数学科における問題解決の心理学的研究

三　浦　泰　二

Ⅰ　問題解決における問題

1　問題のもつ意味

問題解決という用語の解釈は多様であるから予め「問題」のもつ意味を明確にして混迷をさける用意をしておくことは望ましいに違いない。そこで問題のもつ意味を内面的と外面的に先ず分けていく。

①　内面的意味について

これは問題とは何か？　に対する解答で示されるところの問題の意味である。別言すれば、問題がそれ自身の内面に含有する意味であつて普通に〝問題の意味〟と云われるものである。この内面的意味を分けて広い意味と狭い意味とにする。

広い意味というのは、問題が山積しているとか人生は問題解決の連続的過程であるとかの如く云われ時の問題の意味である。例えば生徒に与えられた宿題一それが記憶すべき問題、理解すべき問題、練習すべき問題、解決すべき問題のどれであろうとも一は広い意味での問題である。

狭い意味というのは、解答又は解決を要求すべく提出された質問でその解決を妨げる障害があつてその障害が直接に習慣的方法では取除け得ないために充分熟考しなければならぬような場合である。例えば数学の証明問題とか発見問題とかは狭い意味での問題が多い。この狭い意味をさらに分けて客観的意味と主観的意味とにする。

客観的意味は個人に関係ない場合の問題の意味である。実例は後程あげることにする。

主観的意味は特定の個人にとつての問題の意味である。個人にとつて問題が意味をもつための必要条件として次の三つをあげて、※①

(イ)　提出された質問において個人が到達しようとする目標を明確に自覚すること。

(ロ)　この目標に到達しようとする活動を妨げる障害（習慣的又は固定的方法では除去不可能な性質のもの）が生起すること。

(ハ)　この障害を明確にして可能な解決方法の発見を試み始めること一という。

有名なソーンダイクの息子 R. L. Thorndike は、個人にとつての問題について論じて、問題は複雑さ精妙さについて凡べてのレベルをもち日常の事柄から科学的理論の形成に到るまでずつと分布しているが何れも次の三つの要素をもつという。※②

(イ) 個人は特別の目的に方向ずけられそれに到達するように動機ずけられる。

(ロ) 目的への接近は妨害されている。

(ハ) 有効な習慣的反応の型は個人がその障害を乗り超えて目的へ進近することを許すのに適切でないーと述べている。

例えば、客観的意味では「$x^2-a^2-2ab-b^2$ を因数分解せよ」は問題であり得る。だが主観的意味では、小学生にも数学専攻の大学生にも問題とならない。中学生にしても或生徒には問題となるが他の生徒には問題とならないことも起り得る。その判定は上記の条件(イ)(ロ)(ハ)に照らして見ればすぐ出来る。

数学科の問題解決における問題の意味は主観的意味一個人にとつての問題ーに中心をおくのが順当であろう。

② 外面的意味について

これは〝問題というもの〟の意味であつて、問題の中味でなしに外側に附着している意味である。これを一般的意味と特定的意味に分けて見ることにする。

一般的意味とは〝問題というもの〟は直ぐ解答のえられないものとか、一度読んだ位では解けるものではないとか、落着いてやるべきものとか、自分で考えねばならぬものとか、の如く云われる折の意味である。これはさらに問題というものは、むつかしいものとか、おとし穴のかくされているものとか、まともに考えたのでは出来ないものとか、の如く主としてパズルか判じものを指すように云われることもある。数学の出来ない子供など、問題を一度読んだだけですぐに〝先生私にはわかりません〟とか〝かけ算でやるのですか〟とか質問するのをよく見受ける。これは問題というものの一般的意味が正しく摑めていないことを物語つている。

特定的意味とは問題が個人によつて特定の意味に受け取られる場合に現われる意味である。勿論問題中の用語や記号や関係を個人が如何ように理解するか又は問題が個人の動機に如何ように関連するかによつて各人が受取る意味は異なる。だが往々気ずかれないままにあることは受取り方が個人の必要如何によつて異なることである。同一の問題が個人によつて異なる意味をもつ例をあげて見よう。※③

(イ) Ⓑにとつて問題は漫画の本にもどつて来れるまでの短い妨害を意味する。そこで彼のゴールはとにかく解答をはやく得ることである。

(ロ) Ⓗにとつて問題はクラスの男友達の注意をかちえてそれを女友達に示すチヤンスを意味する。そこで彼のゴールは教師や友人の賞讃を得るような鮮やかな解決である。

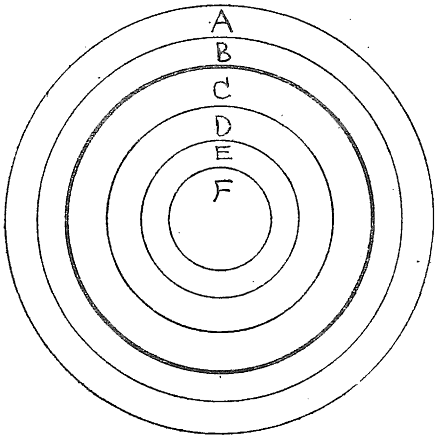
(ハ) Ⓕにとつて問題は彼の自尊心に対する脅迫を意味する。すべての数学の問題がそうだ。

(ニ) Ⓣにとつて問題は何も意味しない。

(ホ) Ⓢにとつて問題はもし商いでもうけ仕事を摑む見込みがあるならば解き方をうまく学習したところの一種の問題を意味する。彼女は問題を解こうとやり始め、この種の問題は如何にして解き得るかを記憶しようとする。

この例が示す如く問題のもつ意味は個人によつて相異する。これが特定的意味である。

問題のもつ意味をまとめて図解すると次の如くなる。



外面的意味

- A　一般的意味
- B　特定的意味

内面的意味

- C　広い意味
- D　狭い意味
- E　客観的意味
- F　主観的意味

ついで乍ら附言しておき度いことは、問題の意味は同じでも種類は色々異なつたものがあり得ることだ。例えば主観点意味での問題において知性的問題と作業的問題とかなまの問題とかいた問題とか又はあわせた問題とひとえの問題とかである。※④　社会科における問題解決の問題はなまの問題やあわせた問題が中心である。数学科ではむしろかいた問題に重みがかかつている。

Ⅱ　問題解決の論理的分析

最もよく知られている論理的分析は J. Dewey の五段階である。※⑤

第一段階　問題（障害）の自覚

第二段階　問題の明確化

第三段階　仮説の創立

第四段階　仮説からの推理

第五段階　仮説の検証

この分析に対して R. L. Thorndike の言う所を聞こう。※⑥

一問題解決において進行する行動の複雑な装いを討議するために、この行動を多くの局面又は分節にこわす時、それは助けとなるかも知れないけれども、解決過程の分解は人工的であつて、たとえどの型の分析にしても難渋するのはそこに有機的単一性があるということである。J. Dewey は過程を五節に分析しているが、これら各節は問題解決の観念化された過程において運ばれるべき各々の歩み（Step）の論理的系列を表わす。だが併し、これは個人が問題解決を貫徹する実際についての記述よりもむしろ問題解決についての我々の理解を助け

