

ゴ ム ひ も の 横 振 動

—— 2 点を摘み上げて離す場合 ——

高 橋 成 和*

Masakazu TAKAHASHI

The Transversal Vibrations of a Horizontal Stretched String
-on the Rubber String that the Two Points are picked up and released

I はじめに

小学校理科の「音」に関する単元に、両端を固定したゴムひもの1点をつま弾き、その振幅と発生する音の強度の関係を学習指導する教材がある。この教材を、自然科学の視点から深化し、振動中のゴムひもの形状について論述・具現することを前報¹⁾にて行った。

これによると、振動の初期におけるゴムひもは、一方から他方の固定端に至る三つの折れ曲った線分を構成していた。その二つの折れ曲り点は、初めにゴムひもが構成した、摘み上げた点と両固定端を結ぶ二つの線分を2辺とする平行四辺形の周上を、逆方向に回った。すなわち二つの折れ曲り点は、摘み上げた点を出発し、2辺を横波が伝播する速さで進み、両固定端の中央に関する摘み上げた点の対称点で擦れ違い、出発点で再会する。したがって、三つの線分のうち中央の線分は平行四辺形の内部を慣性により等速で平行移動し、両側の部分は周上に留まる。ただし時間の経過と共に、振動は減衰し、折れ曲りの角はとれて曲線になる。

ところで、人間が2本の手を持つことから、この問題は2点をつま弾く場合の議論へと進展しよう。ここでは、両端を固定したゴムひもの、中央を除く4等分点の二ヶ所を同方向にまたは逆方向に摘み上げ、一方を他方に比べ時間遅れを持たせて静かに離すときのひもの横振動について議論する。

II 空間的 形状

水平に張ったゴムひもの両固定端を A, B とし、ゴム

ひもの4等分点を鉛直線上に摘み上げた点を P, Q とする。P, Q の変位は絶対値を等しく、その位置は互に同方向または逆方向におく。P を先に Q を遅れて離すとき、振動するゴムひもの空間的形状を作図しよう。

II-A 同方向に摘み上げる場合

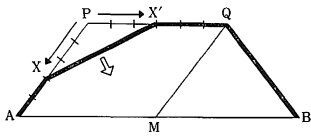
作図の経過を図1に示す。以下これに沿って検討を加える。

Q が固定されている限り、P を離れた後のゴムひもの形状は、A, Q を固定端とし P に摘み上げて離す場合と同じである。すなわちゴムひもは、3本の線分 AX, XX', X'Q を構成し、折れ曲り点 X と X' は P から PA, PQ を2辺とする平行四辺形 PAMQ の周上を、横波が伝播する速さで、互に反対方向に回る。ここで M は AB の中点である。いまこの速さを、PA 上を5ステップで、PQ 上を6ステップで X と X' が走るとしておく。

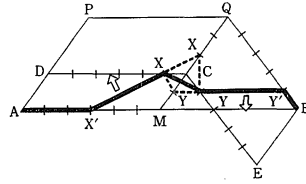
図1において(1)は、ゴムひもが P を離れて3ステップ後の形を示す。XX' は慣性により等速度で進み、10ステップ後には(2)の形になる。このとき、Q に固定したゴムひもを解除する。この1ステップ後は(3)に示すように、X と X' は M で擦れ違い、Q を出発した折れ曲り点 Y と Y' は QM, QB 上を5ステップで進む速さで走る。さらに2ステップ後において、X と Y は(3)における MY の中点 C で会合し、ゴムひもは(4)のようになる。

ここで XX' は慣性により等速度で移動するので、その向きを変えることはない。また X と X' は平行四辺形の周囲に沿って走ることから、今迄の平行四辺形 PAMQ あるいは MA, MC を2辺とする新しい平行四辺形 MADC の周上を進むことになる。同様に Y と Y' も、今迄の QM, QB を2辺とする菱形あるいは新しい平行四

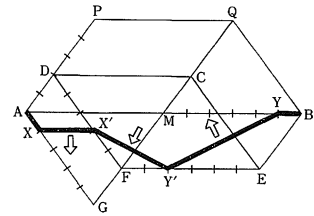
* 島根大学教育学部理科教育研究室



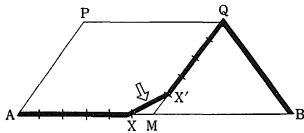
(1) Pを離して3ステップ目。Pを出発した折れ曲り点XとX'が、平行四辺形PAMQの周上を走る。



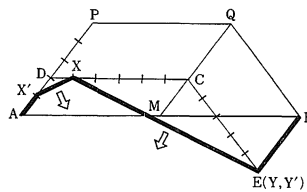
(5) Pを離して14ステップ目。二つの折れ曲り点XとYは、新しくC D, C E上を走る。



