島根大学教育学部紀要（自然科学）第21巻　169～179頁　昭和62年12月

ダクト付きプロペラのダクト形状の理論的研究

坂　尾　　　稔*

Minoru SAKAO

A Synthesis on Duct Form of Ducted Propeller

1　ま　え　が　き

風車に水平軸ローターを用いた風力発電装置は風力エネルギーの変換効率が大きく構造も簡単であることから，既に製造された実機もかなりの数に達している。これに関連してローターをダクトで囲むとローターへ流入する風量が増加し変換効率の向上が期待できることも指摘されているが[1)]，ダクト形状と効率の関係については殆ど検討されていない。

一方舶用プロペラにおいても推進効率向上対策の一つとしてプロペラをダクトで囲んだダクト・プロペラが大型低速船に多数採用されてきた。しかしこのダクトの形は主として模型試験結果あるいは実船実績をベースにして経験的に決められている。ダクト・プロペラに関する理論的研究も行なはれているが，与へられたダクト・プロペラの性能の解析研究が大部分でありダクトの最適形状を志向した理論的研究は殆ど行なはれていない。

ダクト付風車とダクト・プロペラのまわりの流れはかなり類似しており，これらの性能を流体力学的に取り扱う場合の手法も共通点が多いと思はれる。

本論は渦理論を用いてダクト付ローターあるいはダクト・プロペラの効率を大きくするダクト形状を求めることを目的とした研究の一部としてダクト・プロペラのダクトの形を決める方法について検討したものである。本論で提案した方法は若干の試行錯誤の部分を含むがその各ステップでは与へられたダクト・プロペラの解析計算が必要である。この場合に使用する解析式については既に多くの研究があるがこれらは被積分関数に特異性を示す楕円積分を含む定積分表示となっており分かりにくく数値計算にも不便である。それで本論ではまず既存の解析式をさらに展開して渦度分布を与へたときの誘導速度，ダクトの形，流量が若干の数表と電卓のみで簡単に数値計算ができるような形に近似的に変形した。更にこれらの解析式を用いてダクトの最適形状を求める方法について考察した。なお本論で使用する記号の説明は末尾にまとめて示す。

* 島根大学教育学部技術科研究室

2　ダクト・プロペラの流力モデル

本論ではダクト・プロペラの流れを次のような基本的考へ方によりモデル化を行なった。まず流体は完全流体とする。またダクト・プロペラを表す特異点は一般的には束縛渦分布と吹出し分布から成るが本論では簡単のため束縛渦のみを採る。またダクト・プロペラのまわりの流れの計算に当っては線形理論を適用することにより簡単化する。このような基本的考へ方にもとづいて更に次のようなモデル化を行なった。

(1)　プロペラ自由渦は翼先端のみから流出する。

(2)　プロペラ翼数は無限大とする。

(3)　ダクトを表す束縛渦は半径 R の円筒面上に分布する。

(4)　プロペラ自由渦ピッチは一定とする。（無限後方）

3　ダクト形状の計算

本文においては，図1に示す円筒座標系を用いる。さてダクトの半径 $r_n(\xi)$ は次式で与へられる[2)]。

$$\frac{1}{R}\frac{dr_n(\xi)}{d\xi}=\frac{W_{pr}(\xi,1)+W_{nr}(\xi,1)}{u_0+W_{px}(\xi,1)+W_{nx}(\xi,1)} \tag{1}$$

ただし $r_n(0)=R$

あるいは座標 ξ を次の関係により t に変換すると(1)は(3)式となる。

$$\xi=\frac{l}{2R}t-\frac{l_1-l_2}{2R} \tag{2}$$

$$W_{pr}(t,1)+W_{nr}(t,1)=\left(\frac{2}{l}\right)\frac{dr_n(t)}{dt}\{u_0+W_{px}(t,1)+W_{nx}(t,1)\} \tag{3}$$

ただし，$r_n\left(\frac{l_1-l_2}{l}\right)=R$

以下(3)に含まれの誘導速度の計算法を示す。

3.1.　$W_{pr}(t,1)$，$W_{px}(t,1)$ の計算

$W_{pr}(t,1)$ は次式で表される[2)]。

$$W_{pro}(t,1)=-\frac{\gamma_p}{4\pi h}\frac{2}{k_p}\{(2-k_p^2)K(k_p)-2E(k_p)\} \quad (4)$$

ただし，

$$k_p^2=\frac{4}{\left(\frac{l}{2R}\right)^2\left(t-\frac{l_1-l_2}{l}\right)^2+4}$$

K，E：第一種，第二種完全楕円積分

$$\frac{h}{R}=\frac{u_0+\sqrt{u_0^2+4\frac{\gamma_p}{2R}\left(\omega R-\frac{\gamma_p}{2R}\right)}}{2\left(\omega R-\frac{\gamma_p}{2R}\right)}$$

また $W_{px}(t,1)$ は次式で与へられる[2]。

$$W_{px}(t,1)=\frac{\gamma_p}{4\pi h}\left\{1+\frac{l}{2R}(t-t_p)k_pK(k_p)\right\} \quad (5)$$

ただし $t_p=\frac{l_1-l_2}{l}$

3.2.　$W_{nr}(t,1)$ の計算

$W_{nr}(\xi,1)$ は次式で与へられる[2]。

$$W_{nr}(\xi,1)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-l_1/R}^{l_2/R}\gamma_n(\xi')(\xi'-\xi)\ F_r(k,1)d\xi' \quad (6)$$

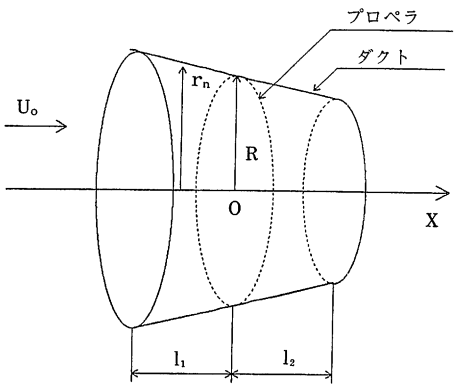

図1　座　標　系

ただし $F_r(k,1)=-k\cdot K(k)+\frac{k}{2}\frac{2-k^2}{1-k^2}E(k)$，

$$k^2=\frac{4}{(\xi'-\xi)^2+4}$$

従来の舶用の大負荷ダクト・プロペラもでダクト長さ l とプロペラ半径 R の比は高々$\frac{l}{R}=0.8$程度であり負荷が減ると$\frac{l}{R}$は更に小となる。本論では$\frac{l}{R}=0.6$程度のショート・ダクトのダクト・プロペラを対象とすることとし以下 (6)式の変形を行う。この場合は$|\xi'-\xi|_{max}=0.6$であるから，$k_{min}=0.958$ となり，k は1に近い。$K(k)$, $E(k)$ の間には次の関係がある。

$$K(k)=\frac{1}{1-k^2}\{2E(k)-(1+k)E(k'')\}, \quad (7)$$

ただし $k''=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$

したがって $F_r(k,1)$ は次のようになる。

$$F_r(k,1)=\frac{1}{1-k^2}\left\{-\left(1+\frac{k^2}{2}\right)E(k)+(1+k)E(k'')\right\}$$

一般に $k''\geq k$ であり $k=0.958$ のときは $k''=0.9998$ となる。したがって以下 $E(k'')\fallingdotseq 1$ と近似する。しからば次の関係が成立する。

$$(\xi'-\xi)F_r(k,1)\fallingdotseq\frac{1}{\xi'-\xi}\cdot F_r'(k,1) \quad (8)$$

ただし $F_r'(k,1)=\frac{4}{k}\left\{(1+k)-\left(1+\frac{k^2}{2}\right)E(k)\right\}$

(8)の $F_r'(k,1)$の値を $|\xi'-\xi|$ を横軸にとって図2に示す。以下 $F_r'(k,1)$ を次式で近似する。

$$F_r'(k,1)\fallingdotseq 2-1.6|\xi'-\xi|^2 \quad (9)$$

(9)による $F_r'(k,1)$ の近似値を図2に併せて示す。$|\xi'-\xi|$ の大きいところの $W_{nr}(\xi,1)$ に対する寄与は小であるのでこの程度の近似で充分と思はれる。(6), (8), (9)より次式を得る。