る分析である。この分析は整頓され論理的で且結果として伴うものである、問題状況への反応としての実際の行為は屢々混雑して非論理で秩序なきものである。さらに各々の問題解決者や解決さるべき各々の問題はそれぞれ自分自身の個別的特性を有している。一様よりもむしろ多様が問題攻撃においてはルールである。我々は問題解決者が上述のステップを整然と論理的に進み行くのを見出さない、むしろ彼は飛びまわり屢々中程から出発し、次に始めのステップに立ち帰えり仮説と問題の明確化との間を、又は関連の評価と再び仮説との間を前後に移動する。さらに仮説が何を意味し含んでいるかを考えぬくことなしにそれを行動に移される時など若干の局面は現われないことさえある。問題解決の進行は順序正しく一様な型で次々に起らないで、二歩前進するために個人は屢々一歩後退せねばならぬ。或方向へ進むために彼は屢々他の方向へ出立せねばならぬのである。分節による分析は問題に直面する個人の行動の心理的記述よりもむしろ問題解決の観念化された型の論理的分析である。

とわいえ、この観念化された問題解決系列の型は我々の討議を構成し教育がその過程と接触を作りえてその発展に貢献しうる諸点の若干を示すことにおいて役立ちうる一という。

数学の問題解決を刻明に研究した G. PoLya は次の四局面に分析している。※⑦

1. 問題を理解する
2. 解決の計画を立てる
3. その計画を実行する
4. 解答を検討する

心理的色彩の見られる分析としては Johnson, Donald の三分節がある。※⑧

a 問題へ心を向ける
b 関係材料を産出する一熟考する
c 判断一批判する

筆者は次の三活動に分析して数学的解決活動の構造と特性について概括的研究を行い既に発表した。※⑨

① 問題の理解と表現一写表活動

ここでは問題を正視してその全容を理解しその要点を写し表わす活動が主である。

② 解法の工夫と実行一推理活動

ここでは解決を構想してその理路を工夫しその方策を推し進める活動が主である。

③ 結果の反省と洗煉一験定活動

ここでは結果を反省してその解答を確立しその結論を磨き上げる活動が主である。

以上問題解決の論理的分析について数種の型をあげたのであるがまとめると次の如くなる。

J. Dewey	G.Polya	Johnson. D	T. Miura
第一 第二	1	*a*	①

第三	2	b	②
第四	3	c	②
第五	4	c	③

これを見るにどの分析の型によるとしても、問題を解決するために仮説を立てることが中心の核である。この中核を形成するための前段階が問題を味わう活動であり後段階が仮説を評価する活動である。それ故に次にのべる問題解決の心理的局面の考察はこの順序に行う。

1. 問題の旨味を味わう
2. 解決の仮説を立てる
3. 仮説の評価を試みる

Ⅲ 問題解決の心理的局面

1 問題の旨味を味わう

問題の旨味を味わうことは問題を心に抱くことから始まる。問題は個人の狙いや目的の追求の中に起る、それ故に個人が出会う問題の範囲は彼がもつた経験範囲の彼がなした行動範囲の彼がのばした興味範囲の函数である。飛行機を見たことのない子供はそれがどうして飛ぶかを理解しようと試みる問題はもたない、幾何をやらない高校生は図形の性質についての問題を抱くことは多分少いであろう。生活や経験や関心が豊富なことは問題を心に抱きそれらで学ぶ機会を豊富にすることは殆んど確かである。

とわいえ、問題に心を向けるかどうかは個人の身体的、精神的条件によつて可なり左右されるであろう。例えば、腹痛を感じている子供や疲労している子供や遊びにあこがれている子供などは、問題に心を向けないであろう。

さらに、問題に心を向けても個人の必要との関連において問題の抱き方が種々異なることは既に述べた通りである（問題の特定的意味の項を参照）。だから問題の旨味を味わうには先ず問題をすなおに心に抱くことからスタートしなければならない。

その次には、問題の中味をたしなむことに進んでいく、中味の主なるものは第一に〝目標〟—達成を要求された最終結果で第二に〝所与〟—与えられた事実や条件で第三に〝Gap〟—所与と目標の間にあつて橋渡しされねばならぬ裂目である。問題を解決することはこの Gap に橋を架けることである。その為には Gap の性質や位置が明確に見定められることが必要である。即ち個人は達成さるべき目標（又は目的）を明確に形成し所与の事実や条件を明確に写表し Gap をクローズアップしていくことが必要である。これら主なる中味を充分に嚙みしめるには問題に関連した多くの事柄を組織的方法によつて蒐集しなければならぬ。即ち適切な思考材料を産出することである。これら材料はどこから得るか。外からのものは現存する問題状況の分析又は問題と関連する事項を含む他の源泉から直接に認知する。内からのものは個人の思考の進行中に概念や一般化が思い出され獲得される。内からと外からと何れが主になるかは問題の性格に依存する。例えば空間的認知は幾何•三角法等の問題の方が算術•

代数の問題よりも多分広く働らくであろう。概念や一般化が問題解決の熟考中大いに働らくことは数学者のよく知る所である。これら抽象は過去経験を再編成することを可能ならしめ且それを手許の問題にまで有効に持ち来たすのである。

さてここで思考材料の産出と保持（記憶）は「理解の巾」に依存する。個人は問題の中味をたしなみ嚙みしめる時〝所与〟は何か〝発見〟すべきものは何かを記憶することが出来ねばならぬ且亦彼の既習事項から問題に関連するものは何んでも撰び出さねばならぬ。「理解の巾」は程度（広さ）と持続（長さ）の二つ次元をもつていて、これらは個人によつて異なる。或人々は容易に事実、原理、概念、定義、定理等を思出すことが出来る。この人々の「理解の巾」の広さと長さは大したものである。或人々は何等かの理由で記憶が弱々しく過去の学習事項を思出し活用するのに困難を感ずる。又或人々は問題中の凡べての関係を把握することや問題を解く試みで既にやつた不成功のものを記憶することに難渋でさえある。

数学における簡約な記号を使用することは人々の「理解の巾」を増すのに大いに助けとなる。それは、問題の概念や関係を記号化することによつてこれらを実体として取扱うことが出来且相互の関係についての研究に対して直接に役立つように保持され、その上仮説は容易にテストされ記号で得られた新しい洞察は操作されうるからである。

問題の中味をよくよく味わうには主なる中味を中心としてそれらを取巻くものは大小もらさず見落しなく味わうと共に見余りなくたしなむことが大切である。見余りなくということは問題によつて要求されない如何なる条件も導入しないことである。問題解決での個人の努力は屡々問題に固有でない或附加的制限を彼が設けることによつて妨害される。例えば分数をかける計算に始めて出会う生徒を考えて見ると、かけ算についての彼の以前の経験の凡べてを〝より大きくする〟との結果で切り廻して来たところのこの子供は、彼が出発した数より小さい結果をえるこの新しい計算の解決を自然に受取ることはありそうにない。〝かけ算〟はそれを自分自身で〝より大きくすること〟にもつていくようである。そしてこれが新しい状況への過程の一般化を阻害する。もう一つの例をとると、一つの数が他の何%にあたるかをどうして発見するかの学習において、100 以下の%を算出する練習だけが与えられていると想像せよ。或生徒は解答を見つける第一歩は常に〝小さい数を大きい数で除すことだ〟と決定するかも知れない。そしてこれらの生徒たちはこの手続きを%の発見を含む凡べての問題に機械的に適用するだろう。このような見余りの心的傾向を説明する有用概念として「Set」の概念がある。すぐ上の例で子供たちはこの問題に対して「Set」を発展さすだろうという。即ち過去経験の故に彼が特別の仮定又は行動のプラン又は Search Model（すぐ次に述べる）に対して予め傾向ずけられ且この予傾向を断呼として主張する時、問題に対して「Set」をもつという。Luchins, A. S. の「Set」についての研究は信頼されている且彼はこの種の「Set」に対して「Einstellung」の名を用いた。※⑩つまりこの「Set」は思考材料を産出する時、材料を探究する範囲を狭くし或関係の認知を禁止し或仮説を妨害する。その結果は