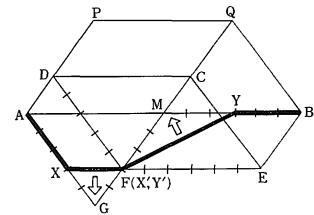
(9) Pを離して22ステップ目。



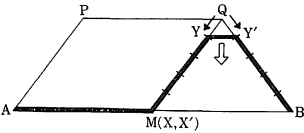
(2) Pを離して10ステップ目。このとき、Qを離す。



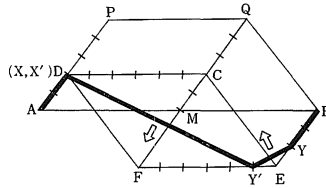
(6) Pを離して18ステップ目。折れ曲り点YとY'はEで再会する。



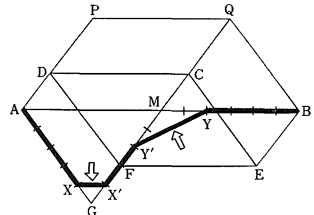
(10) Pを離して24ステップ目。二つの折れ曲り点X'とY'はFで会合する。



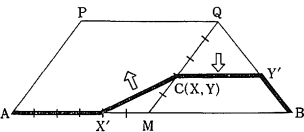
(3) Pを離して11ステップ、Qを離して1ステップ目。折れ曲り点XとX'はMで再会し、折れ曲り点YとY'はQMとQB上を走る。



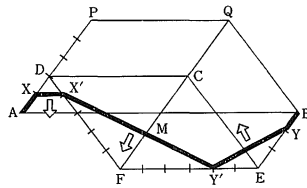
(7) Pを離して19ステップ目。折れ曲り点XとX'はDで再会し、Y'は新しくEF上を走る。



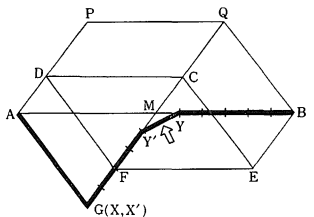
(11) Pを離して25ステップ目。二つの折れ曲り点X'とY'は、それぞれ平行四辺形DAGF, EFMBの周上を走る。



(4) Pを離して13ステップ、Qを離して3ステップ目。このとき、二つの折れ曲り点XとYがCで会合する。

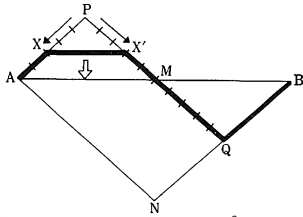


(8) Pを離して20ステップ目。折れ曲り点XとX'は、新しくDAとDF上を走る。

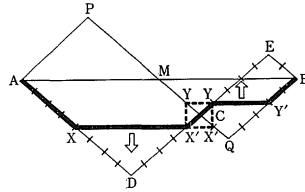


(12) Pを離して26ステップ目。折れ曲り点XとX'がGで再会し、Mに関する(2)の対称形になる。

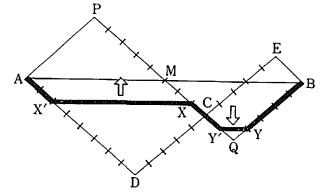
図1 同方向に摘み上げたゴムひもの空間的形狀を、時間経過を追って作図した例。AB間に張ったゴムひもをP, Qまで鉛直線に沿って摘み上げ、Pを先に、Qを遅れて静かに離すとす。また、ゴムひもの折れ曲り点は、PA上を5ステップ、PQ上を6ステップで走るとした。



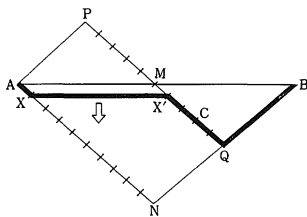
(1) Pを離して3ステップ目。Pを出発した折れ曲り点XとX'が、平行四辺形P A N Qの周上を走る。



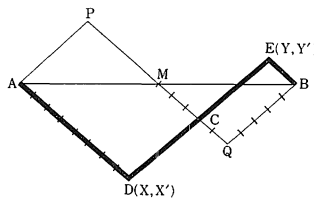
(5) Pを離して9ステップ目。二つの折れ曲り点X'とYは、新しく平行四辺形P A D CとQ C E B上を走る。



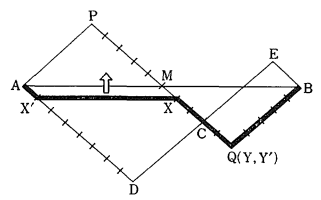
(9) Pを離して19ステップ目。各折れ曲り点は(5)と同じ平行四辺形の周上を走る。



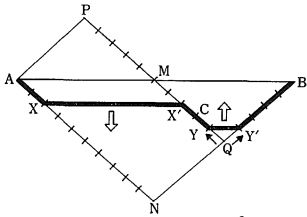
(2) Pを離して6ステップ目。このとき、Qを離す。



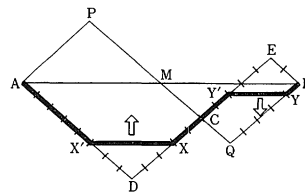
(6) Pを離して13ステップ目。折れ曲り点XとX'はDで、YとY'はEで再会する。



