島根大学教育学部紀要（自然科学）第22巻－第１号　27頁～39頁　昭和63年10月

プロペラ誘導速度の計算法

（主として周方向成分について）

坂　尾　　　稔*

Minoru SAKAO

A Calculation Method of Propeller lnduced Velocity

(On the Circumferential Component mainly)

1. まえがき

静止流体中を回転しながら軸方向に一定速度で前進するプロペラの誘導速度は翼に束縛される吹出しと渦及び流体中に流出する自由渦による誘導速度から成るが，本論ではこれらの中で支配的な束縛渦及び自由渦による誘導速度の周方向成分の計算法について主として考察する。自由渦による誘導速度は流体中における自由渦の位置により変化する。例えばウォーター・ジェット推進装置ではダクトに流入した水はダクト内に装備されたインペラーにより加圧されてノズルから高速で噴出するので，インペラーから流出する自由渦はその位置がダクトの形状で変わってくる。普通の場合ノズル部ではダクト断面が絞られるのでインペラーから流出した自由渦はノズル部ではかなり軸中心の方向にその位置が移動する。通常のプロペラの場合でもプロペラから流出する自由渦はプロペラ誘導速度の半径方向成分のためにプロペラ後方では若干その位置が軸中心の方へずれるのが普通であり，負荷の大きいプロペラ程ずれ方は大きくなる。したがってこのような場合は誘導速度の計算に当たっては自由渦の位置を考慮に入れる必要がある。本論ではまず自由渦分布面の半径が場所により変化する場合についてビオ－サバールの法則を用いて誘導速度計算式を定式化する。次いでこれを用いて最も基本的な，自由渦分布面の半径が一定で軸方向に変化しない場合について周方向の誘導速度成分の計算法について具体的に検討を加える。高木[1]は自由渦分布面の半径が一定の場合についてビオ－サバールの法則を用いて誘導速度の周方向成分の計算を試みているが，その最終の計算式はベッセル関数を含む被積分関数の無限積分の形となっており，この高木の計算式では誘導速度の性質が分かりにくく，また数値計算に対しても不便である。本論で求めた最終の計算式は第一種，第二種楕円積分のみで表されておるので分かりやすく，数値計算にも便利と思う。なお本論では計算に当たって次に示す流力モデルを用いることにより記述の簡単化をはかったが，このような流力モデルを採用しても誘導速度の計算法としての一般性を失うものではない。

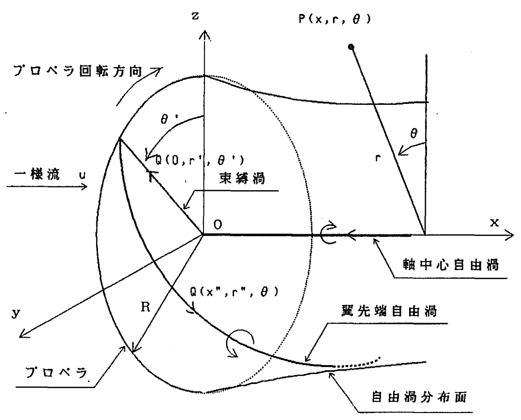
(1)プロペラ翼数は無限大とする。(2)プロペラ・ボスの半径は０とする。(3)束縛渦の密度は半径方向に一定とする。したがって自由渦はプロペラ翼先端とプロペラ軸中心のみから流出する。(4)プロペラ翼先端から流出する自由渦のピッチは軸方向に一定とする。

なお本論で使用する主な記号の説明は末尾にまとめて示す。

2. ビオ－サバールの法則によるプロペラ誘導速度計算式の定式化

本論においては付図に示す円筒座標を用いる。プロペラは$y-z$面内にあり流速uの一様流れの中でx軸のまわりに角速度ωで回転するものとする。またプロペラに束縛される束縛渦糸要素の座標を(o, r', θ')で表し，またプロペラ翼先端から流出する自由渦糸要素の座標を(x'', r'', θ'')で表す。また前述のようにこの自由渦分布面の半径r''は一般にx''の関数にして事前に与えられるものとする。

* 島根大学教育学部技術科研究室



付図　座　標　系

2．1　プロペラ翼先端自由渦による誘導速度

プロペラ翼先端自由渦による誘導速度のx, r, θ方向成夫を夫々W^t_{fx}, W^t_{fr}, $W^t_{f\theta}$で表す。束縛渦の密度をγ_pとすれば一本の自由渦糸上の点Q (x'', r'', θ'') における渦要素によって点P (x, r, θ) に誘起される誘導速度ベクトルはビオ - サバールの法則により次式で与えられる。

$$d^2\mathbf{W}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{f}}=\frac{\gamma_p}{4\pi\overline{QP}}\left(\overrightarrow{dS}\times\overrightarrow{QP}\right) \tag{1}$$

ただし

$\mathbf{W}^{\mathbf{t}}_{\mathbf{f}}$　：翼先端自由渦による誘導速度ベクトル

γ_p　：翼先端自由渦の密度

$\overrightarrow{dS}$　：自由渦糸要素の長さのベクトル

$\overrightarrow{QP}$　：位置ベクトル

$\overline{QP}$　：点Qと点Pの間の距離

×　：ベクトルの外積を示す

図1のx, y, z軸は左手糸の座標軸であるから$\overrightarrow{dS}\times\overrightarrow{QP}$は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dS}\times\overrightarrow{QP}=&-\mathbf{i}\left(\overrightarrow{dS_y}\,\overrightarrow{QP_z}-\overrightarrow{dS_z}\,\overrightarrow{QP_y}\right)\\&+\mathbf{j}\left(\overrightarrow{dS_x}\,\overrightarrow{QP_z}-\overrightarrow{dS_z}\,\overrightarrow{QP_x}\right)\\&-\mathbf{k}\left(\overrightarrow{dS_x}\,\overrightarrow{QP_y}-\overrightarrow{dS_y}\,\overrightarrow{QP_x}\right)\end{aligned}$$

ただし上式のサフィックスx, y, zは夫々x, y, z軸成分を表している。また$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$はx, y, z軸方向の単位ベクトルである。さて次の関係が成立する。$x''=h(\theta''-\theta')$, $y''=r''\sin\theta''$, $z''=r''\cos\theta''$。ただしhは自由渦のピッチである。したがって$\overrightarrow{dS}$の成分は次式で表される。

$\overrightarrow{dS_x}=dx''=hd\theta''$, $\overrightarrow{dS_y}=dy''=dr''\sin\theta''+r''\cos\theta''d\theta''$, $\overrightarrow{dS_z}=dz''=dr''\cos\theta''-r''\sin\theta''d\theta''$。同様に$\overrightarrow{QP}$の成分は次のようになる。$\overrightarrow{QP_x}=x-x''$, $\overrightarrow{QP_y}=r\sin\theta-r''\sin\theta''$, $\overrightarrow{QP_z}=r\cos\theta-r''\cos\theta''$。また$\overline{QP}^2=(x-x'')^2+r^2+r''^2-2rr''\cos(\theta-\theta'')$。したがって翼先端渦糸要素による誘導速度の$x$, y, z成分は(1)より次のように表される。

$$d^2W^t_{fx}=\frac{\gamma_p}{4\pi}d\theta'\,\frac{\{r''^2-rr''\cos(\theta-\theta'')\}d\theta''+r\sin(\theta-\theta'')dr''}{\{(x-x'')^2+r^2+r''^2-2rr''\cos(\theta-\theta'')\}^{3/2}} \tag{2}$$

$$d^2W^t_{fy}=\frac{\gamma_p h}{4\pi}d\theta'\,\frac{\{r\cos\theta-r''\cos\theta''+r''\frac{x-x''}{h}\sin\theta''\}d\theta''-\frac{x-x''}{h}\cos\theta''dr''}{\{(x-x'')^2+r^2+r''^2-2rr''\cos(\theta-\theta'')\}^{3/2}} \tag{3}$$

$$d^2W^t_{fz}=\frac{\gamma_p h}{4\pi}d\theta'\,\frac{\{-r\sin\theta+r''\sin\theta''+r''\frac{x-x''}{h}\cos\theta''\}d\theta''+\frac{x-x''}{h}\sin\theta''dr''}{\{(x-x'')^2+r^2+r''^2-2rr''\cos(\theta-\theta'')\}^{3/2}} \tag{4}$$