関連ある思考材料を多く役立たなくしてしまう。

問題を正しく味わうことを妨げ解決の失敗の原因となる「Set」を打ち破る方法の一つとして「Incubation Period」即ち「孵化期間」の利用を暗示したのは Hadamard, J. である。※⑪これは心の無意識的働らきの期間である。だが、潜在意識の心は働いていて屡々洞察又は閃きが生起する。多くの人々は問題に対する解決が明白な理由なしに突然心中に浮ぶ経験をもつたことがあろう。或人はねている間に洞察が生起したこともある。よく休息してさわやかな心を持てばよい考えがたやすく起きることもある。「孵化期間」は非生産的「Set」を破るのに有効である。

問題の旨味を味わうのに主なる中味は〝所与〟と〝目的〟と〝Gap〟であるが最もよく味わうためには〝Gap〟を中核として即ち如何にしてこの〝Gap〟を埋めるかを狙らい乍ら他の凡べての中味をたしなむことが大切である。〝Gap〟に橋を架ける熟考を指揮し開拓して呉れるのが「Search Model」即ち「探究模型」である。これは Duncker, karl が導入した概念である。※⑫ 例えば、友人から伝言をたのまれそれをメモしておかねと忘れるかも知れない、だが書くものを持たない。この場合それを記憶するのを助ける工夫が必要である。君の「探究模型」は〝それで書くべき或もの〟である。これは多くの混雑した要素を含む全体状況から得られた抽象であつて問題の主なる中味を噛みしめる時に発生する。だが、これは探究するものを指示し、発見すべき時を告げ尚探す所を定めて呉れる。今一つ数学の問題例をとると〝二人が某地を同時に出発して50マイル各々走る。甲は毎時10マイル程乙よりも速く走るそして目的地に2.5時間早く到達した。各人の時速を求めよ〟子供は問題を理解し受取つたとせよ。彼の心の中に発生する「探究模型」は〝問題中の変数に関係した方程式〟であろう。彼の探究の範囲は彼が既に学習したところの数学的概念や一般化である。そしてこれらは機能的な「探究模型」の完成における有効さの程度によつて選び出されるのである。

問題の旨味を味わうことは問題を心に抱きその中味をたしなみ「探究模型」を産み出していく心のはたらきである。

2. 解決の仮説を立てる

問題攻撃における或点で個人はそれを解決する為の或提案を産み出すように見える。屡々問題は或暗示が生起するまでは殆んど理解されないまゝである。だが、問題の旨味をしつとりと味わつていくうちに仮説が現われて来る。これら仮説はどこから来るか？ どんな原理が仮説の出現を支配するか？この質問に完全に答えることは至難である。だがこの解明に我々はベストを尽さねばならない。

R. L. Thorndike は、仮説の出現を支配する因子の三つの型を認めている。※⑬

(a) 個人の経験の因子

(b) 個人の知的成育レベルの因子

(c) 問題状況自身の力動性の因子

(a)について、先に述べた「理解の巾」の大なるほど仮説は形成され易いだろう。よい生徒は効目のある多くの考えをもつがわるい生徒は考えのもちあわせが少い。一般にどの分野においても個人のもつ知識や経験が多いほどその分野の問題解決においてより流暢で稔り豊かなことを彼に期待することが出来よう。だが併し、或分野の知識とその分野の問題解決能力との間には、1対1の関係は存在しない。※⑭ そこにはより多く知る者はよりよく解く者であるという傾向はたしかに存在する。然しそこには多くの例外が存在する即ち知識の所有と解決の能力の間には Gap がある。この相違に対して多分二つの理由が考えられるだろう。第一は、知識を得ることとそれを用いることとは多分個人の異なる性質を必要とするのであろう。或分野において多くの知識をえようとの勤勉と熱心を有する者が必しもこれら知識を撰択し関連ずけ組織する能力を最高度に有する者ではない。第二は、知識がかくとくされる仕方は殆んど確かにそれが問題解決で用いられる時の素地に影響する。これは知識や技能の学び方の如何によつて、それらが問題解決に効くか否かが左右されるということである。

問題解決において仮説を作ることは本質的にその技術を全体的に又は部分的に或面で新しい状況へ転移さすことを含む。それは屢々諸部分を以前の状況から新しい解決の枠組へ再編成することを含む。転移の条件について我々が知つている凡べてはここに関係している。つまりどれほど学ぶかでなしにいかに学ぶかである。より多くより良く転移するように学ぶことが、よりよい仮説をよりやさしく形成することを助けるのである。

転移し易いような学び方や教え方について、例えば記憶よりも理解を強調するとか一般化を企図するとかは「転移理論」として多くの研究があるが、今はふれる余裕をもたない。

もう一つ述べたいことは、型はめ的又はい型的な問題解決のくり返しは仮説の出現を妨げて解決能力を鈍らせることが往々見られるということである。これについても多くの実験的研究が既に発表されている。※⑮

(b)について、知的成育レベルと知識的脊景の豊富さとは、普通より多く成育する個人は引出すべき知識や経験のより豊かな貯えをもつ如くに、共共に進行する。一般知性は関係や相関を引出す能力として定義されて来たが、この能力が突然現われるとか又それが現われる年令、段階があるとかについての証拠はない、学校へ上らぬ子供でさえ彼自身のレベルで彼自身の経験範囲で問題を解いていくのである。子供が次第に成長していく時の変化は関心や経験の範囲の中に、流暢さの中に、仮説の豊富さ適切さ、賢明さの中に、見出されるものである。

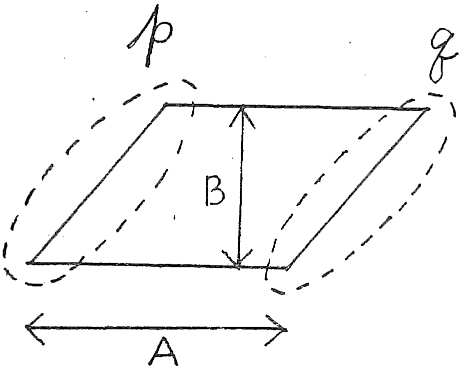
(c) について、前述した如く、所与と要求(目的) の Gap は「探究模型」を発生する。これは問題状況の本質的性質として要求されるものの観念の一種である。

「探究模型」は仮説への力動的、指示的効果の両方を働かせる。それは個人の必要の言語化と視覚化を行わせ且個人の努力を問題解決の方へ動員する再集的点として奉仕する、と同時に「探究模型」は解決の本質的形式を摘要しその形式に対応するような或観念の型に注目しそれを採用することを個人に考えさせる。つまり形成される仮説を考慮する範囲を定め問

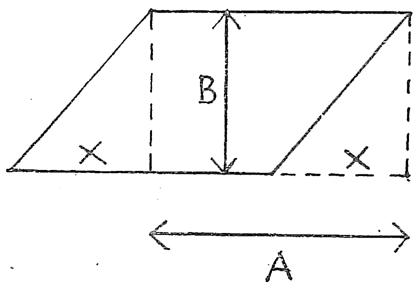
題を解く鍵を示して呉れる。そして一つの意味で仮説である、というのは所与から目的へ如何に動くかについての推理又は推測をあらわすからである。