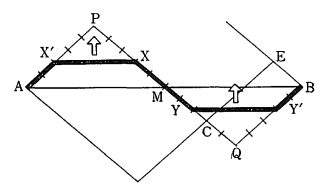
(10) Pを離して20ステップ目。折れ曲り点YとY'がQで再会する。



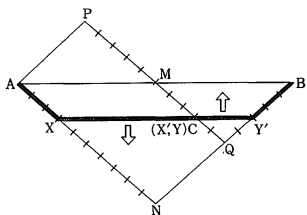
(3) Pを離して7ステップ、Qを離して1ステップ目。折れ曲り点YとY'はQPとQB上を走り、X X'は下降、Y Y'は上昇する。



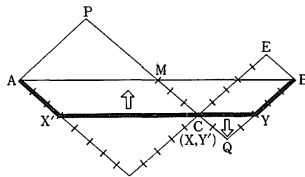
(7) Pを離して16ステップ目。X X'は上昇、Y Y'は下降する。



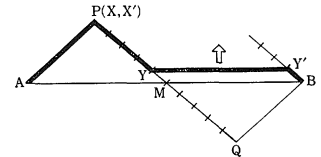
(11) Pを離して23ステップ目。折れ曲り点YとY'は、QPとQB上を走り、Y Y'は上昇しX X'を追い掛ける。



(4) Pを離して8ステップ、Qを離して2ステップ目。このとき、二つの折れ曲り点X'とYがCで会合する。



(8) Pを離して18ステップ目。二つの折れ曲り点XとYがCで会合する。



(12) Pを離して26ステップ目。折れ曲り点XとX'がPで再会し、Mに関する(2)の対称形になる。

図2 逆方向に摘み上げたゴムひもの空間的形状を、時間経過を追って作図した例。AB間に張ったゴムひもをP、Qまで鉛直線に沿って摘み上げ、Pを先に、Qを遅れて静かに離すとす。また、ゴムひもの折れ曲り点は、どこもPAを5ステップで移動する割合で走るとした。

辺形 QCEB の周上を走る。すなわち X は CD あるいは CQ 上を, Y は CM あるいは CE 上を進む場合が考えられる。ここにゴムひもの形状は 4 通りの可能性を持つ。このことを(5)に実線と点線で示してあるが, 点線で示した形状は実線で示した形状よりゴムひもが持つエネルギーが高く, 実現しない。実線で示した形状の場合には, もちろんゴムひもが持つエネルギーは保存している。ここに至ってゴムひもは五つの線分を構成し, X と X' は平行四辺形 MADC の, Y と Y' は平行四辺形 QCEB の周上を走り, 線分 XY は CD と CE を 2 辺とする平行四辺形 CDFE の内部を等速運動することになる。

以下同様に作図を実行し, この結果を(6)から(12)に示した。(6)では Y と Y' が E で, (7)では X と X' が D で, また(10)では X' と Y' が F で会合している。これに続くステップも(5)と同様に考えて, 可能性から実現する形状を選択する必要があるが, ここではその結果のみを示した。なお(12)は, ゴムひもが P を離れてから 26 ステップ目にあたり, M に関する(2)の対称図形となっている。したがって, この後のゴムひもの形状も, (3)から(12)の M に関する対称形となる。

II-B 反対方向に摘み上げる場合

作図の過程を図 2 に示す。この場合, 初めに摘み上げたゴムひもと平行な部分は, いずれも張力が等しく, そこを走る折れ曲り点の速さはみな同じである。その速さは, PA を 5 ステップで進む割合とする。

P を発した折れ曲り点 X と X' は PA, PQ を 2 辺とする平行四辺形の周上を移動し, 3 ステップ目の(1)に示すように, 線分 XX' は AB と平行を保ち下降する。(2)に示す 6 ステップ目に, Q の固定を解除する。この 1 ステップ後の(3)では, Q を発した折れ曲り点 Y と Y' を結ぶ線分が AB に平行して上昇している。

8 ステップ目では, (4)に示すように, X' と Y が(2)の X'Q の中点 C で会合する。ここで, X' は PA と PQ, あるいは PA と PC を 2 辺とする平行四辺形の周上を進む可能性がある。同様に, Y も QP と QB, あるいは QC と QB を 2 辺とする平行四辺形の周上を進む可能性がある。この可能性を含めると, X' と Y を結ぶゴムひもの形状は 4 通りあるが, エネルギー最小の観点から, (5)に示した実線が実現する。以後 XX' は平行四辺形 PADC の内部を, YY' は平行四辺形 QCEB の内部を移動し, X と X' は点 D で, Y と Y' は点 E で擦れ違い, ゴムひもは(6)のようになる。再び XX', YY' はそれぞれの平行四辺形の中を戻り, C 点で X と Y が会合して(8)のようになる。ここでも(5)と同様な可能性が生

じるが, (9)のように進み(12)に至る。(12)は(2)と AB の中点 M に関する対称図形であるから, (12)以後のゴムひもの形は, (2)から(12)に示した形の点 M に関する対称形になる。