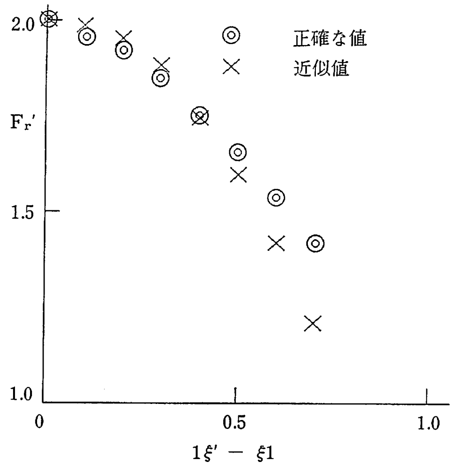

図2　F_r' の正確な値と近似値の比較

$$W_{nr}(\xi,1)\fallingdotseq-\frac{1}{2\pi}P\int_{-l_1/R}^{l_2/R}\frac{\gamma_n(\xi')}{\xi'-\xi}d\xi' +\frac{1.6}{\pi}\int_{-l_1/R}^{l_2/R}(\xi'-\xi)\gamma_n(\xi')d\xi' \quad (10)$$

ただし P：コーシーの主値。

(10)の右辺第一項は二次元翼の誘導速度であり第二項は円環渦の効果を示す。座標を t に変換すると(10)は次式となる。

$$W_{nr}(t,1)\fallingdotseq-\frac{1}{2\pi}P\int_{-1}^{1}\frac{\gamma_n(t')}{t'-t}dt' +\frac{1.6(l/2)^2}{4\pi R^2}\int_{-1}^{1}(t'-t)\gamma_n(t')dt' \quad (11)$$

さて本論の流力モデルではプロペラを表す束縛渦の密度は半径方向に一定である。この場合には一般に $\gamma_n(t)$

は次のように示すことができる[2)]。

$$\gamma_n(t)=\gamma_n{}^0(t)+\gamma_n{}^1(t) \tag{11}$$

ただし $\gamma_n{}^0(t)$：渦の連続分布

$\gamma_n{}^1(t)$：渦の不連続分布にして $t\geq t_p$ で $\gamma_n{}^1(t)=0$

$$t_p=\frac{l_1-l_2}{l}$$

以下 $\gamma_n{}^0(t)$，$\gamma_n{}^1(t)$ に対応する W_{nr} を夫々 $W_{nr}{}^0(t,1)$，$W_{nr}{}^1(t,1)$ で示すことにすれば $W_{nr}(t,1)=W_{nr}{}^0(t,1)+W_{nr}{}^1(t,1)$ となる。

本論では $\gamma_n{}^0(t)$ は二次元翼にならって次式で表す。

$$\gamma_n{}^0(\cos\theta)=u_0\left(C_0\tan\frac{\theta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin n\theta\right) \tag{12}$$

ただし $t=\cos\theta$，C_n：未定常数

また $\gamma_n{}^1(t)$ は次式で表されるものとする。

$$\gamma_n{}^1(t)=\frac{l^2}{4l_1\sqrt{l_1l_2}}\frac{\gamma_p}{h}(1+t)\sqrt{1-t^2}\quad \text{for } t_p\geq t$$
$$=0 \qquad\qquad \text{for } t\geq t_p \tag{13}$$

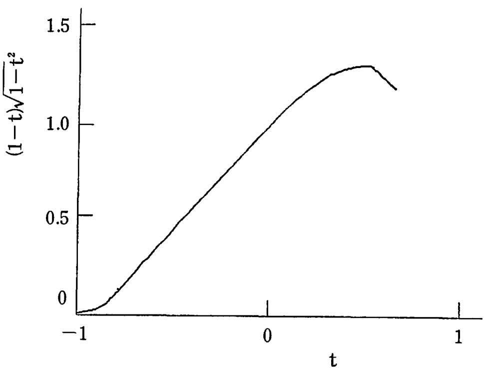

図3　$\gamma_n^1(t)$ の形

(13)式の $\gamma_n{}^1(t)$ の形を図3に示す。$t_p\geq 0.4$ の場合に対しては(13)式の表示は不都合となるが，$t_p\geq 0.4$ の場合は実用上考へる必要はないと思う。

3.2.1.　$W_{nr}{}^0(t,1)$ の計算

$$W_{nr}{}^0(\cos\theta,1)=-\frac{u_0}{2\pi}P\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-\cos\theta}\left(C_0\tan\frac{\varphi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin n\varphi\right)d\varphi \tag{14}$$
$$+\frac{1.6(l/2)^2}{4\pi R^2}u_0\int_0^{\pi}(\cos\varphi-\cos\theta)\left(C_0\tan\frac{\varphi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin n\varphi\right)d\varphi$$

しかるに

$$P\int_0^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi-\cos\theta}d\varphi=\pi\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

の関係があるから(14)式右辺第一項は次のようになる。

$$\text{第一項}=\frac{u_0}{2}\left(C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos n\theta\right)$$

また第二項は次式となる。

$$\text{第二項}=1.6\frac{(l/2)^2}{4R^2}u_0C_0\left(-\frac{1}{2}+\cos\theta\right)$$

したがって(14)式は変数を t になおすと次のようになる。

$$W_{nr}{}^0(t,1)=\frac{u_0}{2}\left\{C_0+C_1t+C_2(2t^2-1)+C_3(4t^3-3t)+\cdots\right\}$$
$$+1.6\frac{(l/2)^2}{4R^2}u_0C_0\left(-\frac{1}{2}+t\right) \tag{15}$$

3.2.2.　$W_{nr}{}^1(t,1)$ の計算

(11)，(13)式より次式を得る。

$$W_{nr}{}^1(\cos\theta,1)=-\frac{1}{2\pi}\frac{l^2}{4l_1\sqrt{l_1l_2}}\frac{\gamma_p}{h}\left(\frac{1}{2}I_0+\frac{1}{4}I_1-\frac{1}{2}I_2-\frac{1}{4}I_3\right) \tag{16}$$
$$+1.6\frac{(l/2)^2}{4\pi R^2}\frac{l^2}{4l_1\sqrt{l_1l_2}}\frac{\gamma_p}{h}\int_{\theta_p}^{\pi}\pi(1+\cos\theta)(\cos\varphi-\cos\theta)\sin^2\varphi d\varphi$$

ただし　$I_n=P\int_{\theta_p}^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi-\cos\theta}d\varphi$，$\cos\theta_p=t_p$

しかるに $I_0=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\log\left|\frac{t_p-t}{1-t_pt+\sqrt{(1-t_p{}^2)(1-t^2)}}\right|$

$$I_1=(\pi-\theta_p)+tI_0$$

$$I_{n+1}-2tI_n+I_{n-1}=-\frac{2}{n}\sin n\theta_p$$

の関係がある。したがって(16)は次のようになる。

$$W_{nr}{}^1(t,1)=-\frac{1}{2\pi}\frac{l^2}{4l_1\sqrt{l_1l_2}}\frac{\gamma_p}{h}\Big[(1+t)(1-t^2)I_0-(\pi-\theta_p)t^2+(\sin\theta_p-\pi+\theta_p)t+\left\{\frac{1}{2}(\pi-\theta_p)+\sin\theta_p+\frac{1}{4}\sin2\theta_p\right\}\Big]$$
$$+1.6\frac{(l/2)^2}{4\pi R^2}\frac{l^2}{4l_1\sqrt{l_1l_2}}\frac{\gamma_p}{h}\Big[-\Big(-\frac{1}{2}\sin\theta_p+\frac{1}{2}\sin2\theta_p+\frac{1}{6}\sin3\theta_p+\pi-\theta_p\Big)\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\Big(-\sin\theta_p+\frac{1}{3}\sin3\theta_p+\frac{1}{8}\sin4\theta_p+\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_p}{2}\Big)\Big] \tag{17}$$

3.3.　$W_{nx}(t,1)$ の計算

$W_{nx}(\xi,1)$ は次式で与へられる[2)]。

$$W_{nx}(\xi,1)=\frac{1}{4\pi}\int_{-l_1/R}^{l_2/R}\gamma_n(\xi')F_x(k,1)d\xi' \tag{18}$$