問題状況の力動性と「探究模型」の役割とは N. Wertheimer が充分分析した実例によつて例証される。※⑯

彼の問題は次の図で A、Bが与えられてこの平行四辺形の面積を求めよというのである。

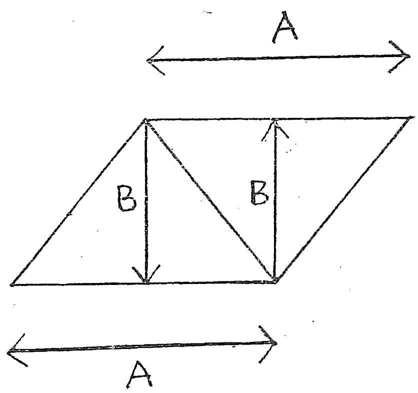


この問題で所与や要求やその間の Gap について味わつていくうちに個人は「これを矩形にするにはどうしたらよいか」という「探究模型」を発生さすかも知れない。このモデルで個人の注意は自然と図形の p、q ―それはモデルに関連して今の所ワルイものだ―に向けられる。力はモデルにおいてこれらをヨイものに為す方向に導かれる。この緊張の下で図形は次の図ように再構成される、そして今やA、Bの長さを辺にもつ矩形として見られる。



この構造的再構成は「探究模型」即ちモデルの要求の線に沿うて生起したのである。

この同じ問題において個人は異なつた方向で出発し全く異なつたモデルを設定するかも知れぬ。例えば「どうしたらこの図形を知られた面積の三角形に分けることが出来るか」このモデルの力動の下で図形は次の図の如く再構成されるだろう。



3. 仮説の評価を試みる

問題の旨味を味わい解決の仮説を立てたらその仮説の良否をテストして最もよい仮説をもつて問題の解決を完了していくのである。

この時の心的活動は、①推理に対して正しい前提を用意するように凡べての関係的知識を働かせる②立てた仮説を軸として正しい前提から論理的に出て来る結論（予言）を示すために〝もし……ならば→その時は……となる〟との思考を厳正にすすめる③予言した事柄が実際に生起するかどうかを見て結論をテストする。等が主である。

Ⅲ 問題解決の学習指導法

1. 問題解決の学習

問題を広い意味にとれば問題解決の学習は学習一般と同義となる。

問題を狭く主観的意味にとれば問題解決学習は自分で思考し自分で解決を発見する創造的学習となる。

W. A. Brownell は狭義の問題解決を次のように述べている。※⑰　即ち一

(a)学習の課題が単に知覚的・概念的なものである場合にのみ関するものであつて(b)その課題を学習者が何等かの形で理解することが出来(c)しかも現在満足な解決手段を知つていない、そこで(d)学習者はその問題場面において困難又は困却を経験する。けれども、これらは解決への微かな暗示又は漠とした予感を含んでいて全くの混乱ではない。——という。

このような問題解決過程の特徴は:(1)事態の本質的な諸関係の認知と学習者の抱く目標とによつて支配されるから方向的である。(2)成功的な解決への鍵の一つは過去の経験の中から適切なものを想起することであるから選択的である。(3)それら選択された諸経験を、特に手段一目的関係において一つのまとまつた解決法へと体制化するから洞察的といえる。(4)解決過程は本質的に新しい構成である即ち観念や行動又は両者の再体制であるから創造的である。(5)解決のための仮説の当否を評価することが必要であるから批判的である。

このような諸持徴を有する問題解決の過程を学習することは望ましいに違いない。

基礎計算や指数や二項定理等の数学的概念及びその一般化を目的とする学習と共に問題解決の過程又は方法の一般化を目的とする学習も極めて重要である。もつと強くいうと、前者の学習でさえも後者の学習の場において実行することがより有効であろう。

2. 問題解決学習の指導

問題解決の学習を指導する時の数多くの示唆は、心理的局面の項で述べたことから導き出される。例えば、教師の統制下にある問題設定の場を工夫する（第一の問題が第二の問題のヒントになるように）とか「サーチモデル」の発生及び完成を助けるよう発問するとかワルイ「set」を破るように助けるとか「孵化期間」をすすめるとか等々である。だが併し、このような一般的方法を数学科の問題解決指導に具体化するだけでは不充分である。もつと突き進んで数学科の問題解決の独自的性格を見究めることが必要である。その方法の一つとして実験的研究がある。数学の問題について実験しその解決の心理を研究したものも多く発表されているが多くは心理学の立場からの実験的研究である、もつと多く数学教育学の立場からの心理的実験も必要である。このような含みをもつて数学科における問題解決の心理を研究していくならば、学習指導で是非必要な実際的方法が創り出されるであろう。次にこの意味において昨年行つた実験について大要を記すことにしよう。

V　問題解決の心理的実験

昨28年秋　東京都某高校二年生（幾何を選択しなかつた生徒）67名を被験者として、幾何の問題を与えその解決過程の心理的分析を試みた。全員は概ね等質な三つの群に分けられ次に記すような事前指導の後にテスト問題を与えられたのである。この実験は小保内虎夫博士

の指導の下に荻野勝之助氏と筆者の共同研究である。これは既に学会で発表されている。※⑱

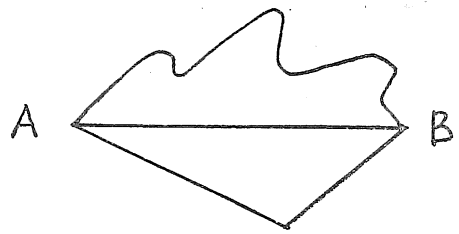
1. 一般指導－第1日

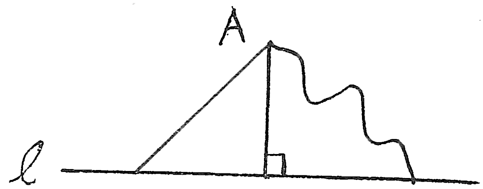
全員67名に一斉に指導、時間90分内容は次の如きである。

① 最短距離について

(イ) 二点間の最短距離はその二点を結ぶ線分の長さである。

(ロ) 点と直線間の最短距離はその点からその直線に下ろした垂線の長さである。

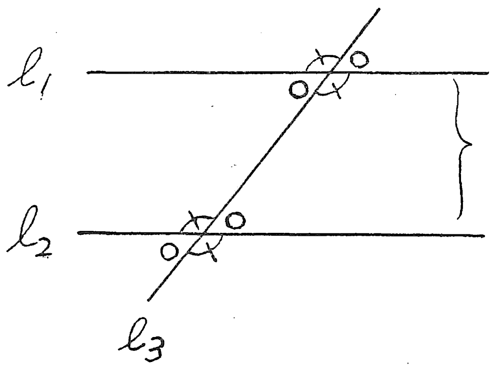


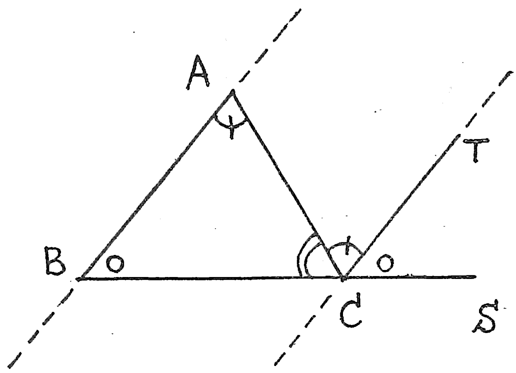


② 三角形の内角の和について

(イ) 公理 平行な二直線を他の一直線が切て出来る同位角は相等しい。又錯角も相等しい。(附加的に、対頂角は相等しい)

