしている。このような方法によりダクト外部のポテンシャル流れを形式的に求めることができるが吹出し分布 σ を具体的に定めるに当たっては(18)の G の関数の複雑さからも想像されるように面倒な数値計算が必要となる。この他に上述の方法は次のような問題を内在している。(19)で示されるポテンシャル流れは S_i^1 面と a 面上の条件と S_f 上の自由表面条件を一応満たしダクト外部で非回転な流れとなっている。しかし(19)の流れは a 面についてみると a 面に垂直方向の流速成分

は u_1となっているが a面の接線方向の流速成分は一般的には 0 ではない。一方ダクト内部の流れは一次元流れとみなしダクト中心線方向の流速成分のみを有するとして近似している。したがって(19)の流れとダクト内部の流れは a面で不連続な流れとなっている。実際の流れは勿論 a面で連続であるから，(19)の流れは実際といささか違っていることになる。このことから全領域 Vを二つの領域に分けて，まず内部流れを一次元流れで近似して外部流れに無関係に定め，このように定められた内部流れの情報を用いて外部流れを上述のように定める方法は本来厳密にいえば無理な点が存在することが分かる。ただ a面における流速の不連続量については検討が必要であるり，実用上はそれ程問題にはならないのかもしれない。次に水中翼船には高速船が多い。 u_0が大きくて K_0が小さくなるような場合には(18)の Gの第三項は相対的に小となり省略できて(18)は次式で近似できる。

$$G\ (x, y, z: x', y', z') \fallingdotseq \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \tag{20}$$

(20)で示される速度ポテンシャル Gは吹出しによる速度ポテンシャルと，この吹出しによるポテンシャルの S_fに対する逆鏡像ポテンシャルの和となっている。したがってこのような高速の場合は， S_l^1， a面上に分布させる吹出し分布σを， S_l^1， a面上のσの吹出し分布による速度ポテンシャルとこれの逆鏡像ポテンシャルの和で表される流れが S_l^1， a面上の境界条件をみたすように定めればよいことになる。勿論具体的にσを定めるためにはこの場合でもかなり面倒な数値計算が必要となるが， Gとして(18)を用いる場合に較べると数値計算量は大幅に減少する。

さてダクト外部のポテンシャル流れは以上のような方法で近似的ではあるが一応計算することができる。このような外部流れは WJ の性能に対しては S_l^1面の水圧にもとづく抵抗の形で影響を持つ。この抵抗はここではポテンシャル流れによるものであるから造波抵抗であり外部領域に対して(11)を適用して計算することができる。これを Rで示すと WJ の全推力 Tは次式で表される。

$$T = T_p + T_d - R \tag{21}$$

K_0が小さいときは前述のように Gは(20)で近似できるがこの場合には WJ の無限後方には波が残らないので $R=0$となる。すなわち $K_0 \to 0$ の場合は(21)は次式となる。

$$T \fallingdotseq T_p + T_d \tag{22}$$

したがってこの場合には WJ の性能はダクト内部の流れのみを対象にすればよくなり非常に考えやすい。実際には Rは造波抵抗のみでなく水の粘性にもとづく抵抗が付加される。外部流れによる粘性抵抗については解析的検討は非常に複雑となるので実験的アプローチの方が実際的である。ただこの場合でもダクト外部の粘性流れをポテンシャル流れで近似して求めこの結果をベースとして粘性抵抗を実際的に検討する方法は有効と思われる。

次に u_0が大きくて造波抵抗が無視できるような場合に対して，以上の所論の結果をもとにして WJ の性能についてもう少し具体的に検討する。次の無次元量を導入する。

$$C_T = \frac{T}{\frac{\rho}{2} A_1 u_0^2}, \quad C_L = \frac{L}{\frac{\rho}{2} A_1 u_0^3} \tag{23}$$

$$C_p = \frac{\Delta P}{\frac{\rho}{2} u_0^2}, \quad C_{h1} = \frac{\rho g h_1}{\frac{1}{2} \rho u_0^2}$$

$$C_{h3} = \frac{\rho g h_3}{\frac{1}{2} \rho u_0^2}, \quad q = \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2, \quad \frac{A_1}{A_3} = \alpha$$

しからば(6)より次式を得る。

$$C_L = \sqrt{q} \cdot \Delta P \tag{24}$$

また(15)，(8)より次式を得る。

$$C_T = 2q\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) - \left(1 + C_{h1}\right) \tag{25}$$

$$C_L = \sqrt{q}\,(q\alpha^2 + C_{h3} - 1) \tag{26}$$

ダクト形状と C_Lが与えられれば上式から qすなわち Qが定まることになるがこれは前述のとおりである。(25)，(26)を用いて以下に WJ の性能面での最適化問題について考えてみる。 WJ の設計における性能上の最適化問題は普通 u_0， A_1， h_1， h_3を与えて Lを最小とする問題に帰着される。言いかえればこの問題は C_Tを与えて C_Lが最小となるα， qを求める問題である。したがって(25)，(26)を用いればこの問題は解析的に解くことができる。ただ解析的に解を求めるにしても解くべき方程式が複雑となるので最後には数値計算によらねばならぬ。むしろ初めから例えば次のように図式解を求める方が実用的と思われる。すなわち(25)から qをパラメーターとして各 qに対してαを求める。この q，αの各組合せに対して(26)で C_Lを計算してこの C_Lを qをベースとしてプロットすればグラフ上で C_Lが最小となる qを，さらにαを求めることができる。次に WJ の効率の表示式について述べる。 Tは(15)で与えられる。これを更に変形すると次式となる。

$$T = Q\left\{(u_3 - u_1) + \frac{1}{2u_1} \times (u_1^2 - u_0^2 - 2gh_1)\right\} \tag{27}$$

いま

$$u_3 - u_0 \equiv \Delta u \tag{28}$$

とおく。 $A_3 u_3 = A_1 u_1$であるから，これと(28)より次式

を得る。

$$u_1=\frac{1}{\alpha}\left(u_0+\Delta u\right) \tag{29}$$

したがって

$$u_1-u_0=\frac{1}{\alpha}\Delta u+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)u_0 \tag{30}$$

$$u_3-u_1=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(u_0+\Delta u\right) \tag{31}$$