ただし$F_x=k\{K(k)-E(k)\}$，$k^2=\frac{4}{(\xi'-\xi)^2+4}$

(7)の関係と $E(k'')\fallingdotseq 1$ を用いれば $F_x(k,1)$ は次のようになる。

$$F_x(k,1) \doteqdot \frac{1}{(\xi'-\xi)^2} F_x'(k,1) \tag{19}$$

ただし $F_x'(k,1) = \frac{4}{k}\left\{(1+k^2)E(k) - (1+k)\right\}$

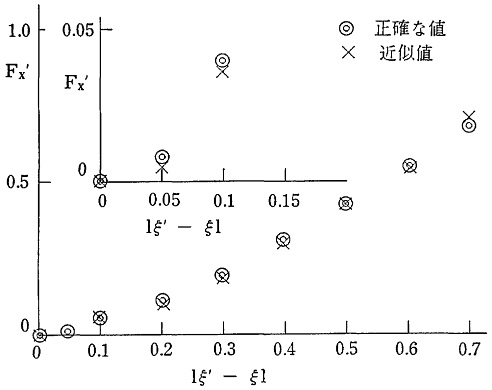

図4 F_x' の正確な値と近似値の比較

$F_x'(k,1)$ を $|\xi'-\xi|$ を横軸にとって図4に示す。以下 $F_x'(k,1)$ を次式で近似する。

$$F_x'(k,1) \doteqdot 1.2|\xi'-\xi|^{1.5} + \delta F_x' \tag{20}$$

ただし

$$\delta F_x' = 12|\xi'-\xi|^{2.5} - 1.2|\xi'-\xi|^{1.5} \quad \text{for}\ |\xi'-\xi| \leq 0.1$$
$$= 0 \quad \text{for}\ |\xi'-\xi| \geq 0.1$$

(20)式による近似値を図4に併せて示す。(18), (19), (20)より次式を得る。

$$W_{nx}(t,1) = \frac{1.2}{4\pi}\sqrt{\frac{l}{2R}}\int_{-1}^{1}\gamma_n(t')\frac{dt'}{\sqrt{|t'-t|}} + \frac{1}{4\pi}\frac{2R}{l}\int_{-1}^{1}\gamma_n(t')\frac{\delta F_x'}{(t'-t)^2}dt' \tag{21}$$

ただし

$$F_x' = 1.2\sqrt{\frac{2R}{l}}\frac{1}{\sqrt{|t'-t|}} + \left(\frac{2R}{l}\right)^2 \frac{{}^2\delta F_x'}{(t'-t)^2}$$

$$\delta F_x' = 12\left(\frac{l}{2R}\right)^{2.5}|t'-t|^{2.5} - 1.2\left(\frac{l}{2R}\right)^{1.5}|t'-t|^{1.5} \quad \text{for}\ \varepsilon \geq |t'-t|$$

$$= 0 \quad \text{for}\ |t'-t| \geq \varepsilon$$

$$\varepsilon = 0.1\left(\frac{2R}{l}\right)$$

なお(21)の右辺第二項を $\delta W_{nx}(t,1)$ と置くとこれは具体的には次のようになる。

$$\delta W_{nx}(t,1) = \frac{12}{4\pi}\left(\frac{l}{2R}\right)^{1.5}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\gamma_n(t')\sqrt{|t'-t|}dt' - \frac{1.2}{4\pi}\sqrt{\frac{l}{2R}}\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\gamma_n(t')\frac{dt'}{\sqrt{|t'-t|}} \quad \text{for}\ 1-\varepsilon \geq t \geq -1+\varepsilon \tag{22}$$

$$= \frac{12}{4\pi}\left(\frac{l}{2R}\right)^{1.5}\int_{-1}^{t+\varepsilon}\gamma_n(t')\sqrt{|t'-t|}dt' - \frac{1.2}{4\pi}\sqrt{\frac{l}{2R}}\int_{-1}^{t+\varepsilon}\gamma_n(t')\frac{dt'}{\sqrt{|t'-t|}} \quad \text{for}\ -1+\varepsilon \geq t \geq -1$$

$$= \frac{12}{4\pi}\left(\frac{l}{2R}\right)^{1.5}\int_{t-\varepsilon}^{1}\gamma_n(t')\sqrt{|t'-t|}dt' - \frac{1.2}{4\pi}\sqrt{\frac{l}{2R}}\int_{t-\varepsilon}^{1}\gamma_n(t')\frac{dt'}{\sqrt{|t'-t|}} \quad \text{for}\ 1 \geq t \geq 1-\varepsilon$$

以下 $w_{nx}{}^0(t,1)$, $w_{nx}{}^1(t,1)$に分けて取り扱う。

3.3.1. $W_{nx}{}^0(t,1)$ の計算

(12), (21), (22)より $W_{nx}{}^0(t,1)$ は次のようになる。ただし(12)の $\gamma_n{}^0$ としては変数を t に変換した次の表示式を用いる。

$$\gamma_n{}^0(t) = u_0\left\{C_0\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} + \sqrt{1-t^2}(C_1+C_2t+\cdots)\right\} \tag{23}$$

$$W_{nx}{}^0(t,1) = a\int_{-1}^{1}\frac{dt'}{\sqrt{|t'-t|}}\left\{C_0\sqrt{\frac{1-t'}{1+t'}} + \sqrt{1-t'^2}(C_1+C_2t'+\cdots\cdots)\right\} + \delta W_{nx}{}^0(t,1) \tag{24}$$

ただし

$$\delta W_{nx}{}^0(t,1) = b\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\sqrt{|t'-t|}dt'\left\{C_0\sqrt{\frac{1-t'}{1+t'}} + \sqrt{1-t'^2}(C_1+C_2t'+\cdots\cdots)\right\} - a\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\frac{dt'}{\sqrt{t'-t}}\left\{C_0\sqrt{\frac{1-t'}{1+t'}} + \sqrt{1-t'^2}(C_1+C_2t'+\cdots)\right\} \quad \text{for}\ 1-\varepsilon \geq t \geq -1+\varepsilon \tag{25}$$

$$= b\int_{-1}^{t+\varepsilon}\sqrt{|t'-t|}\left\{dt'C_0\sqrt{\frac{1-t'}{1+t'}} + \sqrt{1-t'^2}(C_1+C_2t'+\cdots\cdots)\right\} - a\int_{-1}^{t+\varepsilon}\frac{dt'}{\sqrt{|t'-t|}}\left\{C_0\sqrt{\frac{1-t'}{1+t'}} + \sqrt{1-t'^2}(C_1+C_2t'+\cdots)\right\} \quad \text{for}\ -1+\varepsilon \geq t \geq -1$$

$$= b\int_{t-\varepsilon}^{1}\sqrt{|t'-t|}dt'\left\{C_0\sqrt{\frac{1-t'}{1+t'}} + \sqrt{1-t'^2}(C_1+C_2t'+\cdots)\right\} - a\int_{t-\varepsilon}^{1}\frac{dt'}{\sqrt{|t'-t|}}\left\{C_0\sqrt{\frac{1-t'}{1+t'}} + \sqrt{1-t'^2}(C_1+C_2t'+\cdots\cdots)\right\} \quad \text{for}\ 1 \geq t \geq 1-\varepsilon$$

$$a = \frac{1.2}{4\pi}\sqrt{\frac{l}{2R}}u_0,\quad b = \frac{12}{4\pi}\left(\frac{l}{2R}\right)^{1.5}u_0$$

(24), (25)に含まれる定積分はすべて次の $J_n(\alpha)$ により表すことができる。

$$J_n(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha}\frac{t'^n}{\sqrt{(1-t'^2)|t'-t|}}dt' \tag{26}$$

一般に $J_n(\alpha)$ は楕円積分を用いて示すことができる。$n=4$ までの $J_n(\alpha)$ を示すと次のようになる。

$\alpha \geq t$ の場合には

$$J_0(\alpha) = \sqrt{2}\{K(k)-F(\varphi,k)+K(k')\} \tag{27}$$

$$J_1(\alpha) = \sqrt{2}[-\{K(k)-F(\varphi,k)\}+2\{E(k)-E(\varphi,k)\} +\{K(k')-2E(k')\}]$$

$$J_2(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}(1-2t)\left\{K(k)-F(\varphi,k)\right\} +\frac{4}{3}\sqrt{2}t\left\{E(k)-E(\varphi,k)\right\} +\frac{2}{3}\sqrt{2}t\left\{K(k')-2E(k')\right\}+\frac{\sqrt{2}}{3}K(k') -\frac{2}{3}\sqrt{(1-\alpha^2)(\alpha-t)}$$

$$J_3(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{15}(9+2t+8t^2)\left\{K(k)-F(\varphi,k)\right\} +\frac{2}{15}\sqrt{2}(9+8t^2)\left\{E(k)-E(\varphi,k)\right\} +\frac{\sqrt{2}}{15}(9-2t+8t^2)K(k')-\frac{2}{15}\sqrt{2}(9 +8t^2)E(k')-\frac{2}{15}(4t+3\alpha)\sqrt{(1-\alpha^2)(\alpha-t)}$$

$$J_4(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{105}(25-44t-12t^2-48t^3)\left\{K(k)-F(\varphi k)\right\} +\frac{\sqrt{2}}{105}(88t+96t^3)\left\{E(k)-E(\varphi,k)\right\} +\frac{\sqrt{2}}{105}(25+44t-12t^2+48t^3)K(k') -\frac{\sqrt{2}}{105}(88t+96t^3)E(k') -\frac{1}{105}(50+36\alpha t+48t^2+30\alpha^2)\sqrt{(1-\alpha^2)(\alpha-t)}$$