(ロ) 定理 三角形の内角の和は2直角であることを証明する。

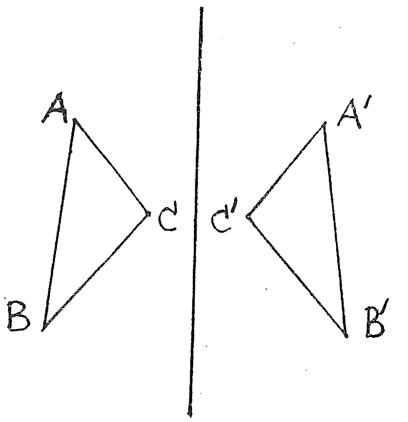


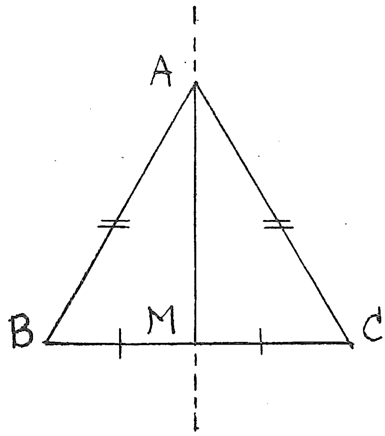


③ 対称について

(イ) 定義 全く重なり合う二つの三角形は合同であるという。

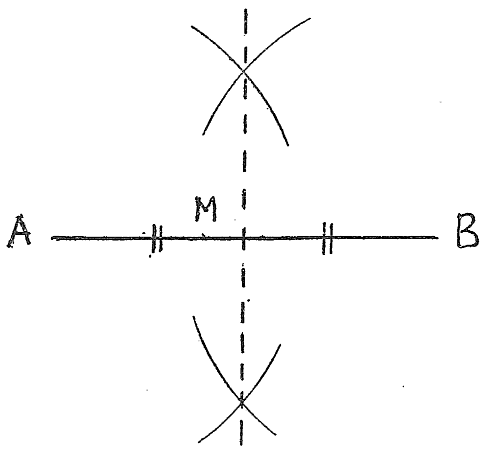
(ロ) 定理 二等辺三角形の両底角は相等しいことを証明する。

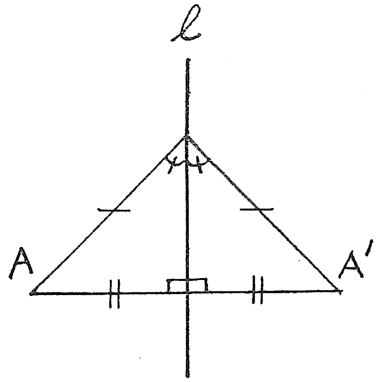




(ハ) 作図　線分の中点を求める

(ニ) 定義　一直線を折り目として折り重ねた時、全く相重なる二点をその直線を軸として対称な点という。

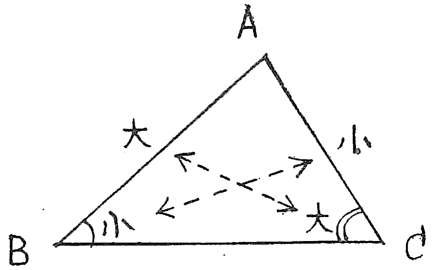


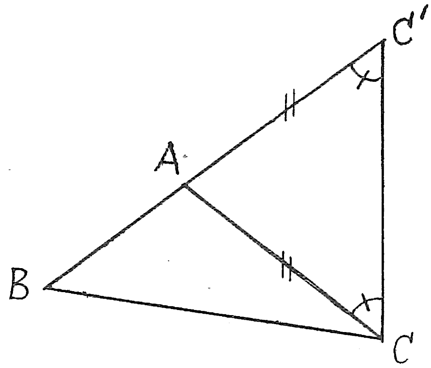


④ 三角形の辺の大小と角の大小について

(イ) 公理　三角形で大なる辺に対する角は小なる辺に対する角よりも大なり、及びその逆も正しい。

(ロ) 定理　三角形で二辺の和は他の一辺よりも大なりを証明する。



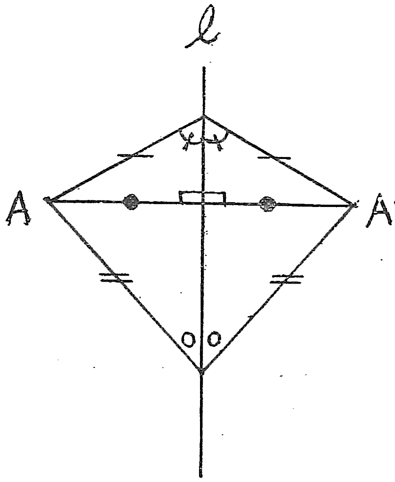


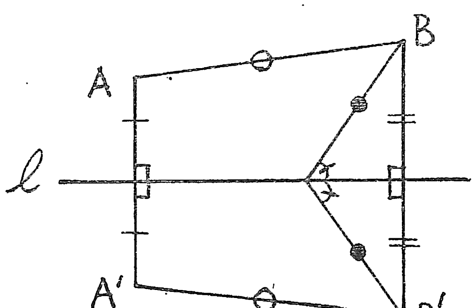
2. 特別指導一第2日

第一群24名に指導、時間30分

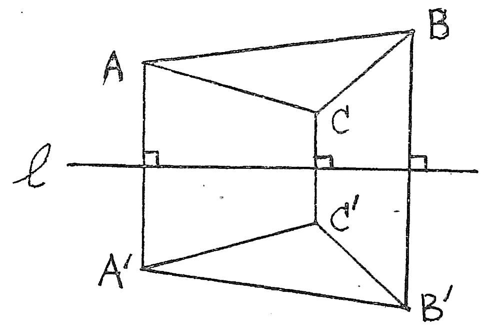
内容は次の如きである。つまり〝対称〟について強調指導を与えた。

① 対称点についての性質を強調する。





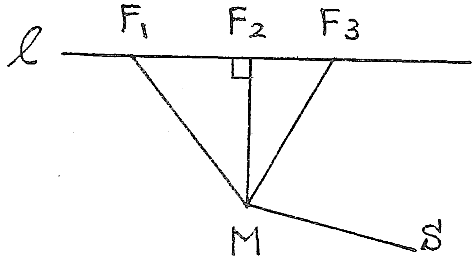
② 対称軸を水平にとつて二組の対称点について指導する。



③　三組の対称点について指導する。

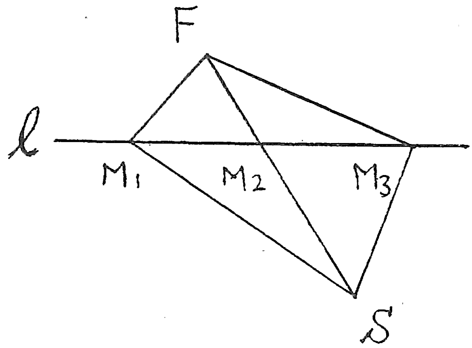
第二群22名に指導、時間30分

内容次の如きである、つまり最短距離について強調指導を与えた。



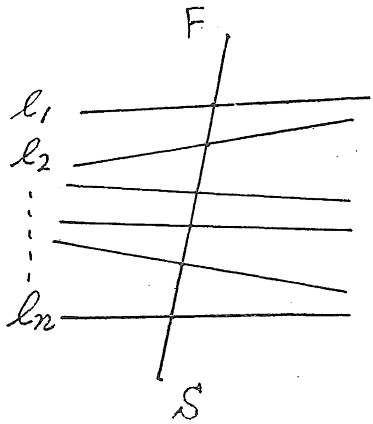
①　$S \to M \to \ell$ 上の点、この最短距離は左図で $S \to M \to F_2$ である。