したがって(27)，(29)，(30)，(31)より次式を得る。

$$T=Q\left\{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(u_0+\Delta u\right)+\frac{1}{2u_1}\times\left(u_1^2-u_0^2-2gh_1\right)\right\} \tag{32}$$

したがって

$$C_{\mathrm{T}}=\frac{Tu_1}{\frac{1}{2}Qu_0^2}=\frac{\left(1-\frac{1}{2\alpha}\right)\frac{1}{\alpha}\left(u_0+\Delta u\right)^2-\frac{1}{2}u_0^2-gh_1}{\frac{1}{2}u_0^2} \tag{33}$$

これから Δu を求めると次式を得る。

$$\Delta u=\left\{\sqrt{\frac{1+C_{\mathrm{T}}+C_{h1}}{\frac{1}{\alpha}\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)}}-1\right\}u_0 \tag{34}$$

たとえば　$\alpha=1$，$C_{h1}=0$ の場合は次のようになる。

$$\Delta u=\left(\sqrt{1+C_{\mathrm{T}}}-1\right)u_0 \tag{35}$$

WJ の効率 η は次式で与えられる。

$$\eta=\frac{Tu_0}{L}=\frac{C_{\mathrm{T}}}{C_{\mathrm{L}}} \tag{36}$$

(25)，(26)を用いると η として次式を得る。

$$\eta=\frac{2q\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)-\left(1+C_{h1}\right)}{\sqrt{q}\left(\alpha^2q+C_{h3}-1\right)} \tag{37}$$

しかるに(29)を用いると

$$\sqrt{q}=\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right)\frac{1}{\alpha} \tag{38}$$

(37)，(38)より η を Δu の関数として次のように表すことができる。

$$\eta=\frac{\left(2\alpha-1\right)\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right)^2-\alpha^2\left(1+C_{h1}\right)}{\alpha\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right)\left\{\left(1+\frac{\Delta u}{u_0}\right)^2+C_{h3}-1\right\}} \tag{39}$$

さらに(35)を用いれば η を C_{T} の関数として次のように表すことができる。

$$\eta=\frac{C_{\mathrm{T}}}{\sqrt{\frac{1+C_{\mathrm{T}}+C_{h1}}{2\alpha-1}}\left(\frac{1+C_{\mathrm{T}}+C_l h_1}{2\alpha-1}\alpha^2+C_{h3}-1\right)} \tag{40}$$

たとえば　$\alpha=1$，$C_{h1}=C_{h3}=0$ の場合には η は次式となる。

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{1+C_{\mathrm{T}}}} \tag{41}$$

いずれにしても η は Δu あるいは C_{T} が大きくなると減少する。

3　WJ のまわりの流れの三次元解析

第二章ではダクト内の流れを一次元流れで近似した場合のWJのまわりの流れとか，推力，効率等について解析的に検討を行った。実際のダクト内の流れではインペラーの存在のために渦が存在するので三次元的な流れとなり第二章で示した流れとは異なってくる。このため WJ の性能も第二章で示したものに較べて低下する。本章ではインペラーの存在に伴う渦について第一章で述べたモデル化を行ったかなり実際に近い流れをベースとして WJ のまわりの三次元流れの解析法について検討する。

さて WJ のまわりの流れは渦の部分を除くとポテンシャル流れと考えてよい。このような非回転流れを解析的に表すには，この非回転流れの領域内の速度ポテンシャルをこの領域を囲む境界面上の速度ポテンシャルの値を用いて表す関係式から出発する方法が普通に用いられている。勿論直感的に境界面上あるいは境界の外部に適当に吹出し，二重吹出し，渦等の特異点を分布させて，これらの特異点の強さを非回転流れ域を囲む境界面上の流れの条件により定めることができればそれでもよいのであるが，特異点の種類，強さ，分布位置等の選び方の自由度が大きすぎると数値計算の簡単化のさまたげになる。これに対して境界面内の速度ポテンシャルを境界面上の速度ポテンシャルの値を用いて表すような一般的な関係式を用いるときは特異点選定の自由度を制限することになり数値計算の簡単化をはかるのに役立つと思う。境界面上の速度ポテンシャルの値により領域内の速度ポテンシャルを表す方法にも色々の方法があるが本章では最も一般的に用いられるグリーンの公式から出発して WJ のまわりの流れを表す方法について検討する。インペラーの渦に関して第一章に示したモデル化を行う場合には WJ のまわりの非回転流れ領域 V は図 4 に示すようになり，これを囲む境界面は自由表面 S_f，水面下のダクト外面 S_l^1，水面下ダクト内面 S_l^2，水面上インペラーまでのダクト表面 S_u^1，インペラーからノズル出口までの翼先端自由渦の内面 S_u^2，ノズル出口から無限後方までの翼先端自由渦の内面 S_u^3，インペラーの束縛渦を囲む S_i^1，S_i^2面，軸中心自由渦を囲む面 S_c，V 領域を単連結領域にするために付加されたスリット面 $\boldsymbol{\Sigma}_1$，$\boldsymbol{\Sigma}_2$ から構成される。座標系も図 4 に示す。$\boldsymbol{\Sigma}$面は図 5 に示すがこれがない場合は V

は二重連結領域であるのでグリーンの公式をそのまま V に対して適用することができない。インペラー面から無限後方まで延びているスリット$\boldsymbol{\Sigma}$を入れることにより Vは単連結領域となり Vに対してグリーンの公式を適用することが可能となる。なおこれらの境界面の法線 nは図4に示すように Vの外側に向くものとする。また Vは無限遠を含む領域でありこのような Vに対してグリーンの公式が成立するためには速度ポテンシャルは無限遠で0でなく

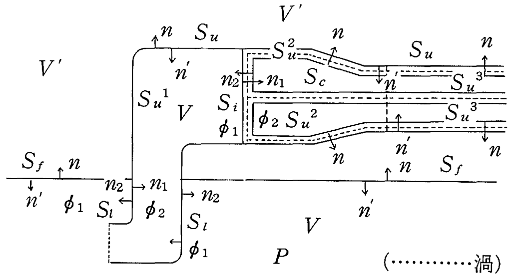

図 4

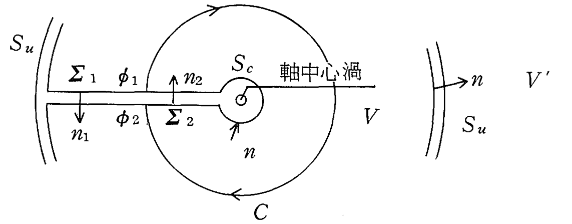

図 5

てはならぬ。しかるに V内の実際の流れの速度ポテンシャルは無限上流で$\phi=u_0x$であり0でない。それでグリーンの公式を適用する非回転流れの速度ポテンシャルϕとして，以下においては実際の速度ポテンシャルから u_0xを除外した速度ポテンシャルをとることにする。さて V内の点 Pの速度ポテンシャルは Vに対してグリーンの公式を適用すると次式で表される。

$$\phi(P)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dS \quad \text{for} \quad P\subset V \tag{42}$$