ただし　$k^2=\dfrac{1-t}{2}$，$k'^2=\dfrac{1+t}{2}$，$\sin\varphi=\sqrt{\dfrac{1-\alpha}{1-t}}$

$K(\varphi,k)$，$E(\varphi,k)$：第一種，第二種楕円積分

また $t\geq\alpha$ の場合には

$$J_0(\alpha) = \sqrt{2}F(\varphi',k') \tag{28}$$

$$J_1(\alpha) = \sqrt{2}\{F(\varphi',k')-2E(\varphi',k')\}$$

$$J_2(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left\{(2t+1)F(\varphi',k')-4tE(\varphi',k')\right\} +\frac{2}{3}\sqrt{(1-\alpha^2)(t-\alpha)}$$

$$J_3(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{15}(9-2t+8t^2)F(\varphi',k') -\frac{2}{15}\sqrt{2}(9+8t^2)E(\varphi',k') +\frac{2}{15}(4t+3\alpha)\sqrt{(1-\alpha^2)(t-\alpha)}$$

$$J_4(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{105}(25+44t-12t^2+48t^3)F(\varphi',k') -\frac{\sqrt{2}}{105}(88t+96t^3)E(\varphi',k') +\frac{1}{105}(50+36\alpha t+48t^2+30\alpha^2)\sqrt{(1-\alpha^2)(t-\alpha)}$$

ただし

$$\sin\varphi'=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1+t}}$$

(27)，(28)を用いて(24)，(25)を展開すると $W_{nx}{}^0(t,1)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} W_{nx}{}^0(t,1) &= C_0f_1(t)+C_1f_2(t)+C_2f_3(t)+\cdots\cdots && \text{for } 1-\varepsilon\geq t\geq -1+\varepsilon \\ &= C_0f_4(t)+C_1f_5(t)+C_2f_6(t)+\cdots\cdots && \text{for} -1+\varepsilon\geq t\geq -1 \\ &= C_0f_7(t)+C_1f_8(t)+C_2f_9(t)+\cdots\cdots && \text{for } 1\geq t\geq 1-\varepsilon \end{aligned} \tag{29}$$

ただし

$$f_1(t)=2\sqrt{2}aF(\varphi,k)-2\sqrt{2}aE(\varphi,k) +2\sqrt{2}aE(\varphi',k')-\frac{4}{3}\sqrt{2}b(1+t)\left\{K(k) -F(\varphi,k)\right\}+2\sqrt{2}b\left(1+\frac{t}{3}\right)\left\{E(k)-E(\varphi,k)\right\} -\frac{2}{3}\sqrt{2}b(1-t)\left\{K(k')-F(\varphi',k')\right\} +2\sqrt{2}b\left(1+\frac{t}{3}\right)\left\{E(k')-E(\varphi',k')\right\} +\frac{2}{3}b\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}-\frac{2}{3}b\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}$$

$$f_2(t)=\frac{2}{3}\sqrt{2}a(1+t)F(\varphi,k)-\frac{4}{3}\sqrt{2}atE(\varphi,k) +\frac{2}{3}\sqrt{2}a(1-t)F(\varphi',k')+\frac{4}{3}\sqrt{2}atE(\varphi',k') -\frac{2}{3}a\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}-\frac{2}{3}a\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}} -\frac{2}{15}\sqrt{2}b(3+4t+t^2)\{K(k)-F(\varphi,k)\} +\frac{4}{15}\sqrt{2}b(3+t^2)\{E(k)-E(\varphi,k)\} -\frac{2}{15}\sqrt{2}b(3-4t+t^2)\{K(k')-F(\varphi',k')\} +\frac{4}{15}\sqrt{2}b(3+t^2)\{E(k')-E(\varphi',k')\} -\frac{2}{3}b\cdot t\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}+\frac{2}{3}bt\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}} +\frac{2}{15}b(7t+3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}} -\frac{2}{15}b(7t-3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}$$

$$f_3(t)=\frac{\sqrt{2}}{15}a(-6+2t+8t^2)F(\varphi,k) +\frac{4}{15}\sqrt{2}a(3-4t^2)E(\varphi,k) +\frac{\sqrt{2}}{15}a(6+2t-8t^2)F(\varphi',k') -\frac{4}{15}\sqrt{2}a(3-4t^2)E(\varphi',k') -\frac{2}{15}a(7t+3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}} -\frac{2}{15}a(7t-3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}} +\frac{\sqrt{2}}{105}b(10+16t-2t^2-8t^3)\{K(k)-F(\varphi,k)\} -\frac{16}{105}\sqrt{2}b(2t-t^3)\{E(k)-E(\varphi,k)\}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\sqrt{2}}{105}b(-10+16t+2t^2-8t^3)\{K(k')-F(\varphi',k')\}\\
&-\frac{16}{105}\sqrt{2}\,b(2t-t^3)\{E(k')-E(\varphi',k')\}\\
&-\frac{2}{3}b\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}+\frac{2}{3}b\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2}\\
&-\frac{2}{15}bt\,(7t+3\varepsilon)\ \sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}\\
&+\frac{2}{15}bt(7t-3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}\\
&+\frac{b}{105}(50+96\varepsilon t+114t^2+30\varepsilon^2)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}\\
&-\frac{b}{105}(50-96\varepsilon t+114t^2+30\varepsilon^2)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4(t)=&\,2\sqrt{2}\,aF(\varphi,k)-2\sqrt{2}\,aE(\varphi,k)\\
&-\frac{4}{3}\sqrt{2}\,b(1+t)\{K(k)-F(\varphi,k)\}\\
&+2\sqrt{2}\,b\left(1+\frac{t}{3}\right)\{E(k)-E(\varphi,k)\}\\
&-\frac{2}{3}\sqrt{2}\,b\,(1-t)\,K(k')+2\sqrt{2}\,b\left(1+\frac{t}{3}\right)E(k')\\
&+\frac{2}{3}b\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)\}^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_5(t)=&\,\frac{2}{3}\sqrt{2}\,aF(\varphi,k)-\frac{4}{3}\sqrt{2}\,atE(\varphi,k)\\
&-\frac{2}{3}a\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}-\frac{2}{15}\sqrt{2}\,b(3+4t\\
&-t^2)\{K(k)-F(\varphi,k)\}+\frac{4}{15}\sqrt{2}\,b(3+t^2)\{E(k)\\
&-E(\varphi,k)\}-\frac{2}{15}\sqrt{2}\,b(3-4t+t^2)K(k')\\
&+\frac{4}{15}\sqrt{2}\,b(3+t^2)E(k')-\frac{2}{3}bt\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}\\
&+\frac{2}{15}b(7t+3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_6(t)=&\,\frac{\sqrt{2}}{15}a(-6+2t+8t^2)F(\varphi,k)+\frac{4}{15}\sqrt{2}\,a(3\\
&-4t^2)E(\varphi,k)-\frac{2}{15}a(7t+3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}\\
&+\frac{\sqrt{2}}{105}b(10+16t-2t^2-8t^3)\{K(k)-F(\varphi,k)\}\\
&-\frac{16}{105}\sqrt{2}\,b(2t-t^3)\{E(k)-E(\varphi,k)\}\\
&+\frac{\sqrt{2}}{105}b(-10+16t+2t^2-8t^3)K(k')\\
&-\frac{16}{105}\sqrt{2}\,b(2t-t^3)E(k')-\frac{2}{3}b\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}\\
&-\frac{2}{15}bt\,(7t+3\varepsilon)\ \sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}\\
&+\frac{b}{105}(50+96\varepsilon t+114t^2+30\varepsilon^2)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_7(t)=&\,2\sqrt{2}\,aE(\varphi',k')-\frac{4}{3}\sqrt{2}\,b(1+t)K(k)\\
&+2\sqrt{2}\,b\left(1+\frac{t}{3}\right)E(k)-\frac{2}{3}\sqrt{2}\,b(1-t)\{K(k')\\
&-F(\varphi',k')\}+2\sqrt{2}\,b\left(1+\frac{t}{3}\right))\{E(k')\\
&-E(\varphi',k')\}-\frac{2}{3}b\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_8(t)=&\,\frac{2}{3}\sqrt{2}\,a(1-t)F(\varphi',k')+\frac{4}{3}\sqrt{2}\,atE(\varphi',k')\\
&-\frac{2}{3}a\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}-\frac{2}{15}\sqrt{2}\,b(3+4t+t^2)K(k)\\
&+\frac{4}{15}\sqrt{2}\,b(3+t^2)E(k)-\frac{2}{15}\sqrt{2}\,b(3-4t\\
&+t^2)\{K(k')-F(\varphi',k')\}+\frac{4}{15}\sqrt{2}\,b(3+t^2)\{E(k')\\
&-E(\varphi',k')\}+\frac{2}{3}bt\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}-\frac{2}{15}b(7t\\
&-3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_9(t)=&\,\frac{\sqrt{2}}{15}a(6+2t-8t^2)F(\varphi',k')-\frac{4}{15}\sqrt{2}\,aE(\varphi',k')\\
&-\frac{2}{15}a(7t-3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}+\frac{\sqrt{2}}{105}b(10+16t\\
&-2t^2-8t^3)K(k)-\frac{16}{105}\sqrt{2}\,b(2t-t^3)E(k)\\
&+\frac{\sqrt{2}}{105}b(-10+16t+2t^2-8t^3)\{K(k')-F(\varphi',k')\}\\
&-\frac{16}{105}\sqrt{2}\,b(2t-t^3)\{\mathrm{E}(k')-E(\varphi',k')\}\\
&+\frac{2}{3}b\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}+\frac{2}{15}bt(7t\\
&-3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}-\frac{b}{105}(50-96\varepsilon t+114t^2\\
&+30\varepsilon^2)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