$d^2W^t_{f\theta}=d^2W^t_{fy}\cos\theta-d^2W^t_{fz}\sin\theta$であるから(3), (4)より$d^2W^t_{f\theta}$は次式で表される。

$$\begin{aligned}d^2W^t_{f\theta}=&\frac{\gamma_p h}{4\pi}d\theta'\frac{1}{\{(x-x'')^2+r^2+r''^2-2rr''\cos(\theta-\theta'')\}^{3/2}}\\&\times\left[\left\{r-r''\cos(\theta-\theta'')+r''\frac{x-x''}{h}\sin(\theta''-\theta)\right\}d\theta''\right.\\&\left.-\frac{x-x''}{h}\cos(\theta-\theta'')dr''\right]\end{aligned} \tag{5}$$

同様に$d^2W^t_{fr}$は次のようになる。

$$\begin{aligned}d^2W^t_{fr}=&\frac{\gamma_p h}{4\pi}d\theta'\frac{1}{\{(x-x'')^2+r^2+r''^2-2rr''\cos(\theta-\theta'')\}^{3/2}}\\&\times\left[\left\{r''\sin(\theta''-\theta)+r''\frac{x-x''}{h}\cos(\theta-\theta'')\right\}d\theta''\right.\\&\left.+\frac{x-x''}{h}\sin(\theta''-\theta)dr''\right]\end{aligned} \tag{6}$$

前述のようにr''はx''の関数である。しかるに$x''=h(\theta''-\theta')$の関係があるから$dr''=\frac{dr''}{d\theta''}d\theta''$である。したがって(2), (5), (6)より$W^t_{fx}$, $W^t_{f\theta}$, W^t_{fr}は次式で表される。

$$\begin{aligned}W^t_{fx}=&\frac{\gamma_p}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta'\int_{\theta'}^{\infty}\frac{d\theta''}{\{(x-x'')^2+r^2+r''^2-2rr''\cos(\theta-\theta'')\}^{3/2}}\\&\times\left\{r''^2-rr''\cos(\theta-\theta'')+r\frac{dr''}{d\theta''}\sin(\theta-\theta'')\right\}\end{aligned} \tag{7}$$

$$W^t_{f\theta}=\frac{\gamma_p h}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta'\int_{\theta'}^{\infty}$$

$$\frac{d\theta''}{\{(x-x'')^2+r^2+r''^2-2rr''\cos(\theta-\theta'')\}^{3/2}}$$

$$\times\{r-r''\cos(\theta-\theta'')-r''\frac{x-x''}{h}\sin(\theta-\theta'')$$

$$-\frac{x-x''}{h}\frac{dr''}{d\theta''}\cos(\theta-\theta'')\} \tag{8}$$

$$W^t_{fr}=\frac{\gamma_p h}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta'\int_{\theta'}^{\infty}$$

$$\frac{d\theta''}{\{(x-x'')^2+r^2+r''^2-2rr''\cos(\theta-\theta'')\}^{3/2}}$$

$$\times\{-r''\sin(\theta-\theta'')+r''\frac{x-x''}{h}\cos(\theta-\theta'')$$

$$-\frac{x-x''}{h}\frac{dr''}{d\theta''}\sin(\theta-\theta'')\} \tag{9}$$

ただし(7), (8), (9)におけるx''は$x''=h(\theta''-\theta')$である。

2．2　軸中心自由渦による誘導速度

軸中心自由渦による誘導速度のx, r, θ成分を夫々W^h_{fx}, W^h_{fr}, $W^h_{f\theta}$で示すと，これらはビオ－サバールの法則より次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&W^h_{fx}=0,\quad W^h_{fr}=0\\&W^h_{f\theta}=-\frac{\gamma_p}{2r}-\frac{\gamma_p}{2r}\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

2．3　自由渦による誘導速度

自由渦による誘導速度は翼先端自由渦と軸中心自由渦の誘導速度の和でありこれのx, r, θ成分をW_{fx}, W_{fr}, $W_{f\theta}$で夫々表すものとすれば，これらは次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&W_{fx}=W^t_{fx},\quad W_{fr}=W^t_{fr}\\&W_{f\theta}=W^t_{f\theta}+W^h_{f\theta}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

2．4　束縛渦による誘導速度

束縛渦による誘導速度のx, r, θ成分を夫々W_{bx}, W_{br}, $W_{b\theta}$で表す。束縛渦糸上の点$Q(o, r', \theta')$における渦要素によって$P(x, r, \theta)$に誘起される誘導速度の求め方は2．1で示した方法と同様で(1)で与えられる。この場合は$\overrightarrow{dS_x}=o$, $\overrightarrow{dS_y}=dr'\sin\theta'$, $\overrightarrow{dS_z}=dr'\cos\theta'$, $\overrightarrow{QP_x}=x$, $\overrightarrow{QP_y}=r\sin\theta-r'\sin\theta'$, $\overrightarrow{QP_z}=r\cos\theta-r'\cos\theta'$, $\overrightarrow{QP}^2=x^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')$であるから渦糸要素による誘導速度の$x$, r, θ成分d^2W_{bx}, d^2W_{br}, $d^2W_{b\theta}$は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&d^2W_{bx}=\frac{\gamma_p r}{4\pi}d\theta'\frac{\sin(\theta-\theta')}{\{x^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\}^{3/2}}dr'\\&d^2W_{br}=-\frac{\gamma_p x}{4\pi}d\theta'\frac{\sin(\theta-\theta')}{\{x^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\}^{3/2}}dr'\\&d^2W_{b\theta}=-\frac{\gamma_p x}{4\pi}d\theta'\frac{\cos(\theta-\theta')}{\{x^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\}^{3/2}}dr'\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

したがってW_{bx}, W_{br}, $W_{b\theta}$は夫々次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&W_{bx}=\frac{\gamma_p r}{4\pi}\int_0^R dr'\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\theta-\theta')d\theta'}{\{x^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\}^{3/2}}\\&\quad=0\\&W_{br}=-\frac{\gamma_p x}{4\pi}\int_0^R dr'\int_0^{2\pi}\frac{\sin(\theta-\theta')d\theta'}{\{x^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\}^{3/2}}\\&\quad=0\\&W_{b\theta}=-\frac{\gamma_p x}{4\pi}\int_0^R dr'\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta-\theta')d\theta'}{\{x^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\}^{3/2}}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ただし　R：プロペラ半径

3．$r''=R$の場合のプロペラ誘導速度のθ方向成分の計算法について

3．1　束縛渦による誘導速度のθ方向成分$W_{b\theta}$

$W_{b\theta}$は(13)で定式化される。$W_{b\theta}$はθに無関係であるから(13)は次のようになる。

$$W_{b\theta}=-\frac{\gamma_p x}{4\pi}\int_0^R dr'\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\ d\theta}{\{x^2+r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'\}^{3/2}} \tag{14}$$

r'についての定積分の値を用いると上式は次のようになる。

$$W_{b\theta}=-\frac{\gamma_p x}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\cos\theta-r\cos^2\theta}{(x^2+r^2\sin^2\theta)\sqrt{x^2+r^2+R^2-2rR\cos\theta}}d\theta$$

$$-\frac{\gamma_p}{4\pi}\frac{xr}{\sqrt{x^2+r^2}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{x^2+r^2\sin^2\theta}d\theta \tag{15}$$