ただし

$$S=S_f+S_l^1+S_l^2+S_u^1+S_u^2+S_u^3+S_i^1+S_i^2+S_c+\Sigma^1+\Sigma^2$$

S_l^1, S_l^2, S_i^1, S_i^2, S_c, Σ^1, Σ^2の積分の部分を更に展開する。

まず S_l^1, S_l^2の部分は次のようになる。

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_l^1}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial n_1}\frac{1}{r}-\phi_1\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{1}{r}\right)dS+\frac{1}{4\pi}\int_{S_l^2}\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial n_2}\frac{1}{r}-\phi_2\frac{\partial}{\partial n_2}\frac{1}{r}\right)dS \tag{43}$$

しかるに S_l上では次の関係がある。

$$(u_0)_{n1}+\frac{\partial\phi_1}{\partial n_1}=0, \quad (u_0)_{n2}+\frac{\partial\phi_2}{\partial n_2}=0$$

ただし，$(u_0)_n$：u_0の n方向成分

しかるに

$$(u_0)_{n2}=-(u_0)_{n1}$$

したがって

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\phi_2}{\partial n_2}=0 \qquad \text{on} \quad S_l$$

また S_l上では次の関係がある。

$$\frac{\partial}{\partial n_2}=-\frac{\partial}{\partial n_1} \qquad \text{on} \quad S_l$$

これらの関係を用いると(43)は次式となる。

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_l^1+S_l^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\int_{S_l^1}(\phi_2-\phi_1)\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{1}{r}dS \tag{44}$$

S_i^1, S_i^2上の積分についても同様に考えることができる。次の関係が成立する。

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\phi_2}{\partial n_2}=0, \quad \frac{\partial}{\partial n_2}=-\frac{\partial}{\partial n_1} \qquad \text{on} \quad Si$$

したがって次式が成立する。

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_i^1+S_i^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\int_{S_i^1}(\phi_2-\phi_1)\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{1}{r}dS \tag{45}$$

$\boldsymbol{\Sigma}^1$, $\boldsymbol{\Sigma}^2$上の積分についても同様であり，次式が成立する。

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma^1+\Sigma^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dS=\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma^1}(\phi_2-\phi_1)\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{1}{r}dS \tag{46}$$

次に S_c上の積分については次のようになる。ここで使用する記号については図6に示してある。

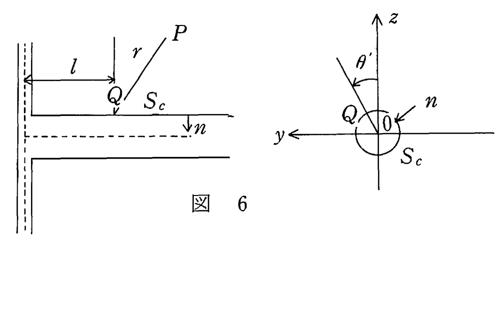

図 6

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_c}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S=\frac{\delta}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta'$$

$$\times\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}l \quad (47)$$

lが大きくなるにつれてS_cまわりの流れは周方向の流れが主流となり流速の法線成分は小となる。したがって適当に大きい長さ l_0をとると $l>l_0$では $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$ on S_cと考えてよい。したがって(47)右辺第一項は次式となる。

$$\frac{\delta}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta'\int_0^{\infty}\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{r}\mathrm{d}l$$

$$=\frac{\delta}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta'\int_0^{l_0}\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{r}\mathrm{d}l$$

しかるに上式の右辺の二重積分の値は有限であるからδを0に近づけると上式は0となる。次にS_c上のϕは有限であるのでこれをϕ_0で表す。また $\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}=0\left(\frac{1}{r^2}\right)$ である。

したがって(47)の右辺第二項は次のようになる。

$$-\frac{\delta}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta'\int_0^{\infty}\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\mathrm{d}l$$

$$=\frac{\delta\phi_0}{2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}l}{(x-l)^2+y^2+z^2}$$

しかるに上式右辺の定積分は有限であるからδを0にするときは上式は0となる。したがって(47)式の値は0となる。したがって(42)は次式となる。

$$\phi(P)=\frac{1}{4\pi}\int_{S_f+S_u^1+S_u^2+S_u^3}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\frac{1}{r}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S \quad (48)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{S_l^1+S_i^1+\Sigma^1}(\phi_2-\phi_1)\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{1}{r}\mathrm{d}S,\quad \text{for } P\subset V$$

次に図4においてVの外側の領域をV'とする。V'を囲む境界面は自由表面S_f，ダクト面とノズル後方のインペラ翼先端自由渦の外面を含むS_uより成る。このV'内においても非回転流れの存在を仮定しV'内の流れの速度ポテンシャルを（$\phi'+u_0x$）とする。ϕ'に対してグリーンの公式を適用すると次式を得る。

$$0=\frac{1}{4\pi}\int_{S_f+S_u}\left(\frac{\partial\phi'}{\partial n}\frac{1}{r}-\phi'\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S,\quad \text{for } P\subset V \quad (49)$$

(48)，(49)より次式をうる。

$$\phi(P)=\frac{1}{4\pi}\int_{S_f+S_u}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}-\frac{\partial\phi'}{\partial n}\right)\frac{1}{r}\right.$$

$$\left.-\left(\phi-\phi'\right)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right\}\mathrm{d}S$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{S_l^1+S_i^1+\Sigma^1}(\phi_2-\phi_1)\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{1}{r}\mathrm{d}S,\quad \text{for } P\subset V \quad (50)$$