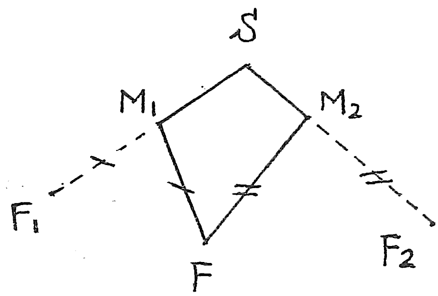
②　$S \to \ell$ 上の点 $\to F$、この最短距離は左図で $S \to M_2 \to F$ である。



③　$S \to \ell_1$ 上の点 $\to \ell_2$ 上の点 $\to \cdots\cdots \to \ell_n$ 上の点 $\to$ F、この最短距離は下左図で線分ＳＦである。

④　$S \to M_1 \to F$ と $S \to M_2 \to F$ と比べてどちらが短いかを調べるには下右図の如く SF_1 と SF_2 を比べて見る方法がある。





第三群21名には一般指導だけでそれ以外何事も指導せず。

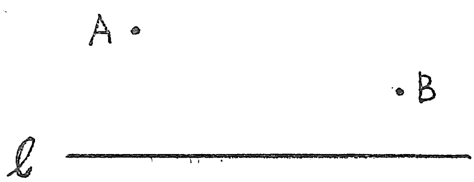
3. テスト実施ー第3日

全員67名に一斉に実施、時間は制限しなかつたけど大体60分位と予想した。

テスト問題は次の如きである。予め指示されたことは〝なるべく考えたままをかくように〟と〝かいたことは消さぬように〟の二つであつた。

テスト問題

Aから出て ℓ 上の点を通つてBまでいく距離を最短にするには、ℓ 上のどこを通ればよいか、下図について考えよ。



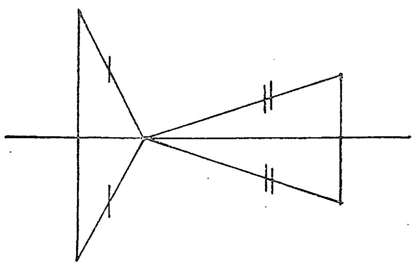
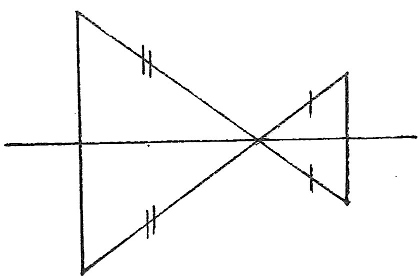
予想した如く60分位で全員答案を提出した。実験結果について主なる点を記して見よう。

4. 結果

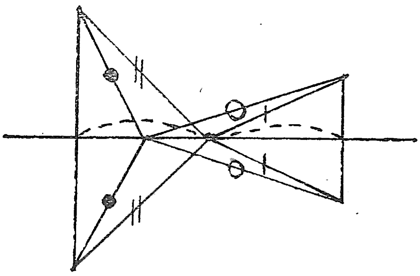
① 図形の分類

種々様々な図形を整理すると次の如し。

(a) 対称点のある図形

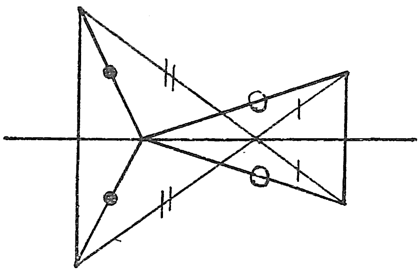
		第一群	第二群	第三群
①		3 △(1)	0	0
②		3	1	2 (1)

③



5　　0　　0

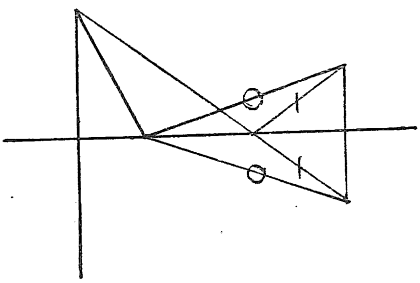
④



7 (6)　　1 (1)　　0

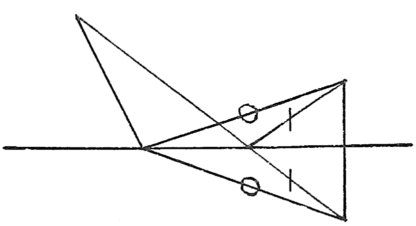
⑤　　雑　　2　　0　　0

⑥



2 (1)　　0　　0

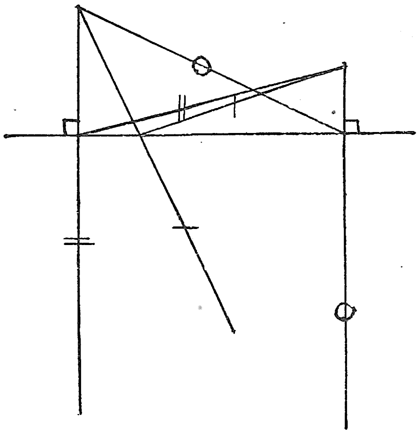
⑦

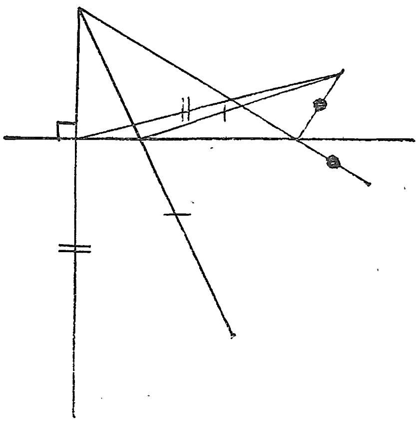


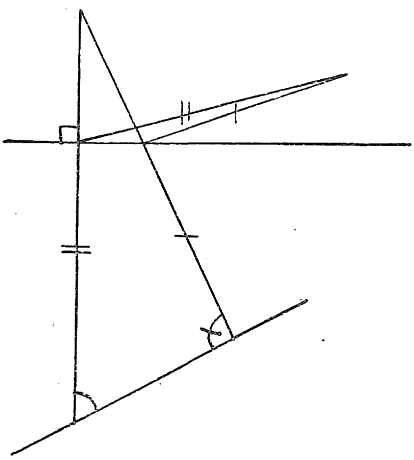
1 $\overset{\triangle}{(1)}$　　3 (2)　　1 $\overset{\triangle}{(1)}$