(15)の$W_{b\theta}$の第一項を$W^1_{b\theta}$, 第二項を$W^2_{b\theta}$で表すことにすれば

$$W_{b\theta}=W^1_{b\theta}+W^2_{b\theta} \tag{16}$$

ただし

$$W^1_{b\theta}=-\frac{\gamma_p x}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\cos\theta-r\cos^2\theta}{(x^2+r^2\sin^2\theta)\sqrt{x^2+r^2+R^2-2rR\cos\theta}}d\theta$$

$$W^2_{b\theta}=-\frac{\gamma_p}{4\pi}\frac{xr}{\sqrt{x^2+r^2}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{x^2+r^2\sin^2\theta}d\theta$$

まず$W_{b\theta}^1$について検討する。

$$\frac{R\cos\theta-r\cos^2\theta}{x^2+r^2-r^2\cos^2\theta}=\frac{1}{r}\left(1-\frac{x^2+r^2-rR\cos\theta}{x^2+r^2-r^2\cos^2\theta}\right)$$

であるから$W_{b\theta}^1$は次のように書ける。

$$W_{b\theta}^1=-\frac{\gamma_p x}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{x^2+r^2+R^2-2rR\cos\theta}}+\frac{\gamma_p x}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\frac{x^2+r^2-rR\cos\theta}{x^2+r^2-r^2\cos^2\theta}\times\frac{d\theta}{\sqrt{x^2+r^2+R^2-2rR\cos\theta}} \quad (17)$$

上式において$\theta\equiv 2\theta'$と置きかえ，さらに$\int_0^{\pi}d\theta'=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)d\theta'$の第二項において$\theta'\equiv\pi-\theta''$と置きかえを行うと結局(17)は次のように変形される。

$$W_{b\theta}^1=-\frac{\gamma_p x}{\pi r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{x^2+r^2+R^2-2rR+4rR\sin^2\theta}}+\frac{\gamma_p x}{\pi r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2+r^2-rR+2rR\sin^2\theta}{x^2+r^2-r^2(1-2\sin^2\theta)^2}\times\frac{d\theta}{\sqrt{x^2+r^2+R^2-2rR+4rR\sin^2\theta}} \quad (18)$$

(18)でさらに$\cos\theta\equiv u$の置換を行う。しからば$W_{b\theta}^1$は次のようになる。

$$W_{b\theta}^1=-\frac{\gamma_p x}{\pi r}\frac{1}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}\times\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-\frac{4rR}{x^2+(r+R)^2}u^2}}+\frac{\gamma_p x}{\pi r}\frac{1}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}\times\int_0^1\frac{x^2+r^2+rR-2rRu^2}{x^2+r^2-r^2(1-2u^2)^2}\times\frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-\frac{4rR}{x^2+(r+R)^2}u^2}} \quad (19)$$

しかるに

$$\frac{x^2+r^2+rR-2rRu^2}{x^2+r^2-r^2(1-2u^2)^2}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+r^2}}\times\left(\frac{x^2+r^2+R\sqrt{x^2+r^2}}{\sqrt{x^2+r^2}-r+2ru^2}+\frac{x^2+r^2-R\sqrt{x^2+r^2}}{\sqrt{x^2+r^2}+r-2ru^2}\right)$$

であるから結局$W_{b\theta}^1$は次式となる。

$$W_{b\theta}^1=-\frac{\gamma_p x}{\pi r}\frac{1}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}\times\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-\frac{4rR}{x^2+(r+R)^2}u^2}}$$
$$+\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{1}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}\frac{\sqrt{x^2+r^2}+R}{\sqrt{x^2+r^2}-r}\times\int_0^1\frac{du}{\left(1+\frac{2r}{\sqrt{x^2+r^2}-r}u^2\right)\sqrt{(1-u^2)\{1-\frac{4rR}{x^2+(r+R)^2}u^2\}}}$$
$$+\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{1}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}\frac{\sqrt{x^2+r^2}-R}{\sqrt{x^2+r^2}+r}\times\int_0^1\frac{du}{\left(1-\frac{2r}{\sqrt{x^2+r^2}+r}u^2\right)\sqrt{(1-u^2)\{1-\frac{4rR}{x^2+(r+R)^2}u^2\}}} \quad (20)$$

あるいは楕円積分を用いて書きかえると次のようになる。

$$W_{b\theta}^1=-\frac{\gamma_p x}{\pi r}\frac{K(k)}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}+\frac{\gamma_p}{2\pi}\frac{x}{r}\frac{1}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}\times\left\{\frac{\sqrt{x^2+r^2}+R}{\sqrt{x^2+r^2}-r}\Pi\left(\frac{\pi}{2};c_1,k\right)+\frac{\sqrt{x^2+r^2}-R}{\sqrt{x^2+r^2}+r}\Pi\left(\frac{\pi}{2}:c_2,k\right)\right\} \quad (21)$$

ただし　$K(k)$：第一種完全楕円積分

$\Pi(\frac{\pi}{2};c_1,k),\Pi(\frac{\pi}{2}:c_2,k)$：第三種完全楕円積分

$$k^2=\frac{4rR}{x^2+(r+R)^2}$$

$$c_1=\frac{2r}{\sqrt{x^2+r^2}-r}$$

$$c_2=-\frac{2r}{\sqrt{x^2+r^2}+r}$$

(21)によれば$W_{b\theta}^1$は第一種及び第三種完全楕円積分で表し得ることが分かる。しかるに付録に示すように一般に第三種完全楕円積分はヤコビーの楕円関数と第一種，第二種楕円積分により表すことができる。すなわち

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}:c,k\right)=\int_0^1\frac{du}{(1+cu^2)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

$$=K(k)-\frac{sn(a,k)}{cn(a,k)\,dn(a,k)}\ \{E(k)a-K(k)E(a,k)\} \tag{22}$$

ただし　$C=-k^2 sn\ (a,k)$

sn, cn, dn：ヤコビーの楕円関数

$K(k)$, $E(k)$：第一種，第二種完全楕円積分

$$E(a,k)=\int_0^{sn(a,k)}\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}du$$

以下に(22)を用いて(21)に含まれる$\Pi(\frac{\pi}{2}:c_1,k)$, $\Pi(\frac{\pi}{2}:c_2,k)$を具体的に評価する。(22)から明らかなようにaはcにより変化する。以下c_1に対するaをa_1で，またc_2に対するaをa_2で示す。さて(22)より

$$c_1=-k^2 sn\ (a_1,k)\ >0$$

であるから$sn\ (a_1,k)$は次のようになる。

$$sn(a_1,k)-i\sqrt{\frac{c_1}{k^2}} \tag{23}$$

ただし　$i=\sqrt{-1}$

いま$a_1\equiv ia_1'$（a_1'：実数）と置くと(23)より次式を得る。

$$sn(a_1',k')=\sqrt{\frac{c_1}{c_1+k^2}} \tag{24}$$

これからa_1は次式で表されることが分かる。

$$a_1=ia_1' \tag{25}$$

$$a_1'=\int_0^{\sqrt{\frac{c_1}{c_1+k^2}}}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}}=F(\varphi_1,k')$$