しかるにS_u上では，ϕは（$(u_0)_n+\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$ となるように定められる。それでϕ'もS_u上で（$(u_0)_n+\frac{\partial\phi'}{\partial n}=0$ を満たすように定めることにする。しからば，S_u上では $\frac{\partial\phi}{\partial n}-\frac{\partial\phi'}{\partial n}=0$ となる。また自由表面S_f上でϕは次の自由表面条件を満たすように定められる。

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+K_0\frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \quad \text{on} \quad S_f \quad (51)$$

それでϕ'についてもS_f上で上式と同じ次の条件でこれを定めるものとする。

$$\frac{\partial^2\phi'}{\partial x^2}+K_0\frac{\partial\phi'}{\partial n}=0 \quad \text{on} \quad S_f \quad (52)$$

すなはちϕ'はV'内でS_u面とS_f面の上のような条件を満たすように定められる速度ポテンシャルとする。このようなϕ'を用いるときは(50)は次式となる。

$$\phi(P)=\frac{1}{4\pi}\int_{S_u}(\phi'-\phi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\mathrm{d}S \quad (53)$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{S_f}\left\{\frac{1}{K_0}\left(\frac{\partial^2\phi'}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)\frac{1}{r}+\left(\phi'-\phi\right)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right\}\mathrm{d}S$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{S_l^1+S_i^1+\Sigma^1}\left(\phi_2-\phi_1\right)\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{1}{r}\mathrm{d}S$$

(53)によればV内の速度ポテンシャルはS_f,S_u,S_l^1,S_i^1，Σ^1面上に分布する夫々の面に垂直方向の二重吹出し分布とS_f面上に分布する吹出し分布により誘起される速度ポテンシャルの和として表されることになる。しかるに一般に面Sに分布するSに垂直方向の二重吹出し分布μによる誘導速度Vは次式で表すこともできる。[3)]

$$V=rot\,\boldsymbol{\Psi} \quad (54)$$

ただし$\boldsymbol{\Psi}$はベクトル・ポテンシャルにしてそのx，y，z軸方向の成分（ψ_1，ψ_2，ψ_3）は次式で与えられる。

$$\psi_1=\frac{1}{4\pi}\left\{\int_S\frac{\lambda_1}{r}\mathrm{d}S-\int_C\frac{\mu}{r}\mathrm{d}x'\right\} \quad (55)$$

$$\psi_2=\frac{1}{4\pi}\left\{\int_S\frac{\lambda_2}{r}\mathrm{d}S-\int_C\frac{\mu}{r}\mathrm{d}y'\right\}$$

$$\psi_3=\frac{1}{4\pi}\left\{\int_S\frac{\lambda_3}{r}\mathrm{d}S-\int_C\frac{\mu}{r}\mathrm{d}z'\right\}$$

ただし(55)におけるCはSを囲む境界線であり，上式第二項の線積分は面Sの法線nを常に左手に見るような向きにCに沿った積分を表している。また(55)に含まれるλ_1，λ_2，λ_3はμが与えられれば次式で計算される渦ベクトル$\boldsymbol{\lambda}$の成分であり$\boldsymbol{\lambda}$は面Sに接する。

$$\lambda_1=\beta_1\frac{\partial\mu}{\partial S_\alpha}-\alpha_1\frac{\partial\mu}{\partial S_\beta}$$
$$\lambda_2=\beta_2\frac{\partial\mu}{\partial S_\alpha}-\alpha_2\frac{\partial\mu}{\partial S_\beta} \quad (56)$$
$$\lambda_3=\beta_3\frac{\partial\mu}{\partial S_\alpha}-\alpha_3\frac{\partial\mu}{\partial S_\beta}$$

ただし(56)のα，β等は次のようなものである。S面上の直交曲線座標系を（α，β）とする。またα軸，β軸に沿う弧長要素をdS_α，dS_βとする。また（α_1，α_2，α_3）はα軸の方向余弦であり，（β_1，β_2，β_3）はβ軸の方向余弦である。(54)，(55)から明らかなようにS上の二重吹出し分布μによる誘導速度は，S面上に分布する渦による誘導速度と，C上の線積分で表されるベクトル・ポテンシャルの rot をとることにより定まる流速の和として表すことができる。S面上に分布する渦ベクトルはμを用いて(56)で計算される。曲面Sが閉曲面の場合は(55)におけるC上の線積分の項は消滅する。以上の点から閉曲面S上に分布する二重吹出し分布による誘導速度はS面上の対応する渦分布による誘導速度に等しいことが分かる。なお渦分布による誘導速度は上述のように渦を用いたベクトル・ポテンシャルの rot をとることにより計算されるが，ビオーサバールの法則を用いて直接計算することもできる。以上の点から分布面に垂直方向の二重吹出し分布と同じ面上の渦分布は誘導速度のレベルで考えるときは互換性があることが分かる。この性質を用いて(53)で表される流れの表示法について更に検討する。(53)では速度ポテンシャルはいくつかの境界面上の積分項の和として表されているので，各項による誘導速度を(55)により対応する渦分布と関連づけて考えるためには夫々の面上の対応渦分布による誘導速度の他に，(55)にしたがって境界面を囲む境界線上の線積分に関連する誘導速度も合わせて考慮しなければならぬ。しかし(53)がいくつかの部分曲面上の積分項に分けて示されているのは表現の便宜上このようになっているのであり，もともとはVを囲む全境界面が対象である。Vを囲む全境界面は閉曲面であるから本来は境界線は存在しない。全閉曲面をいくつかの部分的境界面に分けて考えても，すべての部分曲面で(55)により対応するベクトル・ポテンシャルを計算するときは境界線上の積分項は互いに打消し合って表には出てこない。ただ，たとえばS_c面においては(53)にしたがって吹出し，二重吹出し分布による速度ポテンシャルを取り扱い，隣接する$\boldsymbol{\Sigma}$面では二重吹出し分布に対応する渦分布の誘導速度を取り扱うような場合には，$\boldsymbol{\Sigma}$面に対しては(55)の第二項の線積分項も合わせて考慮することが必要である。

さてまず(53)の$S_i{}^1$の積分項で表される流れについて検討する。ただこの項については事情がいささか異なる。すなはちS_i面上に分布する渦は，二重吹出し分布（$\phi_2-\phi_1$）から対応する渦を求めるまでもなくすでに明らかである。すなわちS_i面上に分布する渦はインペラーの束縛渦のみであり，インペラー束縛渦については第一章に示