II-C 折れ曲り点の軌跡

本章で求めたゴムひもの形状変化は, (1)折れ曲り点 X と X', Y と Y' が移動する速さ, (2) P と Q を離れる時間差, いいかえれば線分 XX', YY' が最初に出会う点 C の位置が定めれば一義的に定まる。ここで, 折れ曲り点移動する軌跡をまとめると図 3, 図 4 に示すようになる。ただし, これらには X と X' の軌跡のみを描いた。Y と Y' の軌跡は, 図 1, 図 2 それぞれの(2)と(12)が点 M に関する対称図形であることから X と X' の軌跡の点 M に関する対称形になる。

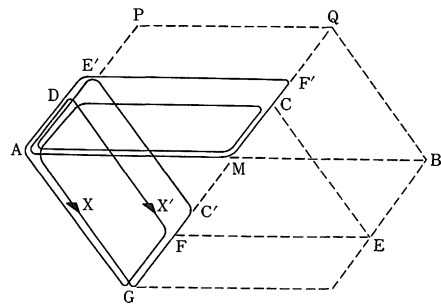


図 3 同方向に摘み上げた場合について, 折れ曲り点 X と X' が描く軌跡。折れ曲り点 Y と Y' の描く軌跡は, これらと M に関して点対称となる。

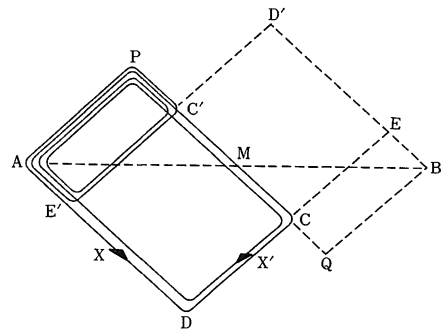


図 4 逆方向に摘み上げた場合について, 折れ曲り点 X と X' が描く軌跡。折れ曲り点 Y と Y' の描く軌跡は, これらと M に関して点対称となる。

III 時間的振動波形

前章においては, 振動するゴムひもの形状を空間的に

連続した姿で提示したが、時間経過においては間欠的であった。本章では、空間的には間欠的であるが、時間的に連続した振動波形を作図する。すなわち、二つの固定端を結ぶ線分 AB の 4 等分点を通る鉛直線上におけるゴムひもの変位を時間経過と共に追った振動波形を求める。ここでゴムひもの各部分が鉛直線上で振動していることは確認できている。なお時間の単位は図 1、図 2 の 1 ステップをあて、変位の単位は P の AB からの変位をもってする。

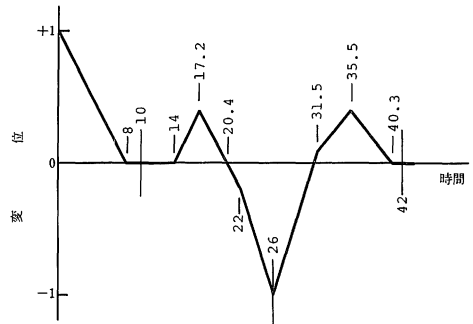
Ⅲ-A 同方向に摘み上げる場合

図 1 における P を通る鉛直線上のゴムひもの振動を、図 5 の(1)に示す。以下 () の数字は図 1 の図の番号に対応する。

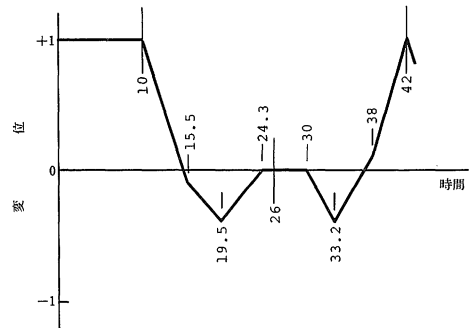
初めから 8 ステップ目までの変位の減少は、(1)で XX' が M に向かって下る部分である。X が P から AM に下した垂線の足、すなわち AM の中点を通り M に達する 8 から 11 ステップ目までと、X' が M から AM の中点に達する 11 から 14 ステップ目までは、ゴムひもが AM 上にあり変位 0 となる。このあと、(5)の XX' が、P を通る鉛直線を通してする間のグラフは上り勾配となり、(5)の XY が通過する 17.2 ステップから、(8)の X'Y' が通過する 22 ステップ目に亘っては、(9)における X' の変位 -0.2 まで下り勾配となる。この傾きの絶対値は、今までの上下の勾配の絶対値に等しい。

続いて 22 から 26 ステップ目までは、(9)の XX' が(12)の G まで下降し、5 ステップあたり変位 -1 の下り勾配となる。これから 42 ステップ目までの振動は、次に述べる(2)から始まる Q を通る鉛直線上の変位と絶対値が等しい。以後 10 から 42 ステップ目までの間の振動を繰り返す。