ただし　$k'^2=1-k^2$, $\sin\varphi_1=\sqrt{\dfrac{c_1}{c_1+k^2}}$

$F(\varphi_1,k')$：第一種楕円積分

主変数が虚数のときのsn, cn, dn, $E\ (a,k)$については次の関係がある。

$$\left.\begin{aligned}sn(a_1,k)&=sn(ia_1',k)=i\frac{sn(a_1',k')}{cn(a_1',k')}\\ cn(a_1,k)&=cn(ia_1',k)=\frac{1}{cn(a_1',k')}\\ dn(a_1,k)&=dn(ia_1',k)=\frac{dn(a_1',k')}{cn(a_1',k')}\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

また　$E\ (a_1,k)\ =E\ (ia_1',k)$

$$=i\left\{a_1'+\frac{sn(a_1',k')\,dn(a_1',k')}{cn(a_1',k')}-E(a_1',k')\right\} \tag{27}$$

ただし　$a_1'=F(\varphi_1,k')$

$$E(a_1',k')=\int_0^{sn(a_1',k')}\sqrt{\frac{1-k'^2u^2}{1-u^2}}du=E(\varphi_1,k')$$

$E(\varphi_1,k')$：第二種楕円積分

(22), (24), (25), (26), (27)を用いると$\Pi(\frac{\pi}{2}:c_1,k)$は次式で表される。

$$\Pi(\frac{\pi}{2}:c_1,k)=\frac{k^2}{c_1+k^2}K(k)-\frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_1+k^2}\sqrt{c_1+1}}$$
$$\times\left[\{K(k)-E(k)\}F(\varphi_1,k')-K(k)E(\varphi_1,k')\right] \tag{28}$$

$c_1=\dfrac{2r}{\sqrt{x^2+r^2}-r}$であるから(28)はさらに次のように展開される。

$$\begin{aligned}\Pi(\frac{\pi}{2}:c_1,k)&=\frac{2R(\sqrt{x^2+r^2}-r)}{(\sqrt{x^2+r^2}+R)^2}K(k)\\ &-\frac{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}{|x|}\frac{\sqrt{x^2+r^2}-r}{\sqrt{x^2+r^2}+R}\\ &\times\left[\{K(k)-E(k)\}F(\varphi_1,k')-K(k)E(\varphi_1,k')\right]\end{aligned} \tag{29}$$

次に$\Pi(\frac{\pi}{2}:c_2,k)$について検討する。$c_2<0$であるから$c_2=c_2'(c_2'>0)$と置く。しからば(22)より

$$sn(a_2,k)=\sqrt{\frac{c_2'}{k^2}} \tag{30}$$

$c_2'=\dfrac{2r}{\sqrt{x^2+r^2}+r}$であるから$\dfrac{c_2'}{k^2}-1=\dfrac{(\sqrt{x^2+r^2}-R)^2}{2R(\sqrt{x^2+r^2}+r)}>$ 0である。すなわち$\sqrt{\dfrac{c_2'}{k^2}}>1$である。したがって(30)を満たす$a_2$は一般に複素数となる。それで$a_2$は次式で表されるものと考えることにする。

$$a_2=K(k)-iy_2 \tag{31}$$

ただし　y_2：実数

(30), (31)よりy_2は次のように定まる。

$$sn(a_2,k)=sn(k-iy_2,k)=\frac{1}{dn(y_2,k')}=\sqrt{\frac{c_2'}{k^2}}$$

すなわち
$$\left.\begin{aligned}dn(y_2,k')&=\sqrt{\frac{k^2}{c_2'}}\\ sn(y_2,k')&=\frac{1}{k'}\sqrt{1-\frac{k^2}{c_2'}}\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

あるいは

$$y_2=\int_0^{\frac{1}{k'}\sqrt{1-\frac{k^2}{c_2'}}}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}}=F(\varphi_2,k') \tag{33}$$

ただし　$F(\varphi_2, k')$：第一種楕円積分

$$\sin\varphi_2=\frac{1}{k'}\sqrt{1-\frac{k^2}{c_2'}}$$

(30)から

$$\left.\begin{aligned} cn(a_2, k)&=i\sqrt{\frac{c_2'}{k^2}-1} \\ dn(a_2, k)&=\sqrt{1-c_2'} \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

また

$$E(a_2, k)=E\{K(k)-iy_2, k\}$$
$$=E(k)-i\left\{y_2-E(y_2, k')+\sqrt{1-c_2}\sqrt{1-\frac{k^2}{c_2'}}\right\} \quad (35)$$

ただし　$E(y_2, k')=\int_0^{sn(y_2,k')}\sqrt{\frac{1-k'^2u^2}{1-u^2}}du=E(\varphi_2, k')$

したがって(22), (30), (33), (34), (35)より$\Pi(\frac{\pi}{2}: c_2, k)$は次式で表される。

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}: c_2, k\right)=-\frac{\sqrt{\frac{c_2'}{k^2}}}{\sqrt{1-c_2'}\sqrt{\frac{c_2'}{k^2}-1}}$$
$$\times\left[\{K(k)-E(k)\}\ F(\varphi_2, k')-K(k)E(\varphi_2, k')\right] \quad (36)$$

ただし$F(\varphi_2, k')$，$E(\varphi_2, k')$：第一種，第二種楕円積分

$$\sin\varphi_2=\frac{1}{k'}\sqrt{1-\frac{k^2}{c_2'}}$$

さらに　$c_2'=\dfrac{2r}{\sqrt{x^2+r^2}+r}$を用いて上式を展開すると次のようになる。

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}: c_2, k\right)=-\frac{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}{|x|}\ \frac{\sqrt{x^2+r^2}+r}{|\sqrt{x^2+r^2}-R|}$$
$$\times\left[\{K(k)-E(k)\}\ F(\varphi_2,k')-K(k)E(\varphi_2,k')\right] \quad (37)$$

ただし

$$\sin\varphi_2=\frac{|\sqrt{x^2+r^2}-R|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}$$

(37)は$|\sqrt{x^2+r^2}-R|$を含んでいるがこの絶対値を示す記号を取り除いても(37)の値は不変である。したがって$\Pi(\frac{\pi}{2}: c_2, k)$は次式で表すことができる。

$$\Pi\left(\frac{\pi}{x}: c_2, k\right)=-\frac{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}{|x|}\ \frac{\sqrt{x^2+r^2}+r}{\sqrt{x^2+r^2}-R}$$
$$\times\left[\{K(k)-E(k)\}F(\varphi_2, k')-K(k)E(\varphi_2, k')\right] \quad (38)$$

ただし

$$\sin\varphi_2=\frac{\sqrt{x^2+r^2}-R}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}$$

さて(29), (38)のΠを用いると(21)の$W^1_{b\theta}$は次のようになる。

$$W^1_{b\theta}=-\frac{\gamma_p x}{\pi r}\ \frac{1}{\sqrt{x_2+(r+R)^2}}\ \frac{\sqrt{x^2+r^2}}{\sqrt{x^2+r^2}+R}\ K(k)$$
$$-\frac{\gamma_p}{2\pi r}\frac{x}{|x|}\Big[\{K(k)-E(k)\}\{F(\varphi_1, k') \quad (40)$$
$$+F(\varphi_2, k')\}-K(k)\{E(\varphi_1, k')+E(\varphi_2, k_1')\}\Big]$$