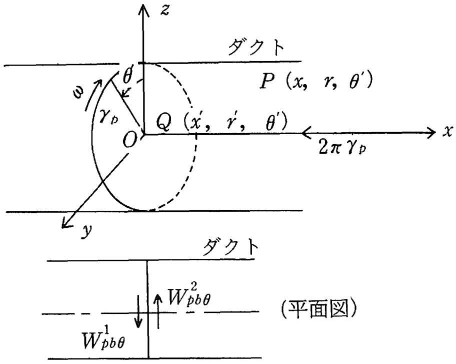

図　7

すようにモデル化されておりその大きさは半径方向にも円周方向にも一定である。したがってこの渦の密度をγ_pで表し，γ_pを既知とすれば，この項に対応する誘導速度はたとえばビオーサバールの法則により計算することができる。したがってこの場合は(53)のS_iの積分項からこれに対応するS_i面の渦分布を求めることを考える必要はなく，しいていえばこの渦分布に対応する二重吹出し分布による速度ポテンシャルの表示式を求めることの方が問題である。それで本論には直接関係はないが以下インペラーの束縛渦分布γ_pに対応するS_i面上の（$\phi_2-\phi_1$）に触れておく。以下図7に示す記号を使用する。またインペラーは図7に示す方向に回転するものとする。S_i以外のVの境界面上の特異点により誘起される速度ポテンシャルはS_i上で連続となるのでS_i上の（$\phi_2-\phi_1$）はインペラー束縛渦による速度ポテンシャルの不連続により発生する。またこの束縛渦の誘導速度のx，r成分は0であるから（$\phi_2-\phi_1$）はθ方向の誘導速度成分に起因すものである。図7に

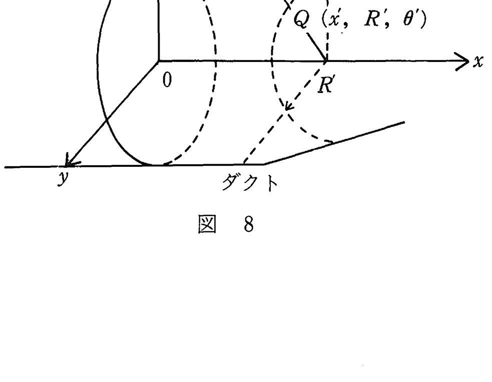

図　8

示すように束縛渦による誘導速度の θ 方向成分を夫々 $W^1_{pb\theta}$，$W^2_{pb\theta}$ とすれば，$W^2_{pb\theta}=-W^1_{pb\theta}$ である。

したがって $\gamma'_{d\theta'}$ の部分のインペラー断面の循環は $2W^1_{pb\theta}\ \gamma'_{d\theta'}$ となる。一方束縛渦の密度はγ_pであるからこの部分の循環は$\gamma_{pd\theta'}$ともかける。したがって，$W^1_{pb\theta}=\dfrac{\gamma_p}{2r'}$となる。これから，$\phi_1=\dfrac{1}{2}\gamma_p\theta'$，$\phi_2=-\dfrac{1}{2}\gamma_p\theta'$となり$S_i$上の（$\phi_2-\phi_1$）として次式を得る。

$$\phi_2-\phi_1=-\gamma_p\theta' \qquad \text{on}\quad S_i \tag{57}$$

したがってインペラー上の束縛渦による誘導速度は(53)より

$$-\frac{\gamma_p}{4\pi}\int_{S_i}\theta'\frac{\partial}{\partial n_1}\ \frac{1}{r}\mathrm{d}S$$

で示される速度ポテンシャルから求まる速度と同じになる。いずれにしても(53)の$S_i{}^1$上の積分項はγ_pが既知であれば未知量を含まない。

次に$S_u{}^2$上の積分項について検討する。この部分ではダクトの半径をR'とすればR'は一般にx'で変化する。すなわち$R'=R'(x')$である。$S_u{}^2$ 上の渦成分を次の直交曲線座標を用いて計算する。以下図８の記号を用いる。α軸をダクト面の母線にとり，β軸をダクト面の円周方向にとることにする。しからば次の関係が成立する。

$$\mathrm{d}S_\alpha=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}\right)^2}\mathrm{d}x'$$

$$\mathrm{d}S_\beta=R'\mathrm{d}\theta'$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}\right)^2}},\ 0,\ \frac{\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}\right)^2}}$$

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3=0,\ \cos\theta',\ -\sin\theta'$$

したがって（$\phi'-\phi$）$\equiv\mu$とおけば渦ベクトルの成分λ_1，λ_2，λ_3は次式で与えられる。

$$\lambda_1=-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}\right)^2}}\ \frac{\partial\mu}{R'\partial\theta'}$$

$$\lambda_2=\frac{\cos\theta'}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}\right)^2}}\ \frac{\partial\mu}{\partial x'} \tag{58}$$

$$\lambda_3=-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}\right)^2}}\times\left(\sin\theta'\frac{\partial\mu}{\partial x'}-\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}\ \frac{\partial\mu}{R'\partial\theta'}\right)$$

$S_u{}^2$面の法線ベクトルnの方向余弦（l，m，n）は次式で与えられる。

$$l,\ m,\ n$$

$$=\frac{\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}\right)^2}}\cos\theta',\ \frac{\sin\theta'}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}\right)^2}},\ \frac{\cos\theta'}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}R'}{\mathrm{d}x'}\right)^2}}$$