また

$$
k^2=\frac{1-t}{2},\quad k'^2=\frac{1+t}{2},\quad \sin\varphi=\sqrt{\frac{1-t-\varepsilon}{1-t}}
$$

$$
\sin\varphi'=\sqrt{\frac{1+t-\varepsilon}{1+t}}
$$

3.3.2. $W_n{}^1{}_x(t,1)$ の計算

(13)，(21)，(22) より $W_{nx}{}^1(t,1)$ は次のようになる。

$$
W_n{}^1{}_x(t,1)=C\int_{-1}^{t_p}(1+t')\sqrt{\frac{1-t'^2}{|t'-t|}}dt'+\delta W_n{}^1{}_x(t,1) \quad (30)
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\delta W_n{}^1{}_x(t,1)=&\,d\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}(1+t')\sqrt{(1-t'^2)|t'-t|}dt' \qquad (31)\\
&-c\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}(1+t')\sqrt{\frac{1-t'^2}{|t'-t|}}dt' \quad \text{for}\quad t_p-\varepsilon\geq t\geq -1+\varepsilon\\
=&\,d\int_{-1}^{t+\varepsilon}(1+t')\sqrt{(1-t'^2)|t'-t|}dt'\\
&-c\int_{-1}^{t+\varepsilon}(1+t')\sqrt{\frac{1-t'^2}{|t'-t|}}dt' \quad \text{for}\ -1+\varepsilon\geq t\geq -1\\
=&\,d\int_{t-\varepsilon}^{t_p}(1+t')\sqrt{(1-t'^2)|t'-t|}dt'\\
&-c\int_{t-\varepsilon}^{t_p}(1+t')\sqrt{\frac{1-t'^2}{|t'-t|}}dt' \quad \text{for}\ t_p+\varepsilon\geq t\geq t_p-\varepsilon\\
=&\,0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{for}\ t\geq t_p+\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
c=\frac{1.2}{4\pi}\sqrt{\frac{l}{2R}}\frac{l^2}{4l_1\sqrt{l_1l_2}}\frac{\gamma_p}{h},\quad d=\frac{12}{4\pi}\left(\frac{l}{2R}\right)^{1.5}\frac{l^2}{4l_1\sqrt{l_1l_2}}\frac{\gamma_p}{h}
$$

(30)，(31)に含まれる定積分は前述の $J_n(\alpha)$ で表すことができるので (27)，(28) の関係を用いて展開すると $W_{nx}{}^1(t,1)$ として次式を得る。

$$
\begin{aligned}
W_{nx}{}^1(t,1) &= cg_1(t)+dg_2(t) \quad \text{for} -1+\varepsilon\geq t\geq -1 \quad (32)\\
&= cg_3(t)+dg_4(t) \quad \text{for} \quad t_p-\varepsilon\geq t\geq -1+\varepsilon\\
&= cg_5(t)+dg_6(t) \quad \text{for} \quad t_p\geq t\geq t_p-\varepsilon\\
&= cg_7(t)+dg_8(t) \quad \text{for} \quad t_p+\varepsilon\geq t\geq t_p\\
&= cg_9(t) \qquad\qquad\quad \text{for} \quad t\geq t_p+\varepsilon
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
g_1(t) =& \frac{4}{15}\sqrt{2}\,(1+3t+2t^2)\{F(\varphi,k)-F(\varphi_p,k)\}\\
&+\frac{4}{15}\sqrt{2}\,(3-3t-4t^2)\{E(\varphi,k)-E(\varphi_p,k)\}\\
&+\frac{2}{3}\sqrt{(1-t_p{}^2)(t_p-t)}+\frac{2}{15}(4t+\\
&3t_p)\sqrt{(1-t_p{}^2)(t_p-t)}-\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}\\
&-\frac{2}{15}(7t+3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_2(t) =& -\frac{8}{105}\sqrt{2}\,(4+5t+2t^2+t^3)\{K(k)-F(\varphi,k)\}\\
&+\frac{4}{105}\sqrt{2}\,(21-8t+7t^2+4t^3)\{E(k)-E(\varphi,k)\}\\
&+\frac{4}{105}\sqrt{2}\,(-13+18t-3t^2-2t^3)K(k')\\
&+\frac{4}{105}\sqrt{2}\,(21-8t+7t^2+4t^3)E(k')\\
&-\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}+\frac{2}{15}(1-t)(7t\\
&+3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}+\frac{1}{105}(50+96\varepsilon t+114t^2\\
&+30\varepsilon^2)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_3(t) =& \frac{4}{15}\sqrt{2}\,(1+3t+2t^2)\{F(\varphi,k)-F(\varphi_p,k)\}\\
&+\frac{4}{15}\sqrt{2}\,(3-5t-4t^2)\{E(\varphi,k)-E(\varphi_p,k)\}\\
&+\frac{8}{15}\sqrt{2}\,(2-t-t^2)F(\varphi',k')-\frac{4}{15}\sqrt{2}\,(3-5t\\
&-4t^2)E(\varphi',k')+\frac{2}{3}\sqrt{(1-t_p{}^2)(t_p-t)}\\
&+\frac{2}{15}(4t+3t_p)\sqrt{1-t_p{}^2)(t_p-t)}\\
&-\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}-\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}\\
&-\frac{2}{15}(7t+3)\varepsilon\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}-\frac{2}{15}(7t\\
&-3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_4(t) =& -\frac{8}{105}\sqrt{2}\,(4+5t+2t^2+t^3)\{K(k)-F(\varphi,k)\}\\
&+\frac{4}{105}\sqrt{2}\,(21-8t+7t^2+4t^3)\{E(k)-E(\varphi,k)\}\\
&+\frac{4}{105}\sqrt{2}\,(-13+18t-3t^2-2t^3)\{K(k')\\
&-F(\varphi',k')\}+\frac{4}{105}\sqrt{2}\,(21-8t+7t^2+4t^3)\{E(k')\\
&-E(\varphi',k')\}-\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}\\
&+\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}\\
&+\frac{2}{15}(1-t)(7t+3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}\\
&-\frac{2}{15}(1-t)(7t-3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}\\
&+\frac{1}{105}(50+96\varepsilon t+114t^2+30\varepsilon^2)\sqrt{\varepsilon\{1-(t+\varepsilon)^2\}}\\
&-\frac{1}{105}(50-96\varepsilon t+114t^2+30\varepsilon^2)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_5(t) =& \frac{8}{15}\sqrt{2}\,(2-t-t^2)F(\varphi',k')-\frac{4}{15}\sqrt{2}\,(3-5t\\
&-4t^2)E(\varphi',k')-\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}\\
&-\frac{2}{15}(7t-3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_6(t) =& -\frac{8}{105}\sqrt{2}\,(4+5t+2t^2+t_3)\{K(k)-F(\varphi_p,k)\}\\
&+\frac{4}{105}\sqrt{2}\,(21-8t+7t^2+4t^3)\{E(k)-E(\varphi_p,k)\}\\
&+\frac{4}{105}\sqrt{2}\,(-13+18t-3t^2-2t^3)\{K(k')\\
&-F(\varphi',k')\}+\frac{4}{105}\sqrt{2}(21-8t+7t^2+4t^3)\{E(k')\\
&-E(\varphi',k')\}-\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{(t_p-t)(1-t_p{}^2)}\\
&+\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}+\frac{2}{15}(1-t)(4t\\
&+3t_p)\sqrt{(1-t_p{}^2)(t_p-t)}-\frac{2}{15}(1-t)(7t-\\
&3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}+\frac{1}{105}(50+36t_pt+48t^2\\
&+30t_p{}^2)\sqrt{(1-t_p{}^2)(t_p-t)}-\frac{1}{105}(50-96\varepsilon t+114t^2\\
&+30\varepsilon^2)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_7(t) =& \frac{8}{15}\sqrt{2}\,(2-t-t^2)F(\varphi',k')-\frac{4}{15}\sqrt{2}\,(3-5t\\
&-4t^2)E(\varphi',k')-\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}-\frac{2}{15}(7t-\\
&3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_8(t) =& \frac{4}{105}\sqrt{2}(-13+18t-3t^2-2t^3)\{F(\varphi_p{}',k')\\
&-F(\varphi',k')\}+\frac{4}{105}\sqrt{2}\,(21-8t+7t^2\\
&+4t^3)\{E(\varphi_p{}',k')-E(\varphi',k')\}\\
&-\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{(1-t_p{}^2)(t-t_p)}\\
&+\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}\\
&+\frac{2}{15}(1-t)(4t+3t_p)\sqrt{(1-t_p{}^2)(t-t_p)}\\
&-\frac{2}{15}(1-t)(7t-3\varepsilon)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}\\
&+\frac{1}{105}(50+36t_pt+48t^2+30t_p{}^2)\sqrt{(1-t_p{}^2)(t-t_p)}\\
&-\frac{1}{105}(50-96\varepsilon t+114t^2+30\varepsilon^2)\sqrt{\varepsilon\{1-(t-\varepsilon)^2\}}
\end{aligned}
$$