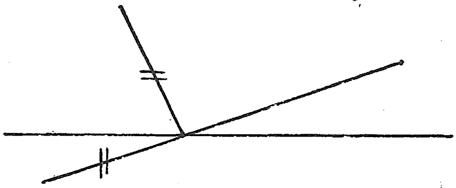
（括弧内は正解者数、△印は準解者数）

(b) 延長してある図形　　　　第一群、第二群、第三群

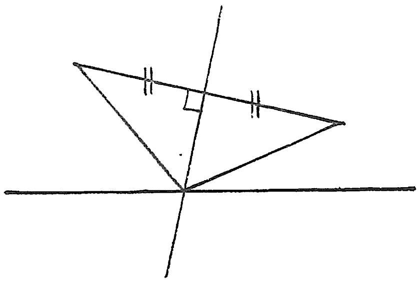
⑧

0　5　0

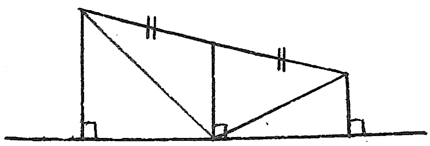
⑨

0　4　0

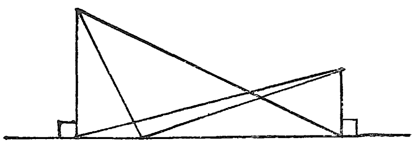
⑩

0　0　2

⑪  1　　1　　6

(c)　一方側にある図形　　　　　　第一群、第二群、第三群

⑫  0　　1　　6

⑬  0　　2　　1

⑭  0　　3　　0

⑮　　　　雑　　　　0　　1　　3

この図形の分類から正解者及び準解者（正しく解答として点を求めているが証明が不完全な者）の数、並びに対称点をかいた者（(a)）とかかない者（(b)と(c)）の数をまとめると次の如くなる。

	第一群	第二群	第三群	計
正解者	7	3	1	1 1
準解者	2	0	1	3
計	9	3	2	1 4
解決率	$\frac{9}{24}$=.3 8	$\frac{3}{22}$=.1 4	$\frac{2}{21}$=.1 0	$\frac{14}{67}$=.2 1

図　形	第一群		第二群		第三群		計	
(a)　対称点あり	2 3		5		3		3 1	
(b) 対称点なし	1	1	1 0	1 7	8	1 8	1 9	3 6
(c) 対称点なし	0		7		1 0		1 7	

ここで正解者の図形及び準正解者はすべて(a)に属することを指摘しておく。

さて、第一群（対称点を強調指導した群）に(a)図形（対称点をかいた図形）が殆んどであることから第一群においては特別指導の効果が顕著にあらわれたと見られる。第二群では(b)図形が可なり多いが第三群と比べて見る時、特別指導の影響は弱いように思われる。

さらに、正（準）解者が第一群に多数にあることから、このテスト問題では〝対称〟という幾何学的性質が解決に極めて強くひびくことが実証されて来た。だが併し、ここで注目すべきことは、対称点を折角かいていながら正しい解決に到達し得なかつたものが多数いるという事実である。即ち、(a)図形をかいた者の総数31名中、正（準）解者は14名であつて半数以上の者が解決に達し得ないのである。これら失敗者がどこでどうつまずき、どう迷い、どうして挫折したかについては後述するとして、正解者がどのようにして解決したかについて究明して見ることにしよう。

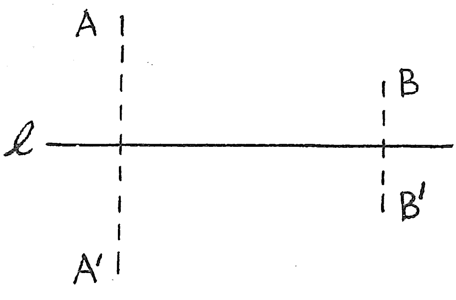
② 解法の分類

このテスト問題において成功した者はどのように思考を進めどのような過程を辿つて解決に到達したかを刻明に究めた結果は次の三つの型に分類することが出来る―（読者はこれから先を読む前に果してどんな解き方があるかの予想を試みられるとよい。教師が予め考えたことと生徒が現に考えることとがどの程度相応するかについてよい参考となるであろう）―

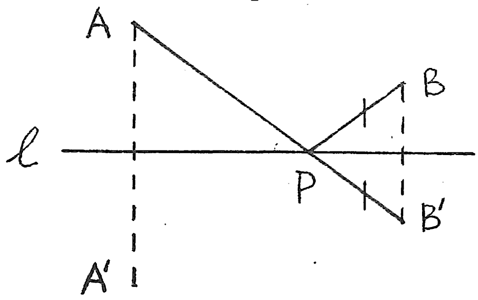
α―型

この型は次のⅠ、Ⅱ、Ⅲの図の順序に思考が進められていく。

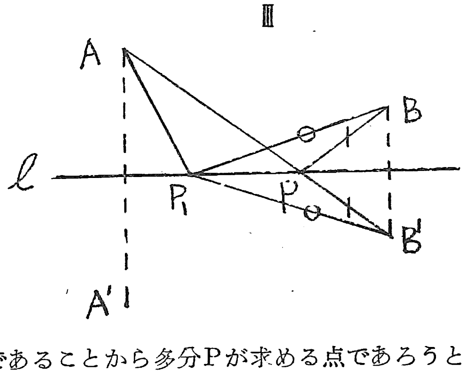
Ⅰ



Ⅱ



Ⅲ



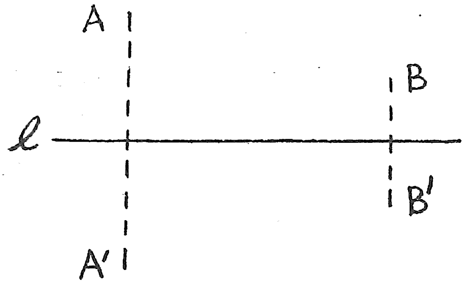
Ⅰ 先ず二点A、Bの対称点A′、B′をかく。

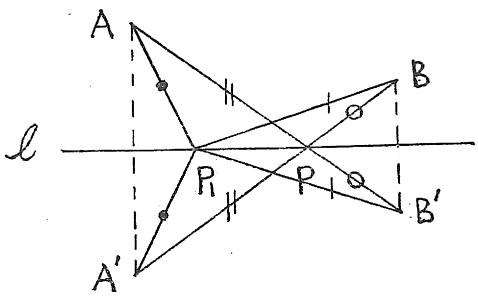
Ⅱ 次にAとB′を結びℓとの交点をPとし、PとBを結ぶ、ここでBP＝B′Pを思い出し、さらにA→P→Bの長さ（距離）はA→P→B′の長さに等しいことに気ずく、そして線分AB′が二点A、B′間の最短距離であることから多分Pが求める点であろうと考え、果してそうであるかどうかを確かめるた

めに。

Ⅲ ℓ上に任意の点P_1をとつて調べて見る。即ち、ここでも$BP_1 = B'P_1$で$A \to P_1 \to B$は$A \to P_1 \to B'$に等しい。さて二点A、B′間の最短距離は線分AB′である（又は$\triangle AP_1B'$で二辺の和は他の一辺より大である）から$A \to P_1 \to B'$の長さはAB′の長さより大である。よつて$AP_1 + P_1B > AP + PB$、これで点Pが求める点であることが確証されたのである。