したがって渦ベクトル$\boldsymbol{\lambda}$と法線ベクトルnは直交する。すなわち渦ベクトルは$S_u{}^2$面に接している。以上の点から(53)の$S_u{}^2$上の積分項で示される速度ポテンシャルが示す誘導速度は$S_u{}^2$上に分布し(58)で与えられる渦による誘導速度に等しい。この渦ベクトルを$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2$で表すことにする。$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2$は未知量$\mu=\phi'-\phi$を含むので未知量であるが，境界条件により直接これを定めることができる。一方ダクト面上に分布する渦を$\boldsymbol{\lambda}_d$で表すと，$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2=\boldsymbol{\lambda}_p{}^2+\boldsymbol{\lambda}_d$となる。ただし$\boldsymbol{\lambda}_p{}^2$はインペラ翼先端自由渦の中で$S_u{}^2$面に付着している部分の渦ベクトルを表している。$\boldsymbol{\lambda}_d$は勿論未知量である。したがって$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2$を直接境界条件により定めるかわりに$\boldsymbol{\lambda}_p{}^2$が既知であれば$\boldsymbol{\lambda}_d$を直接境界条件により定めることもできる。$\boldsymbol{\lambda}_d$を直接求める場合には$\boldsymbol{\lambda}_p{}^2$による誘導速度の計算が必要となるが$\boldsymbol{\lambda}_p{}^2$はダクトに付着しておりダクト半径$R'$は一般に$x'$で変化するので，$\boldsymbol{\lambda}_p{}^2$の誘導速度をビオーサバールの法則で計算するにしてもこの計算は簡単ではない。勿論$\boldsymbol{\lambda}_d$による誘導速度の表示式も同様に複雑となる。一方$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2$を直接計算する場合には$\boldsymbol{\lambda}_p{}^2$の誘導速度の計算は不要となり，$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2$の誘導速度の表示式のみを用いればよい。このように考えると$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2$を直接境界条件により定める方が簡単で実用的のように思われる。この場合には$\boldsymbol{\lambda}_d$は$\boldsymbol{\lambda}_d=\boldsymbol{\lambda}_u{}^2-\boldsymbol{\lambda}_p{}^2$として求まる。また$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2$が直接求まれば$V$内の誘導速度の計算には$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2$のみを用いればよいが，ダクト内面上のダクト面の接線方向の誘導速度の計算には$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2$ではなく$\boldsymbol{\lambda}_p{}^2$と$\boldsymbol{\lambda}_d$が別々に関与するので注意が必要である。

次に$S_u{}^3$上の積分項について検討する。この項については事情はS_i上の積分項の場合と同様であり$S_u{}^3$上の渦分布が既に定まっている。すなわち$S_u{}^3$上にはインペラー翼先端自由渦のみが分布しており，実際の流れもこの自由渦のみで表される。この渦を$\boldsymbol{\lambda}_p{}^3$で表すことにすれば$\boldsymbol{\lambda}_p{}^3$は既知量である。したがってこの場合も二重吹出し分布（$\phi'-\phi$）に対応する渦分布を求めることが問題ではなく，しいて言えば$\boldsymbol{\lambda}_p{}^3$に対応する二重吹出し分布を求めることが問題となる。しかしこの問題は本論とは特に関係がないのでこれ以上触れない。このように(53)において$S_u{}^3$上の積分項から求まる誘導速度は$S_u{}^3$上の渦$\boldsymbol{\lambda}_p{}^3$による誘導速度と同じになりこの項も既知量と考えることができる。

次に$S_u{}^1$，S_l面にも(53)から明らかなように二重吹出し分布かあるいはこれに対応する渦を分布させる必要がある。

束縛渦の保存性を考慮するときは，$S_u{}^2$上で$\boldsymbol{\lambda}_d$の渦分布を考えたのであるから$S_u{}^1$，S_l面に対しても渦分布を考えた方が分かりやすいようにも思える。またS_l上の渦については，たとえばダクト付きプロペラのダクト前縁付近の渦分布の形が参考になる。ダクト入口部で発散するような渦分布を考えた方が一般的かもしれない。

次にΣ面上の積分項について検討する。Σ面はVを単連結領域とするために付加したスリット面であるが図5に示すCを積分路にとるとΣ面上の（$\phi_2-\phi_1$）は次式で与えられる。

$$\phi_2-\phi_1=\int_C (u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y+w\mathrm{d}z)=2\pi\gamma_p \qquad (59)$$

したがって(53)におけるΣ面上の積分項は次式となる。

$$\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma (\phi_2-\phi_1)\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{1}{r}\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\gamma_p\int_\Sigma \frac{\partial}{\partial n_1}\frac{1}{r}\mathrm{d}S \qquad (60)$$

すなわちこの項は一定の大きさの二重吹出しをΣ面に分布させたときの速度ポテンシャルである。前述のようにV領域境界面は連続曲面であるから(55)の$\boldsymbol{\Psi}$の第二項の線積分の項は考慮する必要はない。しかし前述のようにS_c面上の特異点に対しては流れの表示として(53)に示す速度ポテンシャルを用いているのでこの場合には境界線上の積分は表れてこない。したがってΣ面上の二重吹出し分布による誘導速度を(55)を用いて計算する場合にはΣ面の境界線上の線積分項を合わせて考慮することが必要である。この場合はこの境界線は$y'=z'=0$，$x'=0\sim\infty$の直線となる。Σ面上の二重吹出しの強さは前述のように一定であるから(56)により対応する渦ベクトル$\boldsymbol{\lambda}$は0である。したがって(55)，(60)より次式を得る。

$$\psi_1=\frac{\gamma_p}{2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{(x'-x)^2+y^2+z^2}},\quad \psi_2=\psi_3=0 \qquad (61)$$

したがってP点の座標として円筒座標（x, r, θ）を用い，Σ面上の二重吹出しによる誘導速度を$\boldsymbol{W}_{pf}{}^h$とし，$\boldsymbol{W}_{pf}{}^h$のx, r, θ成分を夫々に$W_{pfx}{}^h$，$W_{pfr}{}^h$，$W_{pf\theta}{}^h$，とすればこれらは次式で与えられる。

$$W_{pfx}{}^h=W_{pfr}{}^h=0 \qquad (62)$$

$$W_{pf\theta}{}^h=-\frac{\gamma_p}{2r}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right)$$

これは軸中心自由渦の誘導速度に一致する。[5] したがってΣ面上の二重吹出し分布による誘導速度も既知量となる。

さて以下においてはV内の流れを流速のレベルで表すことにする。(53)と以上の考察の結果を用いると流速ベクトルは次式で表される。

$$V(P)=\mathrm{rot}\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{W}_{pb}+\boldsymbol{W}_{pf}{}^t+\boldsymbol{W}_{pf}{}^h+\mathrm{grad}\phi_f,$$

$$\text{for}\quad P\subset V \qquad (63)$$

ただし

$$\boldsymbol{\Psi}=\frac{1}{4\pi}\int_{S_u{}^1+S_u{}^2+S_l}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{r}\mathrm{d}S$$

$$\phi_f=\frac{1}{4\pi}\int_{S_f}\left\{\frac{1}{K_0}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}(\phi'-\phi)\frac{1}{r}\right.$$

$$\left.-(\phi'-\phi)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right\}\mathrm{d}S$$