$$g_9(t)=\frac{8}{15}\sqrt{2}\,(2-t-t^2)F(\varphi_p',k')-\frac{4}{15}\sqrt{2}\,(3-5t-4t^2)E(\varphi_p',k')-\frac{2}{3}\sqrt{(1-t_p^2)(t-t_p)}-\frac{2}{15}(4t+3t_p)\sqrt{(1-t_p^2)(t-t_p)}$$

$$k^2=\frac{1-t}{2},\quad k'^2=\frac{1+t}{2},\quad \sin\varphi=\sqrt{\frac{1-t-\varepsilon}{1-t}}$$

$$\sin\varphi'=\sqrt{\frac{1+t-\varepsilon}{1+t}},\quad \sin\varphi_p=\sqrt{\frac{1-t_p}{1-t}},\quad \sin\varphi_p'=\sqrt{\frac{1+t_p}{1+t}}$$

4　ダクト内流量の解析

ダクト内流量 Q はプロペラ位置で示せば，次式で与へられる。

$$Q=\rho A_p\left(u_0+\frac{\gamma_p}{h}\right)+2\pi R^2\rho\int_{R_b/R}^{1}W_{nx}(0,\eta)\,\eta d\eta \tag{33}$$

ただし A_p：プロペラ位置の流路面積，R_b：ボス半径 $W_{nx}(\xi,\eta)$ は次式で示される[2)]。

$$W_{nx}(\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\int_{-l_1/R}^{l_2/R}\gamma_n(\xi')F_x(k,\eta)\,d\xi' \tag{34}$$

ただし

$$F_x(k,\eta)=\frac{k}{\sqrt{\eta}}K(k)+\frac{1}{2\sqrt{\eta}}\,\frac{k}{1-k^2}\left\{\left(1+\frac{1}{\eta}\right)k^2-2\right\}E(k)$$

$$k^2=\frac{4\eta}{(\xi'-\xi)^2+(1+\eta)^2}$$

したがって Q は次式となる。

$$Q=\rho A_p\left(u_0+\frac{\gamma_p}{2h}\right)+\rho\frac{R^2}{2}\int_{R_b/R}^{1}\eta\cdot d\eta\int_{-l_1/R}^{l_2/R}\gamma_n(\xi')F_x(k,\eta)\,d\xi' \tag{35}$$

(34)の $F_x(k,\eta)$ は(7)の関係を用いれば次式となる。

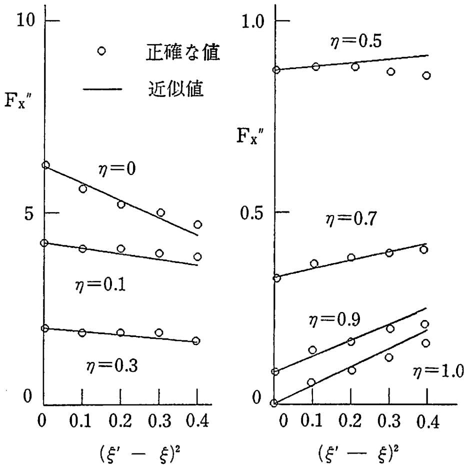

図5　F_x'' の正確な値と近似値の比較

$$F_x(k,\eta)=\frac{1}{1-k^2}F_x''(k,\eta) \tag{36}$$

ただし

$$F_x''(k,\eta)=\frac{k}{\sqrt{\eta}}\left\{\left(1+\frac{1+\eta}{2\eta}k^2\right)E(k)-(1+k)\,E(k'')\right\}$$

$$k''=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

$F_x''(k,\eta)$ を $(\xi'-\xi)^2$ を横軸にとって図5に示す。以下 $F_x''(k,\eta)$ を次式で近似する。

$$F_x''(k,\eta)\fallingdotseq m(\eta)+n(\eta)(\xi'-\xi)^2 \tag{37}$$

ただし $m(\eta)$，$n(\eta)$ は図6に示す値にとる。このときの(37)の $F_x''(k,\eta)$ の近似値を図5に併せて示す。(36)(37)より $F_x(k,\eta)$ の近似値は次式で与へられる。

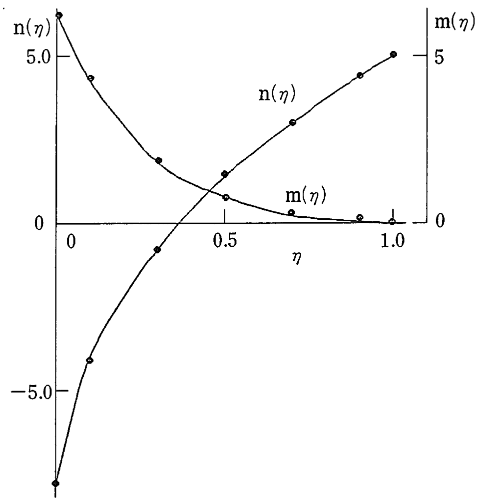

図6　$m(\eta)$，$n(\eta)$ の値

$$F_x(k,\eta)\fallingdotseq\{m(\eta)+4\eta n(\eta)\}+n(\eta)(\xi'-\xi)^2+\frac{4\eta\,\{m(\eta)-(1-\eta)^2n(\eta)\}}{(\xi'-\xi)^2+(1-\eta)^2} \tag{38}$$

(35)式右辺第二項を Q_n で表すことにすれば(35)式は次式となる。

$$Q=\rho A_p\left(u_0+\frac{\gamma_p}{2h}\right)+Q_n \tag{39}$$

ただし

$$Q_n=\rho\frac{R^2}{2}\int_{R_b/R}^{1}\eta\,d\eta\int_{-l_1/R}^{l_2/R}\gamma_n(\xi')F_x(k,\eta)\,d\xi'$$

(38)を用いれば Q_n は次のように変形される。ただし $\xi=0$ とする。

$$Q_n=\rho R^2L_0\int_{R_b/R}^{1}(1-\eta')\left\{\frac{1}{2}m(1-\eta')+2(1-\eta')\,n(1-\eta')\right\}d\eta'+2\rho R^2\int_{R_b/R}^{1}L_1(\eta')\,(1$$

$$-\eta')^2\{m(1-\eta')-(\eta')^2 n(1-\eta')\}d\eta'$$

$$+\frac{1}{2}\rho R^2 L_2\int_{R_b/R}^{1}(1-\eta')n(1-\eta')d\eta' \tag{40}$$

ただし

$$L_0=\int_{-l_1/R}^{l_2/R}\gamma_n(\xi')d\xi'$$

$$L_1(\eta')=\int_{-l_1/R}^{l_2/R}\gamma_n(\xi')\frac{d\xi'}{\xi'^2+\eta'^2}$$

$$L_2=\int_{-l_1/R}^{l_2/R}\gamma_n(\xi')\xi'^2 d\xi'$$

$$\eta'=1-\eta$$

以下 L_0, L_1, L_2 を展開する。

$$L_0=\frac{l}{2R}\int_{-1}^{1}\gamma_n{}^0(t')dt'+\frac{l}{2R}\int_{-1}^{t_p}\gamma_n{}^1(t')dt' \tag{41}$$