β一型　　Ⅰ　　Ⅱ



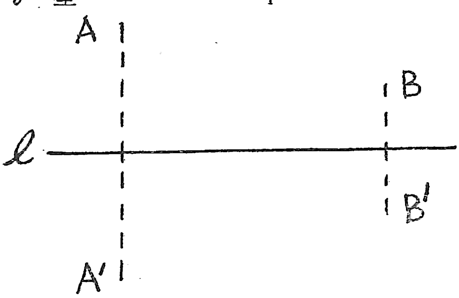


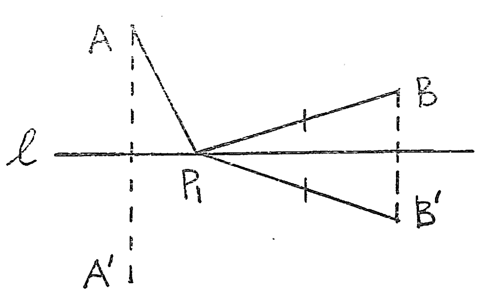
Ⅰ 先ず二点A、Bの対称点A′B′をかく。

Ⅱ 次に図の如くAB′、BA′を引きℓ上での交点をPとし、さらにℓ上に任意の点P_1をとつてAP_1 BP_1 $A'P_1$ $B'P_1$を引く、ここで$AP = A'P$、$BP = B'P$、$AP_1 = A'P_1$、$BP_1 = B'P_1$等を思い出し、次に図をぢつと見ているうちに、$\triangle AP_1B'$が浮上り、$A \to P_1 \to B'$が$A \to B'$より大であることや$A \to P \to B$が$A \to P \to B'$に等しいことや$A \to P_1 \to B$が$A \to P_1 \to B'$に等しいことや等が、どれが先とも後ともわからぬままに頭の中で次第にはつきりして来るのである。

Ⅲ 終りに、これらを筋立てまとめてPが求める点であることを証言するのである。まとめ方は各人によつて多少異なるけれどもそれは単に順序だけのちがいにすぎない。

γ一型　　Ⅰ　　Ⅱ

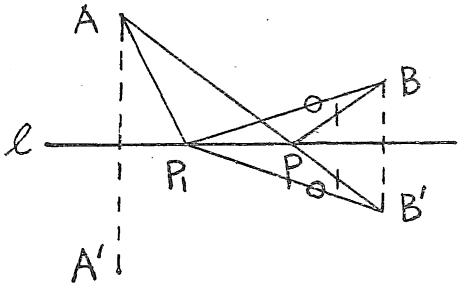




Ⅰ 先ず二点A、Bの対称点A′、B′をかく。

Ⅱ 次にℓ上に任意の点P_1をとつて考えて、$BP_1 = B'P_1$を思い出しさらに$A \to P_1 \to B$は$A \to P_1 \to B'$に等しいことに気ずく、ここで$A \to P_1 \to B'$はまがつて（折れて）いるから最短ではないと感じ、AとB′の間の最短距離はこの二点を結ぶ線分AB′であることに思いつく。

Ⅲ



Ⅲ　AB′を引いてℓとの交点をPとする。そこで A→P₁ →B′ はA→P→B′(即ちAB′）より大であることを証し且BP＝B′PなることよりA→P→B′ ＝A→P→B なることを立言して、Pが求める点であることを結論するのである。

以上α、β、γの三つの型それぞれについて記述したけれども、これは生徒の実際の思考の進みを出来るだけ忠実に再現しようと努め乍ら私自身がまとめたものである。

さて三つの型の解決者の分布は次表の如くである。

	第一群	第二群	第三群	計
α一型	5	2	1	8
β一型	2	1	1	4
γ一型	2	0	0	2
計	9	3	2	14

これを見るにα一型が最も多く次にβ、γ一型の順である。

対称点を折角かいていながら解決に到達し得なかつた者の多くは、BP＝B′Pはすぐわかつて等しい符号を図の中に記入しているけれども、さらに一歩すゝめて『A→P→BがA→P→B′ に等しい』ことに気ずかないまま迷つてしまつたのである。この一歩は簡単なようであるが重要な一歩であつて、いわゆる急所はここに潜んでいるらしい。この一歩が如何にしてふみ出されるか又何故にふみ出されにくいかについては、この次の実験的研究によつて明らかにして行きたいと思うている。

尚、解決し得なかつた者全員の失敗の原因がどこにあつたかについて記述したいのであるが長くなるので割愛させて頂く。

中途半端な実験結果の紹介でまことに意に満たないものであるけれども、主張したいことは、生徒が如何にして数学の問題を解くかを実際のはたらきにおいて見究め、そのことから数学科では如何に指導すればよいかを考究すべきであるということである。このような実験的研究を丹念に実行していけば具体的な指導法確立のために多くの有効な示唆がえられるであろう。　　　　　　　　　　　　　（1954. 1. 10）

引　用　文　献

※① K. B. Henderson' & R. E. Ping'ry, "Problem-Solving in Mathematics" N. C. T. M. 21st, Year Book. PP. 228—270 : 1953.

※② R. L. Thorndike "How children learn the principles and techniques of Problem-Solving" N. S. S. E. 49th. Year Book. P. I PP. 192—216 : 1950.

※③ K. B. Henderson & R. E. Pingry. op. cit.

※④ 筆者 "数学教育概説" 誠文堂新光社
PP. 127—128 : 1952. なまの問題とかいた問題の説明がある。尚心理的の各種については、K. Koffka "Principle of Gestalt Psychology" PP. 634—635 : 1935. 及び、小口忠彦 "創造的思考の心理" PP. 95—125. 牧書店. 1954. を見られたい。

※⑤ J. Dewey "How We Think" PP. 105—6 : 1933.

※⑥ R. L. Thorndike, op. cit. PP. 196—7

※⑦ G. Polya "How to Solve it" PP. 1—2（表紙） : 1945.

※⑧ Johnson, Donald. "A Modern Account of Problem-Solving" Psychologlcal Bulle-tin 41 : PP. 201—29 : 1944.

※⑨ 筆者、前出書、PP. 28—30
筆者 "問題解決の指導仮説" 島根大学論集（教育科学）No.3. PP. 1—10 : 1953.

※⑩ Luchins, Abraham, S. "Mechanizaton in Problem-Solving. The Effect of Ein-stellung" Psychologycal Monographs. 54 : PP. 1—95 : 1942.

※⑪ Hadamard, Jacaues. "The Psychology of Invention in the Mathematical Field." : 1945.

※⑫ K. Duncker "On Problem-Soluing" 1945. 「問題解決の心理」小見山栄一訳

※⑬ R. L. Thorndike. op. cit.

※⑭ Bloom, B. S. and Broder, L. J. "Problem-Solving Processes of Colledge Students ; An Exploratory Investigation" Supplementary Ebucational Monograph; No. 73 : 1950.

※⑮ R. L. Thorndike, op. cit. 及び Hanna, Paul, R. "Arithemetic Problem Solving" 1929.

※⑯ M. Wertheimer "Productive Thinking" PP. 14 —78「生産的思考」矢田部達郎訳

※⑰ W. A. Brownell "Problem Solving" N. S. S. E. 41st Year Book P. Ⅱ. PP. 41 5—40 : 1942.

※⑱ 小保内虎夫、萩野勝之助、筆者 "幾何学的思考の心理学的分析"
日本応用心理学会 第 16 回大会. 1953. 11.