$\boldsymbol{\lambda}$：$S_u{}^1$，$S_u{}^2$，S_l面に分布する渦ベクトル

ϕ，ϕ'：VおよびV'内のu_0xを除いた速度ポテンシャル

$\boldsymbol{W}_{pb}$：インペラー束縛渦の誘導速度ベクトル

$\boldsymbol{W}_{pf}{}^t$：ノズル出口後方のインペラー翼先端自由渦の誘導速度ベクトル

$\boldsymbol{W}_{pf}{}^h$：インペラー軸中心自由渦による誘導速度ベクトル

勿論(63)のrot$\boldsymbol{\Psi}$の項は$\boldsymbol{\lambda}$に対して直接ビオーサバールの法則を用いて計算することもできる。またインペラーの渦による誘導速度成分はγ_pを用いて次のように具体的に表される。[4), 5)]

$$W_{pbx}=W_{pbr}=0 \qquad (64)$$

$$W_{pb}\theta=\frac{\gamma_p}{2r}\frac{x}{x}\left\{H(r-R)-1\right\}+\frac{\gamma_p x}{2r}\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$-\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{K(k)}{\sqrt{x^2+r^2}}+\frac{\gamma_p}{2\pi r}\frac{x}{x}\frac{r-R}{r-R}$$

$$\times\left[\left\{K(k)-E(k)\right\}F(\phi,k')-K(k)E(\phi,k')\right]$$

$$W_{pfx}{}^t=\frac{\gamma_p}{4\pi}\left[1-\frac{r-R_n}{r-R_n}+\frac{2}{\pi}\right.$$

$$\times\frac{x-l_n}{\sqrt{(x-l_n)^2+(r+R_n)^2}}K(k_n)-\frac{2}{\pi}\frac{x-l_n}{x-l_n}$$

$$\times\frac{r-R_n}{r-R_n}\left\{K(k_n)E(\phi_n,k_n{}')-\Big(K(k_n)\right.$$

$$\left.\left.-E(k_n)\Big)F(\phi_n,k_n{}')\right\}\right]$$

$$W_{pfr}{}^t=\frac{\gamma_p}{\pi h}\left[\left\{K(k_n)-E(k_n)\right\}\right.$$

$$\left.\times\frac{\sqrt{(x-l_n)^2+(r+R_n)^2}}{2r}-\frac{R_n\ K(k_n)}{\sqrt{(x-l_n)^2+(r+R_n)^2}}\right]$$

$$W^t{}_{pf}\theta=\frac{\gamma_p}{4r}\left(1+\frac{r-R_n}{|r-R_n|}\right)+\frac{\gamma_p(x-l_n)}{2\pi r}$$

$$\times\frac{K(k_n)}{\sqrt{(x-l_n)^2+(r+R_n)^2}}-\frac{\gamma_p}{2\pi r}\frac{x-l_n}{|x-l_n|}\frac{r-R_n}{|r-R_n|}$$

$$\times\left[\left\{K(k_n)-E(k_n)\right\}F(\phi_n,\ k'_n)\right.$$

$$\left.-K(k_n)\ E(\phi_n,\ k'_n)\right]$$

$$W_{pfx}{}^h=W_{pfr}{}^h=0$$

$$W^h_{pf\theta}=-\frac{\gamma_p}{2r}\left(1+\frac{x-l_n}{\sqrt{(x-l_n)^2+r^2}}\right)$$

ただし，R, R_n：インペラーおよびノズル出口の半径

$2\pi h$：インペラー翼先端自由渦のピッチ

$$k^2=\frac{4rR}{x^2+(r+R^2)}$$

$$k'^2=\frac{x^2+(r-R)^2}{x^2+(r+R)^2}$$

$$\sin\phi=\frac{x}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}$$

$K(k)$, $E(k)$　：第一種，第二種完全楕円積分

$F(\phi,\ k)$, $E(\phi,\ k)$　：第一種，第二種楕円積分

$H(r-R)=1$　for　$r>R$

$=0$　for　$r<R$

l_n：ノズル出口のx座標

$$k_n{}^2=\frac{4rR_n}{(x-l_n)^2+(r+R_n)^2}$$

$$k'_n{}^2=\frac{(x-l_n)^2+(r-R_n)^2}{(x-l_n)^2+(r+R_n)^2}$$

$$\sin\phi_n=\frac{|x-l_n|}{\sqrt{(x-l_n)^2+(r-R_n)^2}}$$

さて(63)の中の$S_u{}^1$, $S_u{}^2$, S_lの上の$\boldsymbol{\lambda}$とS_f上の（$\phi'-\phi$）は未知量でありこれらについては$S_u{}^1$, $S_u{}^2$, S_l上の条件とS_f上の自由表面条件により定めることが必要となる。このようにして定められた$\boldsymbol{\lambda}$と（$\phi'-\phi$）を用いて(63)により求まるWJのまわりの流れは本質的にはダクト内外の流れが互いに干渉した形となる。したがって第二章で示した流れとは本質的に異なる。それにしてもこのような方法で流れを求めるには無限遠まで広がっているS_f上の吹出し，二重吹出しの強さを求めねばならないので実際的にはかなりの困難を伴うことになる。この点に関連して第二章でも触れたがu_0が大きくK_0が小さい場合には自由表面条件は $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\phi'}{\partial x^2}=0$ on S_fとなる。無限上流では$\phi=\phi'=0$となるように定められることを考慮するとこの自由表面条件は，$\phi=\phi'=0$ on S_fとなる。したがってこのときは(63)のϕ_fは$\phi_f=0$となる。すなわちWJのまわりの流れは次式で与えられる。

$$\boldsymbol{V}(P)=\mathrm{rot}\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{W}_{pb}+\boldsymbol{W}_{pf}{}^t+\boldsymbol{W}_{pf}{}^h \qquad (64)$$