(12), (13)によれば L_0 は次のようになる。

$$L_0=\frac{l}{2R}\left\{\pi u_0 C_0+\frac{\pi}{2}u_0 C_1+\cdots\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{2}t_p\sqrt{1-t_p{}^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin^{-1}t_p-3/4(1-t_p{}^2)^{3/2}+\pi\right\}\frac{l^3}{8Rl_1\sqrt{l_1 l_2}}\frac{\gamma_p}{h} \tag{42}$$

$$L_1=L_1{}^0+L_1{}^1 \tag{43}$$

ただし

$$L_1{}^0=\left(\frac{2R}{l}\right)\int_{-1}^{1}\gamma_n{}^0(t')\frac{dt'}{(t'-t_p)^2+\left(\frac{2R}{l}\right)^2\eta'^2}$$

$$L_1{}^1=\left(\frac{2R}{l}\right)\int_{-1}^{t_p}\gamma_n{}^1(t')\frac{dt'}{(t'-t_p)^2+\left(\frac{2R}{l}\right)^2\eta'^2}$$

$\gamma_n{}^0$, $\gamma_n{}^1$ に(12), (13)を用いると L_1 の中の積分として $\sqrt{1-t'^2}$を被積分関数の中に含む定数分がでてくる。例へば L_0 の中の C_0 の項には次の積分が現れる。

$$M=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t'}{1+t'}}\frac{dt'}{(t'-t_p)^2+\left(\frac{2R}{l}\right)^2\eta'^2}$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1-t'}{\sqrt{1-t'^2}}\frac{dt'}{(t'-t_p)^2+\left(\frac{2R}{l}\right)^2\eta'^2}$$

上式で $t'=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$の置換を行うことにより被積分関数を有理関数に変換すると M は次のようになる。

$$M=\frac{4}{1+2t_p+k_0}\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+k_1x+k_2)(x^2-k_1x+k_2)}$$

$$=\frac{2}{C_1(1+2t_p+k_0)}\int_0^{\infty}\left(\frac{xdx}{x^2-k_1x+k_2}-\frac{xdx}{x^2+k_1x+k_2}\right)$$

ただし

$$k_0=t_p{}^2+\left(\frac{2R}{l}\right)^2\eta'^2$$

$$k_1{}^2=\frac{2}{1+2t_p+k_0}\left\{\sqrt{(1+k_0)^2-4t_p{}^2}-(k_0-1)\right\}$$

$$k_2{}^2=\frac{1-2t_p+k_0}{1+2t_p+k_0}$$

したがって M は次式で表される。

$$M=\frac{2\pi}{(1+2t_p+k_0)\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}$$

$L_1{}^0$, $L_1{}^1$ に含まれる他の積分も M と同様の方法で変形すると L_1 は次のように表される。

$$L_1(\eta')=C_0h_1(\eta')+C_1h_2(\eta')+C_2h_3(\eta')+\cdots\cdots$$

$$+h_4(\eta') \tag{44}$$

ただし

$$h_1(\eta')=\left(\frac{2R}{l}\right)u_0\frac{2\pi}{(1+t_p+k_0)\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}$$

$$h_2(\eta')$$

$$=\left(\frac{2R}{l}\right)u_0\frac{4\pi\{\sqrt{4k_2-k_1{}^2}-(1+k_2)\}}{(1-k_2)(1+2t_p+k_0)\left(k_2-1-\frac{k_1{}^2}{1-k_2}\right)\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}$$

$$h_3(\eta')=\left(\frac{2R}{l}\right)u_0\frac{4\pi}{k_1.k_4(1+2t_p+k_0)}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{k_2}\right)k_3\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{k_1}{k_2}\right\}-\frac{(2k_3-k_1)}{\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}\right]$$

$$h_4(\eta')$$

$$=\frac{2Rl}{4l_1\sqrt{l_1l_2}}\frac{\gamma_p}{h}\frac{8}{k_1k_6(1+2t_p+k_0)}\left[k_5\left\{\frac{\sqrt{\frac{1-t_p}{1+t_p}}}{\left(1+\frac{1-t_p}{1+t_p}\right)}\right.\right.$$

$$\left.-\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-t_p}{1+t_p}}+\frac{\pi}{2}\right\}+\left(\frac{k_5}{k_2}-\frac{k_1}{k_2}\right)\left\{-\frac{\sqrt{\frac{1-t_p}{1+t_p}}}{\left(1+\frac{1-t_p}{1+t_p}\right)}\right.$$

$$\left.-\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-t_p}{1+t_p}}+\frac{\pi}{2}\right\}-\frac{\pi k_1}{\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}$$

$$+\frac{1}{2}\log\left|\frac{\frac{1-t_p}{1+t_p}-k_1\sqrt{\frac{1-t_p}{1+t_p}}+k_2}{\frac{1-t_p}{1+t_p}+k_1\sqrt{\frac{1-t_p}{1+t_p}}+k_2}\right|$$

$$+\frac{k_1}{\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}\left(\tan^{-1}\frac{2\sqrt{\frac{1-t_p}{1+t_p}}-k_1}{\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}\right.$$

$$\left.+\tan^{-1}\frac{2\sqrt{\frac{1-t_p}{1+t_p}}+k_1}{\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}\right)$$

$$+\frac{2(k_5-k_1)}{\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}\left(\pi-\tan^{-1}\frac{2\sqrt{\frac{1-t_p}{1+t_p}}-k_1}{\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}\right.$$

$$\left.\left.-\tan^{-1}\frac{2\sqrt{\frac{1-t_p}{1+t_p}}+k_1}{\sqrt{4k_2-k_1{}^2}}\right)\right]$$

$$k_3=\frac{-k_1(k_1{}^2+3k_2{}^2-2k_2-1)}{(1+k_2)(1-k_2-k_1)(1-k_2+k_1)}$$

$$k_4=(1-k_2)^2(k_1{}^2-k_2{}^3+2k_2{}^2-k_2)$$

$$-k_1{}^2(2k_2{}^3-3k_2{}^2+k_1{}^2k_2+1)$$

$$k_5=\frac{k_1(1-k_2{}^2)}{(1+k_2)^2-k_1{}^2k_2}$$

$$k_6=-\frac{k_1{}^2(1-k_2{}^2)^2}{(1+k_2)^2-k_1{}^2k_2}+\frac{k_1{}^2}{k_2}-(k_2-1)^2$$

次に L_2 は次のようになる。

$$L_2=\left(\frac{l}{2R}\right)^3\int_{-1}^{1}\gamma_n(t')(t'-t_p)^2dt'$$

L_2 の定積分は簡単に求まり L_2 として次式を得る。

$$L_2=\left(\frac{l}{2R}\right)^3\pi\,u_0\left[C_0\left(-\frac{1}{2}+t_p\right)+\frac{1}{8}C_1-\frac{t_p}{4}C_2+\cdots\cdots\right]$$
$$+\left(\frac{l}{2R}\right)^3\frac{l^2}{4l_1\sqrt{l_1l_2}}\frac{\gamma_p}{h}\Big[-\frac{2}{15}(2+3t_p{}^2)(1-t_p{}^2)^{3/2}$$
$$+\frac{(1-2t_p)}{8}\Big\{-t_p(1-t_p{}^2)^{3/2}+t_p\sqrt{1-t_p{}^2}+\sin^{-1}t_p$$
$$+\frac{\pi}{2}\Big\}-\frac{3}{4}(-2t_p+t_p{}^2)(1-t_p{}^2)^{3/2}+\frac{t_p{}^2}{2}\Big(t_p\sqrt{1-t_p{}^2}$$
$$+\sin^{-1}t_p+\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\qquad(45)$$

(40), (42), (44), (45)によりプロペラ位置の Q_n を計算することができる。(40)の η' の定積分は被積分関数が特異性を示さないので図6の $m(\eta)$, $n(\eta)$ の値を用いて数値的に積分する。全流量 Q は (39) 式から求まる。

5　最適ダクト形状の考察

3においては，2で示した流力モデルを用いて，与へられた特異点分布に対応するダクト形状の計算方法を示した。この方法によれば近似的ではあるが，かなりの精度で対応するダクト形状を求めることができると思う。3に示したと同様の方法で $\eta=\eta$ の誘導速度の計算を行へば2で示した流力モデルしよりダクト・プロペラの性能を計算することができる。しかしこのような方法による性能計算はかなり複雑となり分かりにくくなると思う。