(40)によれば$W^1_{b\theta}$は$F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$の第一種，第二種楕円積分と$K(k)$，$E(k)$の第一種，第二種完全楕円積分により表され，これらはいずれも例えば数表により値を求めることができる。しかしながら$\{F(\varphi_1, k')+F(\varphi_2, k')\}$，$\{E(\varphi_1, k')+E(\varphi_2, k')\}$はいずれも上限の異なる同種の楕円積分の和であり楕円積分の加法定理等を用いればさらに簡単化されそうである。以下この点について検討する。まず(27), (33)より

$$F(\varphi_1, k')+F(\varphi_2, k')=a_1'+y_2$$

となるから$(a_1'+y_2)$が簡単な形で求まれば都合がよい。それでまず$sn(a_1'+y_2, k')$をヤコビーの楕円関数の加法定理を用いて展開し，次の関係を用いて$sn(a_1'+y_2, k')$の値を求める。

$$sn(a_1', k')=\frac{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}{\sqrt{x^2+r^2}+R}$$
$$sn(y_2, k')=\frac{\sqrt{x^2+r^2}-R}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}$$

しからば$sn(a_1'+y_2, k')$として次の値を得る。

$$sn(a_1'+y_2, k')=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}} \quad (41)$$

一般に$sn(z, k')$はzについての周期関数であるから(41)の関係のみから$(a_1'+y_2)$を無条件で定めることはできない。しかし$sn(z, k')$の性質を考慮すると(41)から$(a_1'+y_2)$は付帯条件を付けることにより次のように表すことができる。

$$a_1'+y_2=2K(k')$$
$$-\int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}} \quad (42)$$

$$for\quad a_1'+y_2>K(k')$$

$$=\int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}}$$

$$\text{for}\quad a_1'+y_2<K(k')$$

しかし(42)は $(a_1'+y_2)$ の値が不明であるから直接には役に立たない。さて(42)の付帯条件は次式である。

$$a_1'+y_2\gtrless K(k')$$

これを書きかえると

$$y_2\gtrless K(k')-a_1'$$

y_2も$\{K(k')-a_1'\}$もともに$K(k')$よりは小さいことは明らかであるから上式両辺のsnをとっても不等号の向きは変わらない。すなわち(42)の付帯条件は次式と同等である。

$$sn(y_2,k')\gtrless sn\ \{K(k')-a_1',k'\} \tag{43}$$

$$sn\{K(k')-a_1',k'\}=\frac{cn(a_1',k')}{dn(a_1',k')}$$

であるから(43)は次のようになる。

$$\frac{\sqrt{x^2+r^2}-R}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}\gtrless\frac{\sqrt{x^2+r^2}-r}{|x|} \tag{44}$$

しかるに(44)において$r=R$とすれば右辺と左辺の値が同じになる。したがって(44)の付帯条件は

$$r\gtrless R \tag{45}$$

と同じことになる。(42)の付帯条件のかわりに(45)の条件を用いれば $(a_1'+y_2)$ ははっきりと定まる。すなわち

$$F(\varphi_1,k')+F(\varphi_2,k')=a_1'+y_2 \tag{46}$$

$$=2K(k')-\int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}}\qquad \text{for}\ \ r>R$$

$$=\int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}}\qquad \text{for}\ \ r<R$$

次に$\{E(\varphi_1,k')+E(\varphi_2,k')\}$について検討する。(27)，(35)より

$$E(\varphi_1,k')+E(\varphi_2,k')=E(a_1',k')+E(y_2,k')$$

となるから$\{E(a_1',k')+E(y_2,k')\}$が簡単な形に求まると都合がよい。Eについての加法定理によれば次の関係が成立する。

$$E(a_1',k')+E(y_2,k')=E(a_1'+y_2,k')$$
$$+k'^2sn(a_1',k')sn(y_2,k')sn(a_1'+y_2,\ k') \tag{47}$$

(47)の第一項は次式で与えられる。

$$E(a_1'+y_2,k')=\int_0^{a_1'+y_2}dn^2u\,du \tag{48}$$

$(a_1'+y_2)$は(46)により定まるので(48)で$E(a_1'+y_2,k')$を求める場合に特別な問題はないが，(48)を以下のようにもう少し分かりやすい形に書きかえておく。(48)の被積分関数dnuは$2K(k')$を周期とする周期関数である。したがって例えば$a_1'+y_2>K(k')$の場合には(48)は次のように書くことができる。

$$E(a_1'+y_2,k')=2E(k')-\int_0^{2K(k')-(a_1'+y_2)}dn^2u\,du$$

$$=2E(k')-\int_0^{sn\{2K(k')-(a_1'+y_2)\}}\sqrt{\frac{1-k'^2u^2}{1-u^2}}du$$

$$=2E(k')-\int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}}\sqrt{\frac{1-k'^2u^2}{1-u^2}}du \tag{49}$$

$a_1'+y_2<K(k')$の場合にも同様に考えて変形することができる。したがって(47)，(49)から次の関係が求まる。

$$E(\varphi_1,k')+E(\varphi_2,k')=E(a_1',k')+E(y_2,k')$$

$$=2E(k')-\int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}}\sqrt{\frac{1-k'^2u^2}{1-u^2}}du \tag{50}$$

$$+\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}\frac{\sqrt{x^2+r^2}-R}{\sqrt{x^2+r^2}+R}\qquad \text{for}\quad r>R$$

$$=\int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}}\sqrt{\frac{1-k'^2u^2}{1-u^2}}du$$

$$+\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}\frac{\sqrt{x^2+r^2}-R}{\sqrt{x^2+r^2}+R}\qquad \text{for}\quad r<R$$

(40)，(46)，(50)より$W^1_{b\theta}$は次のようになる。

$$W^1_{b\theta}=\frac{\gamma_p}{2r}\frac{x}{|x|}H(r-R) \tag{51}$$

$$-\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{K(k)}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}+\frac{\gamma_p}{2\pi r}\frac{x}{|x|}\frac{r-R}{|r-R|}$$

$$\times\Big[\{K(k)-E(k)\}F(\varphi,k')-K(k)E(\varphi,k')\Big]$$

ただし　$\sin\varphi=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}$

$$H(r-R)=1 \quad for \quad r>R$$
$$=0 \quad for \quad r<R$$

次に$W_{b\theta}^2$は(16)により次式で与えられる。

$$W_{b\theta}^2=-\frac{\gamma_p}{4\pi}\frac{xr}{\sqrt{x^2+r^2}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\theta}{x^2+r^2\sin^2\theta}d\theta$$

θについての定積分の値を用いると$W_{b\theta}^2$は次式となる。

$$W_{b\theta}^2=-\frac{\gamma_p}{2r}\frac{x}{|x|}+\frac{\gamma_p x}{2r}\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} \tag{52}$$

(51)，(52)よりプロペラ束縛渦による誘導速度のθ方向成分$W_{b\theta}$は次式で計算することができる。

$$W_{b\theta}=\frac{\gamma_p}{2r}\frac{x}{|x|}\{H(r-R)-1\}+\frac{\gamma_p x}{2r}\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}$$
$$-\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{K(k)}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}+\frac{\gamma_p}{2\pi r}\frac{x}{|x|}\frac{r-R}{|r-R|}$$
$$\times\Big[\{K(k)-E(k)\}F(\varphi,k')-K(k)E(\varphi,k')\Big] \tag{53}$$

ただし

$$\sin\varphi=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}},\quad k^2=\frac{4rR}{x^2+(r+R)^2}$$

$$k'^2=1-k^2$$

$W_{b\theta}$の(53)に示す計算式は楕円積分のみを含んでおり極めて分かりやすく数値計等も簡単である。(53)から直ちに分かる$W_{b\theta}$のいくつかの性質を次に示しておく。