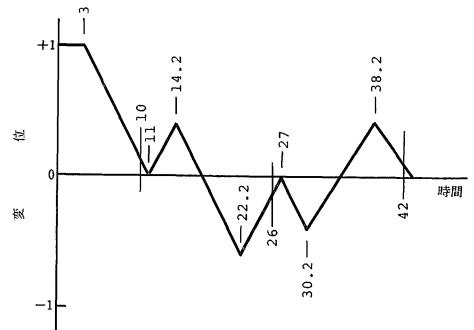
Q を通る鉛直線上の振動を図 5 の(2)に示す。初めから Q の固定が解かれる図 1 の(2)に示す 10 ステップ目までは、変位 1 に固定される。その後(3)の YY' が 5 ステップあたり変位 -1 の割合で下降し、この下降は(5)における Y が Q を通る鉛直線と CE との交点を通過する 15.5 ステップ目まで続く。その後(5)の XY が下降に移り、(7)の Y' が Q を通る鉛直線と EF との交点を通過する 19.5 ステップ目まで、8 ステップあたり変位 -1 の傾きで変位が減る。続いて(7)の YY' の通過により、グラフは上り勾配に変わり、これは(10)の Y が Q から AB に下した垂線の足を通過する 24.3 ステップ目まで続く。以後 BY が BA に固定されて、(12)の 26 ステップ目まで変位は 0 となる。これから 42 ステップ目までは、(2)から(12)までの P を通る鉛直線上の変位と符号が反対の変位



(1) 摘み上げた点 P を通る鉛直線上において。



(2) 摘み上げた点 Q を通る鉛直線上において。



(3) 両固定端間の中点 M を通る鉛直線上において。

図 5 同方向に摘み上げたゴムひもの時間的振動波形。横軸の時間経過は図 1 の 1 ステップを、縦軸の変位は P へ初めに変位させた値を単位にしている。

をなし、以後 10 から 42 ステップ目までの振動を繰り返す。

固定端の中点 M を通る鉛直線上における振動は、図 5 の(3)に示すとおりになる。初めから図 1 の(1)に至るまで、ここでのゴムひもは線分 PQ の上であって変位 1 を保ち、X' が PQ の中点に達す 3 ステップ目から、(1)ま

た(2)の XX' が M で会合する11ステップ目までの間に変位は0へと減少する。 M を通る鉛直線上を(5)の XX' が通過する14.2ステップ目までに変位は0.4へ増し、次いで XY の下降が到達する。この変位は C の高さであり、ここに会合点の位置の情報を含んでいる。これを(8)の $X'Y'$ が受け継ぎ、(9)の Y' が M の真下を通過する22.2ステップ目の変位 -0.6 までグラフは下がる。ここで(9)の YY' が M の下に来るので、 Y と Y' が M で会合する27ステップの変位0までグラフは上がる。26ステップ目の(12)は、10ステップ目の(2)と M に関する点対称であるから、10ステップ目から26ステップ目までの変位が、26ステップ目から42ステップ目までの間に符号を反対にした変位となって現われる。以後ステップ10目からの振動を繰り返す。

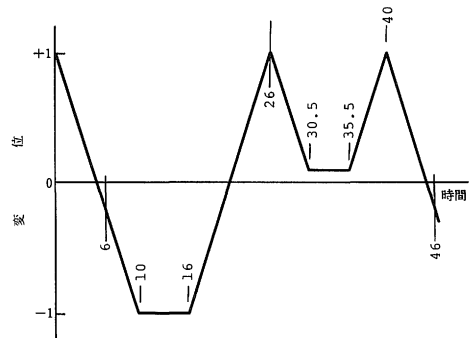
III-B 逆方向に摘み上げる場合

図2において、 P を通る鉛直線上でのゴムひもの振動を図6の(1)に示す。以下()の数字は図2の図の番号に対応する。

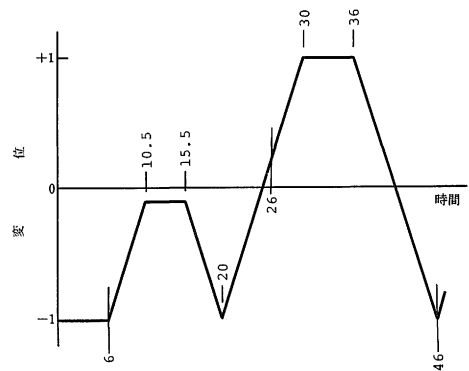
折れ曲り点 X と X' が P を出発する図2の(1)から、(5)における AD 上の、点 P の鉛直真下を X が通過する10ステップ目まで、1ステップあたり0.2の割合で変位は減少する。続いて X と X' が D で会合し、 X' が点 P の鉛直真下に来る(7)の16ステップ目まで変動がない。その後、線分 XX' が上昇し、 P に至る(12)の26ステップ目まで、変位1へと増加する。以後の変位は、次に述べる Q を通る鉛直線上の振動の変位と、符号が反対になることを除けば、同様になる。

点 Q を通る鉛直線上の振動は、図6の(2)に示してある。図2の(2)までの6ステップの間、 Q は固定されている。点 Q からゴムひもが開放されると、 YY' は(3)から(5)のように上昇し、 Y が CE 上を Q の真上に来る10.5ステップ目まで変位は増す。このあと CY が CE 上に固定され、 Y と Y' が E で再会し、 Y が EC 上の Q の真上に来る15.5ステップ目まで変位は -0.1 に固定される。これをすぎると、 YY' は Q へと下降するので(10)の20ステップ目までは振動の変位は減少する。 Y と Y' が Q で会合すると、再び YY' は(11)、(12)のように上昇し、26ステップ目の変位0.2へと増加する。これから40ステップ目までは、 P を通る鉛直線上の振動と変位の符号を反対にして一致する。