一方，ダクト・プロペラの性能に関する全貌を簡単に概略把握するには，ダクト内の流れを完全流体の一次元流れでモデル化することにより求まる特性を用いると便利である。一次元理論から得られる特性は，細かい点については2の渦モデルによる結果とは異なると思はれるが上述の目的に対しては有効であると思う。以下ダクト形状について一次元理論を併用しながら考察を加へる。一次元理論によれば次の関係が成立する。

$$T_o=Q\Delta u\qquad(46)$$

$$L_p=\frac{1}{2}Q(2u_0+\Delta u)\Delta u\qquad(47)$$

ただし　T_o：ダクト・プロペラの全推力

L_p：プロペラ駆動用動力

Δu：無限後方の合成流速を u_∞ とすれば

$\Delta u=u_\infty-u_0$

Q：ダクト内全流量

同様に次の関係が成立する。

$$T_p=A_p\Delta p\qquad(48)$$

$$L_p=T_pu_p\qquad(49)$$

ただし　T_p：プロペラのみの推力

A_p：プロペラ位置のダクト内流路面積

Δp：プロペラ前后の圧力差

u_p：プロペラ位置の合成流速

(47), (49)より

$$\frac{1}{2}Q(2u_0+\Delta u)\Delta u=A_p\Delta pu_p$$

この関係と $Q=\rho A_pu_p$ より次の関係を得る。

$$T_p=\frac{1}{2}\rho A_p(2u_0+\Delta u)\Delta u\qquad(50)$$

したがって，ダクトのみの推力は次式で表される。

$$T_n=T_o-T_p=\rho A_p\left(\Delta u_p-\frac{1}{2}\Delta u\right)\qquad(51)$$

ただし

T_n：ダクトのみの推力

Δu_p：u_p-u_0

また一次元理論によるとダクト・プロペラの効率 η_0 は次式で与へられる。

$$\eta_0=\frac{Q\Delta uu_0}{\frac{1}{2}Q(2u_0+\Delta u)\Delta u}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{\Delta u}{u_0}}\qquad(52)$$

あるいは

$$\eta_0=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{T_o}{Qu_0}}\qquad(53)$$

一方，2で示した渦モデルによれば

$$L_p=Q\omega\gamma_p\qquad(54)$$

ただし　ω：プロペラの回転角速度

したがって(47), (54)より次の関係を得る。

$$Q=\frac{u_0+\sqrt{u_0{}^2+2\omega\gamma_p}}{2\omega\gamma_p}\quad T_o\qquad(55)$$

(53), (55)より

$$\eta_0=\frac{1}{1+\frac{\omega\ \gamma_p}{u_0(u_0+\sqrt{u_0{}^2+2\omega\gamma_p})}}\qquad(56)$$

(56)はダクト・プロペラの効率が γ_p のみで表され，ダクト・プロペラの規模によらないことを示している。

さてダクト・プロペラの設計においては u_0, ω および T_o は事前に与へられるのが普通である。したがってこの条件の範囲内でプロペラおよびダクトを表す渦度分布の強さ γ_p と γ_n を定めねばならぬ。この付帯条件を具体的に示すと次のようになる。(39)の Q と(55)の Q より

$$Q_n=\frac{u_0+\sqrt{u_0{}^2+2\omega\gamma_p}}{2\omega\gamma_p}T_o-\rho A\left({}_pu_0+\frac{\gamma_p}{2h}\right)\qquad(57)$$

しかるに上式の Q_n は(40)より明らかなようにダクトを表す束縛渦の強さ γ_n を表す C_0, C_1, C_2……等の関数である。すなはち(57)が設計における付帯条件となる。前述のように η_0 は γ_p のみの関数である。η_0 と γ_p の関

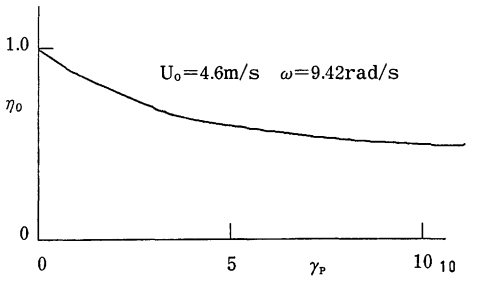

図7　γ_p と η_0 の関係

係の一例を図7に示す。この図からも明らかなように η_0 は一般に γ_p が小さい程大きくなる。しかし γ_p を小さくとると(57)から Q_n すなはち γ_n を大きくとらねばならぬ。γ_n が或る限度を越すとダクトのディフューザー部の流れの剝離に基づく粘性抵抗が大きくなり好ましくない。ディフューザー部の広がり角を限度内におさへて，しかも(57)の条件を満す範囲内で γ_p を小さくすることができれば η_0 は大きくなる。これはプロペラ前方のダクト形状の決め方にかかっている。このような考へ方のもとに γ_p, C_0, C_1, C_2 etc を定める方法は大略次のようになる。

(1)　ディフューザー部のダクト形状を流れの剝離を考慮して定める。

(2)　ダクト後部の形が(1)で定めたものになるための γ_p, C_0, C_1, C_2, の間の条件を求める。

(3)　(2)で求めた条件と(57)の条件から例へば γ_p と C_0 の間の関係を求める。

(4)　(3)で求めた条件を満す範囲で最小の γ_p を求める。

(5)　(4)で求めた γ_p に対応する C_0, C_1, C_2 を定める。

なお(57)の Q_n には(40)式を使用する。4で明らかなように(40)の Q_n はかなり大胆な近似計算を行なっている。これは(40)の Q_n を一次元理論に使用することを念頭に置いたためであり一次元理論の量的精度を考へれば(40)で Q を評価してもおかしくないと思う。

6　あ と が き

ダクト・プロペラの流力モデルとして簡単な渦モデルおよびダクト内流れの一次元モデルを用いて推進効率が大きくなるダクトおよびプロペラ形状を求めるための理論的方法について一つの提案を行なった。本論で示した方法によってダクト形状等を求めるに当たっても，若干の試行錯誤の部分が残ると思うがその各ステップにおいては，ダクト・プロペラの形を与へて性能を計算する数値解析が必要となる。本論3，4で示した解析法は今までに発表されているものに比してかなり簡単化されている。したがって，これを用いれば本論の方法に沿って性能の良いダクト形状を求めるための数値計算は若干の数表を用いれば電卓によっても実行可能と思う。

なお本論ではここで提案した方法により求まるダクト・プロペラの形の具体例とか，その性能の実験等による検証について述べることができなかった。これらについては今後の問題として残される。

記号の説明

x, r：円筒座標

R：プロペラ半径

ξ, η：$\xi=\dfrac{x}{R}$, $\eta=\dfrac{r}{R}$

t：$\xi=\dfrac{l}{2R}(t-t_p)$

t_p：$\dfrac{l_1-l_2}{l}$

l, l_1, l_2：夫々ダクト全長とプロペラ前後のダクト長さ

A_p：プロペラ位置のダクト内流路面積

r_n：ダクトの半径

ω：プロペラの回転角速度

$2\pi h$：プロペラ自由渦のピッチ

γ_p：プロペラ束縛渦の循環密度

γ_n, γ_n^0, γ_n^1：夫々ダクト束縛渦の循環密度，ダクトの循環密度の連続分布，および不連続分布 ($\gamma_n=\gamma_n^0+\gamma_n^1$)

u_0：ダクト・プロペラへの流入速度

W_{px}, W_{px}：夫々プロペラ誘導速度の x, r 成分

W_{nx}, W_{nx}^0, W_{nx}^1：夫々 γ_n, γ_n^0, γ_n^1 による誘導速度の x成分 ($W_{nx}=W_{nx}^0+W_{nx}^1$)

W_{nr}, W_{nr}^0, W_{nr}^1：夫々 γ_n, γ_n^0, γ_n^1 による誘導速度の r 方向成分 ($W_{nr}=W_{nr}^0+W_{nr}^1$)

$\varDelta u$：ダクト・プロペラ無限後方の流速を u_∞ とすれば $\varDelta u=u_\infty-u_0$

T_p, T_n, T_o：夫々プロペラ推力，ダクト推力および全推力 ($T_o=T_p+T_n$)

L_p：プロペラ駆動用動力

Q：プロペラ位置のダクト内流量

ρ：水の密度

η_0：ダクト・プロペラの効率

参 考 文 献

1) 永井　實，伊良部邦夫：日本機械学会論文集，53巻489号，B編，1987.

2) 坂尾　稔：関西造船協会誌第155号，p. 23，1974.