(1)　$W_{b\theta}$はxについての奇関数である。(2)　$x=0$で不連続である。(3)　$x=\pm\infty$で0となる。

これらの性質は流力的直感とも一致する。

3．2　自由渦による誘導速度のθ方向成分$W_{f\theta}$

$W_{f\theta}$は(8)，(10)，(11)において$r''=R$，$\dfrac{dr''}{d\theta''}=0$と置けばよい。翼先端自由渦による誘導速度の$\theta$方向成分は次のようになる。

$$W_{f\theta}^{t}=\frac{\gamma_p h}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta'$$
$$\times\int_{\theta'}^{\infty}\frac{d\theta''}{\{(x-x'')^2+r^2+R^2-2rR\cos(\theta-\theta'')\}^{3/2}}$$
$$\times\left\{r-R\cos(\theta-\theta'')-R\frac{x-x''}{h}\sin(\theta-\theta'')\right\} \tag{54}$$

ただし　　$x''=h(\theta''-\theta')$

まず次の関係によりθ''をφに置換する。

$$\varphi=\theta''-\theta'-\frac{x}{h}=\frac{1}{h}(x''-x) \tag{55}$$

次にはじめにθ'に関する定積分の値を求める。しからば(54)は次式となる。

$$W_{f\theta}^{t}=\frac{\gamma_p h}{4\pi}\int_0^{2\pi}(r-R\cos\theta)d\theta$$
$$\times\int_{-\frac{x}{h}}^{\infty}\frac{d\varphi}{\{h\varphi^2+r^2+R^2-2rR\cos\theta\}^{3/2}} \tag{56}$$

さらにφに関する定積分の値を求めると上式は次のようになる。

$$W_{f\theta}^{t}=\frac{\gamma_p}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r-R\cos\theta}{r^2+R^2-2rR\cos\theta}$$
$$\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2+R^2-2rR\cos\theta}}\right)d\theta \tag{57}$$

上式において$\theta\equiv2\theta'$と置きかえ，さらに$\int_0^{\pi}d\theta'=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)d\theta'$の第二項で$\theta'\equiv\pi-\theta''$と置きかえると(57)は結局次のように変形される。

$$W_{f\theta}^{t}=\frac{\gamma_p}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r-R+2R\sin^2\theta}{r^2+R^2-2rR+4rR\sin^2\theta}$$
$$\times\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2+R^2-2rR+4rR\sin^2\theta}}\right)d\theta \tag{58}$$

さらに$cos\theta\equiv u$の置きかえを行う。しからば$W_{f\theta}^{t}$は次式となる。

$$W_{f\theta}^{t}=\frac{\gamma_p}{4r}+\frac{\gamma_p}{4r}\frac{r-R}{|r-R|}+\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{1}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}$$
$$\times\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left\{1-\frac{4rR}{x^2+(r+R)^2}u^2\right\}}}$$
$$+\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{r-R}{r+R}\frac{1}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}$$
$$\times\int_0^1\frac{du}{\left(1-\frac{4rR}{(r+R)^2}u^2\right)\sqrt{(1-u^2)\left\{1-\frac{4rR}{x^2+(r+R)^2}u^2\right\}}} \tag{59}$$

あるいは楕円積分を用いて書きかえると次のようになる。

$$W_{f\theta}^{t}=\frac{\gamma_p}{4r}\left\{1+\frac{r-R}{|r-R|}\right\}$$

$$+\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{1}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}K(k)$$

$$+\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{r-R}{r+R}\frac{1}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}\Pi\left(\frac{\pi}{2}:c_3,k\right) \tag{60}$$

ただし　$k^2=\dfrac{4rR}{x^2+(r+R)^2}$

K,Π：第一種，第三種完全楕円積分

$c_3=-\dfrac{4rR}{(r+R)^2}$

(60)によれば$r''=R$の場合の翼先端自由渦による誘導速度のθ方向成分は第一種，第三種完全楕円積分で表し得ることが分かる。以下$\Pi\left(\frac{\pi}{2}:c_3,k\right)$の具体的評価を行う。$c_3<0$であるから$c_3\equiv-c_3'$とおく。$c_3$に対応する$a$を$a_3$で示すことにすれば(22)から次の関係が成立する。

$$sn(a_3,k)=\sqrt{\frac{c_3'}{k^2}} \tag{61}$$

しかるに$\sqrt{\dfrac{c_3'}{k^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}{r+R}>1$であるから(61)を満たす$a_3$は複素数となる。それで$a_3$は次式で表されると考えることにする。

$$a_3=K(k)-iy_3,\quad (y_3：実数) \tag{62}$$

(62)を(61)に入れるとy_3が定まる。すなわち

$$sn(a_3,k)=sn\{K(k)-iy_3,k\}=\frac{1}{dn(y_3,k')}=\sqrt{\frac{c_3'}{k^2}}$$

したがって

$$sn(y_3,k')=\frac{1}{k'}\sqrt{1-\frac{k^2}{c_3'}}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}} \tag{63}$$

あるいは

$$y_3=\int_0^{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}}\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}}=F(\varphi,k') \tag{64}$$

また

$$E(a_3,k)=E\{K(k)-iy_3,k\}$$

$$=E(k)-i\left\{y_3-E(y_3,k')+\sqrt{1-c_3'}\sqrt{1-\frac{k^2}{c_3'}}\right\} \tag{65}$$

ただし　$y_3=F(\varphi,k')$

$E(y_3,k')=E(\varphi,k')$

したがって(22)，(61)，(63)，(64)，(65)を用いれば$\Pi\left(\frac{\pi}{2}:c_3,k\right)$は次式となる。

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}:c_3,k\right)=-\frac{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}{|x|}\frac{r+R}{r-R}$$

$$\times\left[\{K(k)-E(k)\}F(\varphi,k')-K(k)E(\varphi,k')\right] \tag{66}$$

したがって$W_{f\theta}^{t}$は次式となる。

$$W_{f\theta}^{t}=\frac{\gamma_p}{4r}\left(1+\frac{r-R}{|r-R|}\right)+\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{K(k)}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}$$

$$-\frac{\gamma_p}{2\pi r}\frac{x}{|x|}\frac{r-R}{|r-R|}$$

$$\times\left[\{K(k)-E(k)\}F(\varphi,k')-K(k)E(\varphi,k')\right] \tag{67}$$

次に軸中心渦による誘導速度のθ方向成分は(10)により次のように与えられる。

$$W_{f\theta}^{h}=-\frac{\gamma_p}{2r}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}\right) \tag{68}$$

したがって(67)，(68)より自由渦による誘導速度のθ方向成分$W_{f\theta}$は次式となる。

$$W_{f\theta}=\frac{\gamma_p}{2r}\{H(r-R)-1\}-\frac{\gamma_p}{2r}\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$+\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{K(k)}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}}-\frac{\gamma_p}{2\pi r}\frac{x}{|x|}\frac{r-R}{|r-R|}$$

$$\times\left[\{K(k)-E(k)\}F(\varphi,k')-K(k)E(\varphi,k')\right] \tag{69}$$

(69)より明らかなように$r''=R$の場合のプロペラ自由渦の誘導速度のθ方向成分の計算式も第一種，第二種楕円積分のみを含む簡単で分かりやすい式となる。(69)によると数値計算も簡単である。(69)から直ちに分かる$W_{f\theta}$のいくつかの性質を次に示しておく。(1)　$W_{f\theta}$はxに対して連続である。(2)　$x=-\infty$で0である。(3)　$r<R$では$x=\infty$で$\left(-\frac{\gamma_p}{r}\right)$となる。