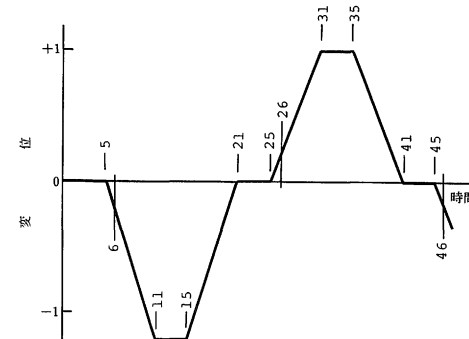
固定端を結ぶ線分 AB の中点 M を通る鉛直線上の振動を図6の(3)に示す。図2の(1)において、折れ曲り点 X' が M に達する5ステップ目までは、 M 点のゴムひもは MQ に固定されているから、変位は0である。 X'



(1) 摘み上げた点 P を通る鉛直線上において。



(2) 摘み上げた点 Q を通る鉛直線上において。



(3) 両固定端間の中央 M を通る鉛直線上において。

図6 逆方向に摘み上げたゴムひもの時間的振動波形。横軸の時間経過は図2の1ステップを、縦軸の変位は P へ初めに変位させた値を単位にしている。

が M を通過すると、(2)のように XX' が下降することにより、振動の変位は負の方向に増す。これは(5)の X' が CD 上の M の真下を通過する11ステップ目まで続く。これをすぎ、(6)の D で X と X' が会合し、 X が

CD 上にある M の真下の点を通る15ステップ目までは、ゴムひもは CD 上に固定され、振動の変位も固定される。この変位は C の深さの2倍であり、ここに会合点の位置の情報を含んでいる。再び(7)のように XX' が戻って上昇すると、振動の絶対値は小さくなる。しかし、(10)における X と Y' が M を通過する21ステップ目から25ステップ目までは、ゴムひもが(11)のように M に固定され、変位は0となる。Y' が M を越えれば、YY' の上昇に伴って、振動の変位は増す。26ステップ目以後の変位は、6ステップ目からこれまでの変位の符号を反対にして繰り返す。

IV 検証の方法

IIで述べた空間的形状を検証するためには、ゴムひもの振動をマルチストロボ照明で写真撮影すればよい。しかしここでは、空間的形状から時間的振動波形に直した IIIの結果を検証することにする。

この波形の観測を行った実験装置を図7に示す。その骨子は、水平に張ったゴムひもに、3本の帯状の光束を鉛直方向からあて、ゴムひもに三つの輝点を作る。ゴムひもの振動と共に、これらの輝点は鉛直線上を振動する。この振動の記録は、連続的にフィルムを等速度で流すカメラで撮影して行った。

光源には 5mw の He-Ne レーザーを用い、この光を直径 3cm の平行光速に広げる。これを幅 5mm×長さ 4mm の鏡で三つに分け鉛直方向へと反射させて、幅 1mm のスリットを通してゴムひもを照明した。併せて、フィルム上にタイムマークを写し込むために、固定端 B の近くで LED を AC 60Hz にて点滅させた。