すなわちu_0が大きい場合には自由表面上に特異点を分布させる必要はなくなる。またこのときの自由表面条件は次式となる。

$$\phi=0\quad \text{on}\quad S_f$$

したがって$\boldsymbol{\lambda}$は$S_u{}^1$, $S_u{}^2$, S_l上の条件と，上の自由表面条件をみたすように定めねばならぬ。これが可能かどうか明確な説明は現段階ではできないが，未知量$\boldsymbol{\lambda}$はベクトルでありその大きさと向きが未知量であることを考慮すればS_f上の条件を満たすように$\boldsymbol{\lambda}$を定めることも不可能ではないような気もする。しかし更に具体的な検討が必要である。次にインペラーの束縛渦の密度γ_pについては，一様流中のプロペラの束縛渦と異なりインペラーに流入する流れはインペラー・ディスク上で必ずしも一様ではないのでγ_pも周方向に変化する。しかし本論ではγ_pの周方向の平均値をγ_pとして用いることにしている。このようなモデル化による誤差についても今後の検討が必要である。

なお(63), (64)が今までの第三章での検討結果を集約もしたのであるが結果的には極めて常識的なものとなっており，わざわざグリーンの公式から出発しなくても直感的に直ちに求まるような気もする。ただインペラー後方の$\boldsymbol{\lambda}_u{}^2$の取り扱い方とか，二重吹出し分布と渦分布の関係とか，自由表面上の特異点の取り扱い方等に関しては若干曖昧な点があったが，本論によりこれらの点を明確にすることができたように思う。

(63), (64)でV内の流速Vが定まれば，これを用いてWJの推力Tとかインペラー駆動動力LとかWJの効率を第二章におけると同様に考えて計算することができるがその計算式については省略する

4　あとがき

本論では水中翼船用WJを取り上げてそのまわりの流れの解析法について基礎的な考察を行った。

第二章においてはWJのまわりの流れをダクト内，外の流れに分けて考えることにし，さらにダクト内の流れを一次元的流れで近似した場合についての解析法の検討を行った。とくに高速船用のWJを対象とする場合については最適ダクト形状とか，WJの推力とか，効率についてもかなり具体的な解析法を示した。勿論第二章では流れに対して大胆な近似を行っているので第二章の結果は量的には実際とかなり相違していると思うが，WJの流れについての定性的な傾向は概略把握することができると思う。また第二章におけるWJの性能の解析結果はWJの性能の量的限界を与えるものであるから他の推進方式との性能の比較にも役に立つと思う。

第三章においては第一章で示したWJのまわりの流れに

ついての流力モデルを用いてWJまわりの三次元流れの表示式をグリーンの公式から出発する極めてオーソドックスな方法を用いて誘導した。この流れの表示式には，いくつかの境界条件を用いて定めねばならない未知量を含んでいるがこれを定める場合の問題点についても触れた。またWJのまわりの流れを，WJをとりまく流体の境界面上に分布する二重吹出し分布で表す場合の二重吹出しの強さと，渦分布で表す場合の渦の強さの間の関係をWJの場合に対して明らかにした。なお第三章では流れの表示式に含まれる未知量の具体的決定法については触れていないが，この点については今後の問題として残される。

記号の説明

x, y, z：流体領域内の点を表す直角座標にしてインペラー中心を原点にとる。

x, r, θ：x, y, z座標に対応する円柱座標

x', y', z'：特異点位置を表す直角座標にしてインペラー中心を原点にとる。

x', r', θ'：特異点位置を表す円柱座標

V：流体の非回転流れの領域

V'：Vの外側の領域

S_f：自由表面

S_l：水面下のダクト面

S_u：水面上のダクト面およびノズル後方のインペラー翼先端自由渦の外面

S_i：インペラー面

S_c：インペラー軸中心自由渦の表面

Σ：Vを単連結領域とするために付加されたスリット面

R：インペラー半径

R_n：ノズル出口半径

l_n：ノズル出口のx座標

A_1，A_2，A_3：ダクト入口，インペラー断面，ノズル出口の面積

α：$\dfrac{A_1}{A_3}$

h_1，h_3：ダクト入口，ノズル出口の中心線の水面からの距離

u_0，u_1，u_2，u_3：一様流速，ダクト入口，インペラー部，ノズル出口の流速

ρ：水の密度

g：重力の加速度

Δu：u_3-u_0

Q：ダクト流量

P_a：大気圧

P_1，P_2，P_3：ダクト入口，インペラー部，ノズル出口の圧力

P_{2i}，P_{20}：インペラー前面，後面の圧力

Δp：$P_{20}-P_{2i}$

T_p，T_d，R：インペラー，ダクト内面の推力成分およびダクト外面の抵抗

T：WJの全推力（T_p+T_d-R）

L：インペラー駆動用動力

η：WJの推進効率

C_T：$\dfrac{T}{\frac{1}{2}\rho A_1 u_0{}^2}$

$C_L L$：$\dfrac{L}{\frac{1}{2}\rho A_1 u_0{}^3}$

C_p：$\dfrac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho u_0{}^2}$

C_{h1}，C_{h3}：$\dfrac{\rho g h_1}{\frac{1}{2}\rho u_0{}^2}$，$\dfrac{\rho g h_3}{\frac{1}{2}\rho u_0{}^2}$

q：$\left(\dfrac{u_1}{u_0}\right)^2$

ϕ，ϕ'：V，V'内の流れの速度ポテンシャル

γ_p：インペラー束縛渦の密度の平均値

$\boldsymbol{\lambda}_p$：インペラー翼先端自由渦ベクトル

$\boldsymbol{\lambda}_d$，$\boldsymbol{\lambda}_u$：ダクト面の渦ベクトル，$\boldsymbol{\lambda}_u=\boldsymbol{\lambda}_p+\boldsymbol{\lambda}_d$

$\boldsymbol{V}$：V内の速度ベクトル

$\boldsymbol{W}_{pb}$：インペラー束縛渦による誘導速度ベクトル

$\boldsymbol{W}_{pf}{}^t$：ノズル出口後方のインペラー翼先端自由渦による誘導速度ベクトル

$\boldsymbol{W}_{pf}{}^h$：インペラー軸中心自由渦による誘導速度ベクトル

参　考　文　献

1）日本造船学会推進性能研究委員会，第3回舶用プロペラに関するシンポジウム　テキスト，日本造船学会，1987.

2）造船協会，造波抵抗シンポジウム　テキスト，1965.

3）海老原正夫：航空宇宙技術研究所報告，243号，1971.

4）坂尾稔：関西造船協会誌，第155号，1974.

5）坂尾稔：島根大学教育学部紀要（自然科学），第22巻-第1号，1988.