3．3　プロペラ誘導速度のθ方向成分W_θ

W_θは次式で計算される。

$$W_\theta=W_{b\theta}+W_{f\theta} \tag{70}$$

(53)，(69)よりW_θとして次式を得る。

$$W_{\theta}=\frac{\gamma_p}{2r}\left(1+\frac{x}{|x|}\right)\{H(r-R)-1\} \tag{71}$$

(71)から明らかなように翼先端自由渦が$r''=R$の円筒面に分布している場合はプロペラの誘導速度のθ方向成分の計算式は極めて簡単となる。(71)より直ちにW_{θ}の性質として次の点が明らかになる。(1)　$x<0$ではrにかかわらず$W_{\theta}=0$。(2)　$x>0$では，$r>R$のときは$W_{\theta}=0$，$r<R$では$W_{\theta}=-\frac{\gamma_p}{r}$。これらの性質は流力的直感とも一致する。

4．定積分$\int_0^{\infty}e^{-|x|\lambda}J_1(r\lambda)J_0(R\lambda)d\lambda$の値について

ここでは次の定積分Ｉの値について検討する。

$$\mathrm{I}=\int_0^{\infty}e^{-|x|\lambda}J_1(r\lambda)J_0(R\lambda)\,d\lambda \tag{72}$$

ただし　J_1，J_0：ベッセル関数

この値が簡単に求まると翼先端自由渦分布面の半径r''がx''で変化する場合の誘導速度の計算に役立つと思う。しかるにＩの値を普通の方法で求めると極めて複雑となる。例えば$J_1(r\lambda)$を冪級数に展開してＩを$\int_0^{\infty}e^{-x\lambda}J_0(R\lambda)\lambda^n d\lambda$の級数に変形する。各項の定積分の値を超幾何関数で表す。このようにして変形するとＩは次式で与えられる。[2)]

$$\mathrm{I}=\frac{r}{2x^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}\left(-\frac{r^2}{4x^2}\right)^m \times F\left(-m,-1-m,1,\frac{R^2}{r^2}\right) \tag{73}$$

ただし　F：超幾何関数

Fは級数表示することもできる。すなわち

$$F\left(-m,-1-m,1,\frac{R^2}{r^2}\right)=\frac{1}{\Gamma(-m)\Gamma(-1-m)} \times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-m+n)\Gamma(-1-m+n)}{(n!)^2}\left(\frac{R^2}{r^2}\right)^n \tag{74}$$

ただし　Γ：ガンマー関数

また定積分表示をすることもできる。すなわち

$$F\left(-m,-1-m,1,\frac{R^2}{r^2}\right)=\frac{1}{\Gamma(-1-m)} \times\int_0^1\frac{(1-t)^{m+1}}{t^{m+2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}t\right)^m}dt \tag{75}$$

しかしながら(73)，(74)あるいは(73)と(75)を用いてＩの値を求めると計算が複雑となり不便である。以下Ｉの計算法について３の結果を参考にして若干の検討を行う。

$r''=R$の場合の$W_{f\theta}^{t}$は(56)によれば次式で表される。

$$W_{f\theta}^{t}=\frac{\gamma_p h}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta \times\int_{-\frac{x}{h}}^{\infty}\frac{(r-R\cos\theta)\,d\varphi}{\{h^2\varphi^2+r^2+R^2-2rR\cos\theta\}^{3/2}} \tag{76}$$

しかるに

$$\frac{r-R\cos\theta}{\{h^2\varphi^2+r^2+R^2-2rR\cos\}^{3/2}} =-\frac{d}{dr}\frac{1}{\sqrt{h^2\varphi^2+r^2+R^2-2rR\cos\theta}} \tag{77}$$

次の関係が成立する。

$$\frac{1}{\sqrt{h^2\varphi^2+r^2+R^2-2rR\cos\theta}} =\int_0^{\infty}e^{-h|\varphi|\lambda}\{J_0(r\lambda)J_0(R\lambda) +2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(r\lambda)J_n(R\lambda)\cos n\theta\}\,d\lambda \tag{78}$$

したがって

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{\sqrt{h^2\varphi^2+r^2+R^2-2rR\cos\theta}} =\int_0^{\infty}e^{-h|\varphi|\lambda}\lambda\{J_0'(r\lambda)J_0(R\lambda) +2\sum_{n=1}^{\infty}J'_n(r\lambda)J_n(R\lambda)\cos n\theta\}\,d\lambda \tag{79}$$

(76)，(77)，(79)より$W_{f\theta}^{t}$は次式となる。

$$\begin{aligned}W_{f\theta}^{t}=&r_p\int_0^{\infty}J_1(r\lambda)J_0(R\lambda)\,d\lambda\\ &-\frac{\gamma_p}{2}\int_0^{\infty}e^{-|x|\lambda}J_1(r\lambda)J_0(R\lambda)\,d\lambda \quad for \quad x>0\\ &=\frac{\gamma_p}{2}\int_0^{\infty}e^{-|x|\lambda}J_1(r\lambda)J_0(R\lambda)\,d\lambda \quad for \quad x<0\end{aligned} \tag{80}$$

しかるに

$$\int_0^{\infty}J_1(r\lambda)J_0(R\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{r}H(r-R) \tag{81}$$

したがって

$$W_{f\theta}^{t}=\frac{\gamma_p}{r}H(r-R)-\frac{\gamma_p}{2}\int_0^{\infty}e^{-|x|\lambda}J_1(r\lambda)J_0(R\lambda)\,d\lambda \quad \text{for} \quad x>0 \tag{82}$$

$$=\frac{\gamma_p}{2}\int_0^{\infty}e^{-|x|\lambda}J_1(r\lambda)J_0(R\lambda)\,d\lambda \quad \text{for} \quad x<0$$

一方，$W_{f\theta}^{t}$は(67)より次式で表される。

$$W_{f\theta}^{t}=\frac{\gamma_p}{2r}H(r-R)+\frac{\gamma_p x}{2\pi r}\frac{K(k)}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}} -\frac{\gamma_p}{2\pi r}\frac{x}{|x|}\frac{r-R}{|r-R|} \times\left[\{K(k)-E(k)\}F(\varphi,k')-K(k)E(\varphi,k')\right] \tag{83}$$

(82)，(83)からＩの値が求まるが，このＩは$x \gtrless 0$に対して同じ値となる。すなわち

$$\mathrm{I}=\int_0^{\infty}e^{-|x|\lambda}J_1(r\lambda)J_0(R\lambda)\,d\lambda =\frac{1}{r}H(r-R)-\frac{1}{\pi}\frac{|x|}{r}\frac{K(k)}{\sqrt{x^2+(r+R)^2}} +\frac{1}{\pi r}\frac{r-R}{|r-R|} \times\left[\{K(k)-E(k)\}F(\varphi,k')-K(k)E(\varphi,k')\right] \tag{84}$$

ただし

$$\sin\varphi=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+(r-R)^2}}$$

(84)のＩの計算式は(73)に較べるとはるかに簡単である。なお(84)の誘導に当たってはRは定数とした。しかし(84)のみで考える限りRをr''で置きかえてもさしつかえない。

5. あとがき

本論で得られた成果を要約すると次のとおりである。

(1)　まずウォーター・ジェット推進装置への適用を念頭において，翼先端から流出する自由渦糸の位置を任意に与えた場合のプロペラ誘導速度計算式について定式化を行った。

(2)　次いで最も基本的である，翼先端自由渦糸が円筒面上に分布する場合について，プロペラ誘導速度のθ方向成分の計算に使用できる計算式を，束縛渦と自由渦の誘導速度に分けて求めた。計算式はともに極めて簡単であり実用性が大きいと思われる。