ゴムひもは直径 1.3mmφ、長さ 30cm で線密度 11.3 mg/cm、バネ定数 1.36gw/cm/cm をもち、水平に張っ

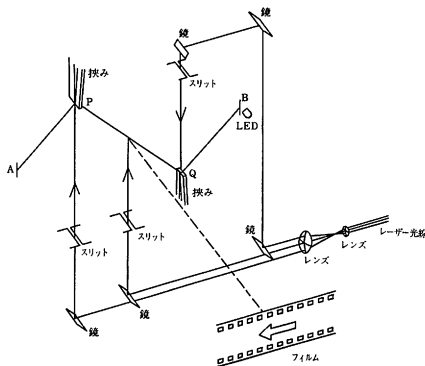


図7 ゴムひもの時間的振動波形を写真撮影する装置。

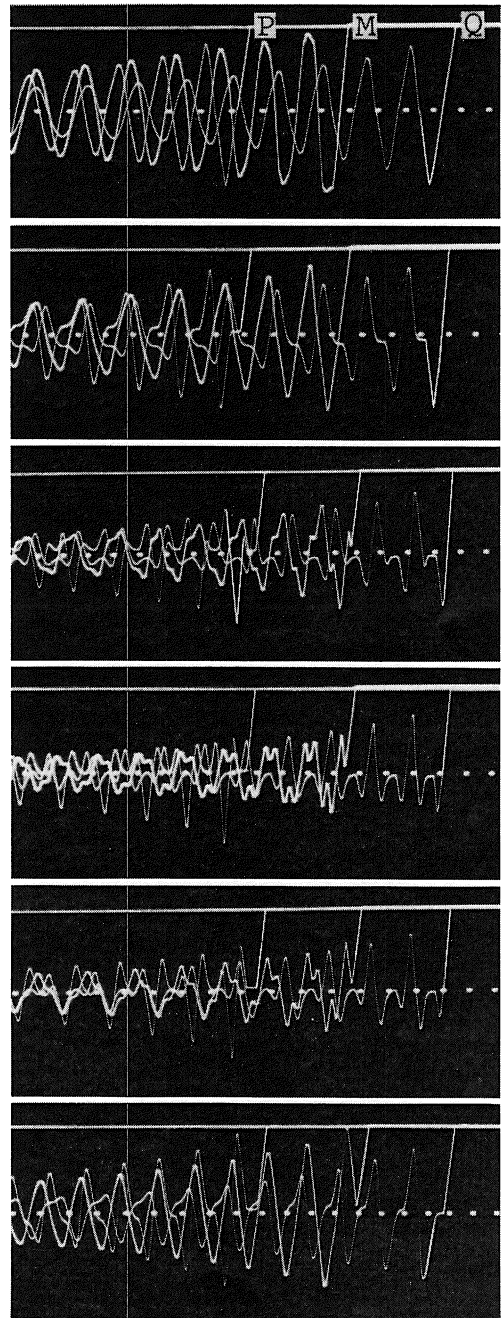


図8 同方向に摘み上げたゴムひもの振動波形，上から下へ，Pを離してからQを離す時間遅れが大きくなる。時刻は右から左へ経過し，白点の間隔が1/60秒を表す。3本の波形は，左がP，中央がM，右がQを通る鉛直線上の振動を示す。

たときの初期張力は 40gw，また摘み上げた変位は 6cm である。

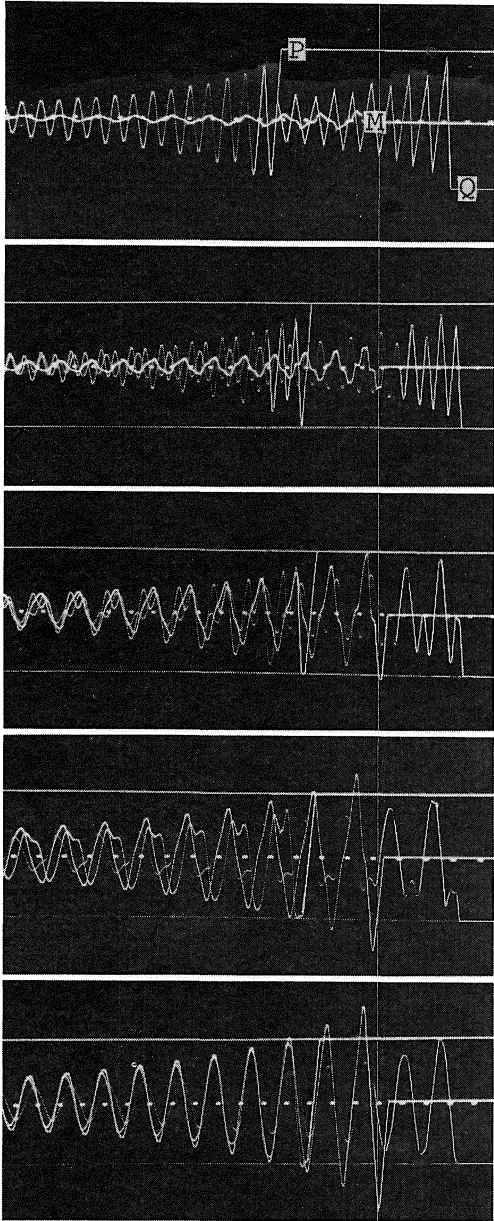


図9 逆方向に摘み上げたゴムひもの振動波形。上から下へ、Pを離してからQを離す時間遅れが大きくなる。時刻は右から左へ経過し、白点の間隔が1/60秒を表す。3本の波形は、左がP、中央がM、右がQを通る鉛直線上の振動を示す。

V 写真撮影の結果と考察

写真撮影の結果を図8と図9に示す。前者は同方向に、後者は逆方向に摘み上げた場合で、上から下へゴム

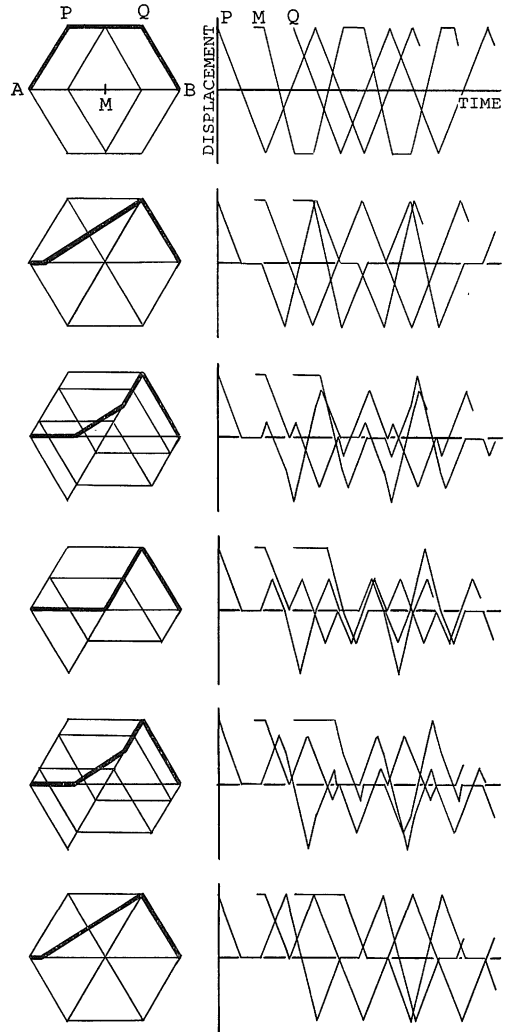


図10 同方向に摘み上げたゴムひもについて作図した振動波形。これらの時間軸は図8と逆に拡大して描いてある。左の列に、Qを離れる瞬間のゴムひもの形と折れ曲り点を通る平行四辺形を示した。

ひもがPを離れたあとQから解放されるまでの時間遅れが大きくなっている。ここでの写真の時間経過は右から左へ進んでいる。また各写真にある三つの波形は、二つの固定端の間ABを4等分したP、M、Qの位置での振動であり、この位置のずれが時間の経過に混入されている。中央に並んでいる点の列はタイムマークで、各白点の間隔は1/60秒である。IIIでの結果は図8の4節目、図9の中央に類似している。

ゴムひもがPを離れ、遅れてQを離れるまでの時間差を図8、図9の場合になぞらえて持たせ、時間的振動

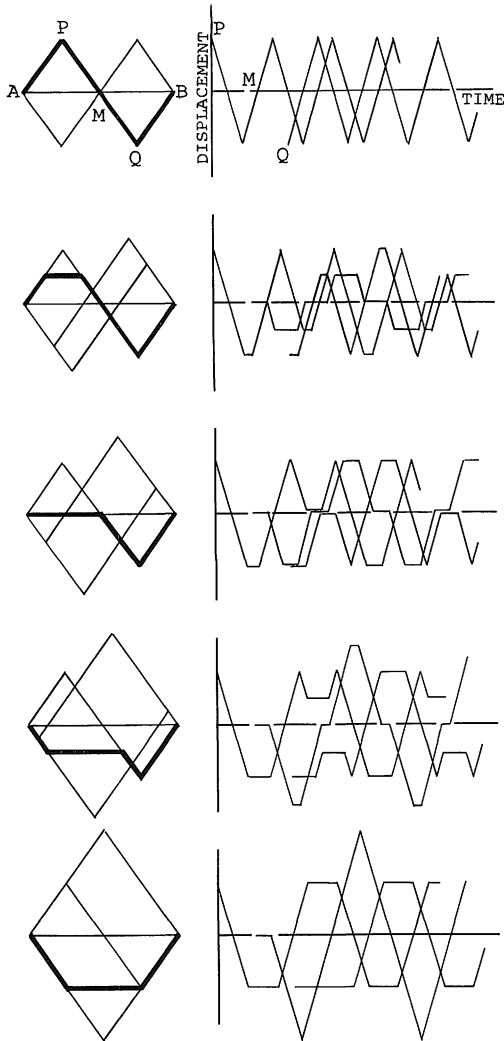


図11 逆方向に摘み上げたゴムひもについて作図した振動波形。これらは、図9になぞらえて描いてある。左の列に、Qを離れる瞬間のゴムひもの形を示した。

波形を作図すると図10, 図11のようになる。ここで左の列に、Qを離れる瞬間のゴムひもの形を示しておいた。

これらの作図の結果は、写真撮影の結果をよく物語っていることが分る。

VI お わ り に

両端を固定し、中央を除く4等分点を摘み上げて静かに離れたゴムひもの振動について、その空間的形状を作図し、これを元に時間的振動波形を導いた。これらはエネルギー消散のない理想化された場合の議論だが、振動波形の作図の結果は振動の初期における現実のものによく一致した。

空間的形状については、1点を摘み上げる場合に比べてかなり複雑である。この作図の結果から、ゴムひもが多くの折れ線から成ることを見た。これの具現は別の報告にゆずる²⁾。

本研究は、小学校理科の教材を深化することに端を発した。だからといって、本論文が児童の指導に直に役立ことはない。しかし指導面から考察することに偏りがちな教材を、このように自然科学の立場から教師自らが探究し、考究することは、自然の認識を深めると共に、自然探究に対する好奇心を高揚し、創造性の発揮、科学の方法の経験を積むことになり、このことが児童を指導する内容、方法、態度によき反映をもたらそう。本論文は自然探究の成果と共に、教材の自然科学的深化の事例を示したことに意義を見出したい。

参 考 文 献

- 1) 高橋成和・古川明信：島根大学教育学部紀要（自然科学編），19，37，1985.
- 2) 高橋成和：日本理科教育学会中国支部大会予稿集，35，18，1986.