(3)　一つの定積分の値を(2)の考察の結果を応用して求めた。これはウォーター・ジェット推進装置の場合のプロペラ誘導速度の計算に役立つと思われる。

記号の説明

x, y, z	：直角座標
x, r, θ	：円筒座標
x', r', θ'	：束縛渦糸要素位置の円筒座標
x'', r'', θ''	：翼先端自由渦糸要素位置の円筒座標
R	：プロペラ半径
u	：一様流速
ω	：プロペラ回転角速度
h	：翼先端自由渦糸のピッチ
γ_p	：束縛渦の密度
$W_{fx}^{t}, W_{fr}^{t}, W_{f\theta}^{t}$	：翼先端自由渦による誘導速度のx，r，θ方向成分
$W_{fx}^{h}, W_{fr}^{h}, W_{f\theta}^{h}$	：軸中心自由渦による誘導速度のx，r，θ方向成分
$W_{fx}, W_{fr}, W_{f\theta}$	：自由渦による誘導速度のx，r，θ方向成分
$W_{bx}, W_{br}, W_{b\theta}$	：束縛渦による誘導速度のx，r，θ方向成分
W_x, W_r, W_θ	：プロペラ誘導速度のx，r，θ方向成分
$K(k), E(k)$	：第一種，第二種完全楕円積分
$\Pi(\frac{\pi}{2}: c, k)$	：第三種完全楕円積分
$sn,\ cn,\ dn$	：ヤコビーの楕円関数

$$E(a,k) = \int_0^{a}dn^2(u,k)\,du=\int_0^{sn(a,k)}\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}\,du$$

$F(\varphi,k)$，$E(\varphi,k)$：第一種，第二種楕円積分

$$k^2 = \frac{4rR}{x^2+(r+R)^2}$$

$$k'^2 = 1-k^2$$

$$H(r-R) = 1 \quad \text{for} \quad r>R$$

$$= 0 \quad \text{for} \quad r<R$$

J_n	：ベッセル関数
$F(\alpha,\beta,\gamma,z)$	：超幾何関数
$\Gamma(n)$	：ガンマー関数

参考文献

1) 高木又男：造船学会論文集，第108号，1960.

2) 例えば大槻義彦訳，数学大公式集，丸善，1986.

付録：第三種楕円積分の変形

第三種楕円積分$\Pi(\varphi : c, k)$は次式で与えられる。

$$\Pi(\varphi : c, k)=\int_0^{\sin\varphi}\frac{du}{(1+cu^2)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \tag{1a}$$

$u \equiv sn(z, k)$によりuをzに置換すると上式は次式となる。

$$\Pi(\varphi : c, k)=\int_0^{z_0}\frac{dz}{1+c\ sn^2(z, k)} \tag{2a}$$

ただし　　$sn(z_0, k)=\sin\varphi$

いま　　$c \equiv -k^2 sn(a, k)$　　(3a)

とおくと（2a）は次式となる。

$$\Pi(\varphi : c, k)=z_0+k^2 sn^2(a, k)\times\int_0^{z_0}\frac{sn^2(z, k)\,dz}{1-k^2 sn^2(a, k)\,sn^2(z, k)} \tag{4a}$$

さて次式で表されるZ(z,k)なる関数を導入する。

$$Z(z, k)=E(z, k)-\frac{E(k)}{K(k)}z \tag{5a}$$

ただし　　$E(z, k)=\int_0^z dn^2(z, k)\,dz$

$$=\int_0^{sn(z,k)}\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}du$$

$K(k)$，$E(k)$：第一種，第二種完全楕円積分

$Z(z, k)$の加法定理は次式で示される。

$$Z(z-a, k)-Z(z+a, k)+2Z(z, k)$$
$$=k^2 sn(a, k)\,sn(z, k)\{sn(z+a, k)+sn(z-a, k)\} \tag{6a}$$

次の関係がある。

$$sn(z+a, k)+sn(z-a, k)=\frac{2cn(a, k)\,dn(a, k)\,sn(z, k)}{1-k^2 sn^2(a, k)\,sn^2(z, k)} \tag{7a}$$

（6a），（7a）より次式を得る。

$$\frac{sn^2(z, k)}{1-sn^2(a, k)\,sn^2(z, k)}$$
$$=\frac{Z(z-a, k)-Z(z+a, k)+2Z(a, k)}{2k^2 sn(a, k)\,cn(a, k)\,dn(a, k)} \tag{8a}$$

したがって

$$\Pi(\varphi : c, k)=z_0+\frac{sn(a, k)}{2\,cn(a, k)\,dn(a, k)}\times\int_0^{z_0}\{Z(z-a, k)-Z(z+a, k)+2Z(a, k)\}dz \tag{9a}$$

しかるに次の関係あり。

$$\int_0^{z_0}Z(z-a, k)\,dz=\int_{-a}^{z_0-a}Z(z, k)\,dz$$

$$\int_0^{z_0}Z(z+a, k)\,dz=\int_0^{z_0+a}Z(z, k)\,dz$$

また$Z(z, k)$はzの奇関数であるから

$$\int_0^a Z(z-z_0, k)\,dz=-\int_{z-a}^{z_0}Z(z, k)\,dz$$

$$\int_0^a Z(z+z_0, k)\,dz=\int_{z_0}^{z_0+a}Z(z, k)\,dz$$

これらの関係を用いると次式を得る。

$$\int_0^{z_0}\{Z(z-a, k)-Z(z+a, k)\}dz$$
$$=\int_0^a\{Z(z-z_0, k)-Z(z+z_0, k)\}dz \tag{10a}$$

したがって第三種楕円積分$\Pi(\varphi : c,\ k)$は次のように変形される。

$$\Pi(\varphi : c, k)=\left\{1+\frac{sn(a, k)Z(a, k)}{cn(a, k)\,dn(a, k)}\right\}z_0+\frac{sn(a,k)}{2\,cn(a,k)\,dn(a,k)}\times\int_0^a\left\{Z(z-z_0,k)-Z(z+z_0,k)\right\}dz \tag{11a}$$

さて$\Pi(\varphi : c, k)$で$\varphi=\frac{\pi}{2}$としたものが第三種完全楕円積分である。しかるに$\varphi=\frac{\pi}{2}$のときは$z_0=K(k)$となる。一方$Z(z, k)$は周期が$2K(k)$の周期関数である。

したがって$\varphi=\frac{\pi}{2}$では

$$Z(z-z_0, k)-Z(z+z_0, k)$$
$$=Z\{z-K(k), k\}-Z\{z+K(k), k\}=0$$

となる。したがって第三種完全楕円積分$\Pi(\frac{\pi}{2} : c, k)$は次式で表される。

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}: c, k\right)=\left\{1+\frac{sn(a,k)\mathrm{Z}(a,k)}{cn(a,k)\,dn(a,k)}\right\}K(k) \qquad (12a)$$

$\mathrm{Z}(a,k)$は(5a)より次式で表される。

$$\mathrm{Z}(a,k)=E(a,k)-\frac{E(k)}{K(k)}a \qquad (13a)$$

(12a), (13a)より$\Pi\left(\frac{\pi}{2}: c, k\right)$は次式で表される。

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}: c, k\right)=K(k)-\frac{sn(a,k)}{cn(a,k)\,dn(a,k)}$$

$$\times\left\{E(k)a-K(k)E(a,k)\right\} \qquad (14a)$$

ただし　$E(a,k)=\int_0^a dn^2(z,k)\,dz$

$$=\int_0^{sn(a,k)}\sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}}du$$

(14a)によれば，第三種完全楕円積分はヤコビーの楕円関数と第一種，第二種完全楕円積分で表されることが分かる。