數學教育の方法假説

―經驗と思考の數學的特性に據る―

三浦泰二

Ⅰ　數學的經驗の特性
Ⅱ　數學的思考の特性
Ⅲ　數學教育の方法假説
Ⅲ　經驗單元と教科單元

Ⅰ　數學的經驗の特性

問題解決における數學的活動の特色をA、B兩面に分けて別々に見て來たのであるが、數學的經驗の特性はこれら兩面の特色が相通する所に鮮明に觀取出來るのである。

第一に近似性と假定性の相通を見るに、近似性という特色は我々の外界（自然界、社會）の眞實眞相を基準として、それに近似的なのである。だからこの基準を除去すれば近似も遠似も消失してしまう。こうなると、假定性が出現することになる。例えば、十四糎×九糎はハガキの縦、横の測定値である時は近似的であるが、糎を除去すれば十四×九となつて假定的のものとなる。ユークリッド幾何學も我々の住む空間を寫表したものと考えている間は近似的であるけれども、外界から切り離せば假定的の幾何學となる。反對に假定的（公理的）なリーマン幾何學でも、地球上の事柄についての表現と見れば近似的となる（これは平行線がないと假定したもので、凡べての垂線が一點に會することは地球面上で赤道に直交する凡べての子午線が極に會することに符合する）。さらに近似的である故に、より正確により的確に寫表しようとすると同時に、直線と見做す(假定)三角形と見做す(假定)ことによつて能率よく手輕に寫表しようとするのである。ここにも近似と假定が相通する契機が見られる。

とにかく近似性は外界との照應を除去すると消失して假定性が浮び出るし、假定性は外界の寫表と見る所では近似性を伴うて來るのである。かかる相通こそ數學的經驗の特性である。

第二に物理性と純理性の相通を見るに、物理性卽ち具體的事象についての理路は、それがそこに止まるならば只それだけのことである。もしそれが同種の凡べての事象に妥當する共通的な理路にまで仕上げられるならば極めて有力となる。そうなるとそれは具體的な中味の入れ替えが可能となり、本質的には中味が空つぽの理路となつていく、こうなると實際の事象は勿論のこと其の他の何でも中味として考えていくことが出來るようになる。これは外界の事象の色彩が漂白されて、より廣い世界における純粹透明な理路になつていくことで此處に純理

性があらわれるに到る。

逆に純理性は何時でも何處でも中味として具體的な事物を當はめることが可能で而もそのまま理路は生きている所にその本質がある。別言すれば、純理性は單なる化石の如き抽象的理路でなしに、自由自在に具體的な事象に顯現することの可能な具體的理路である。例えば、3+2=5 は何時でも何處でもどんな事物でも3箇と2箇の和は5箇であることを主張するものである。

とにかく、物理性が中味を漂白されて純理性に化身し、純理性は中味を色彩されて物理性に權化するのである。この相通が不通となれば數學的活動は跛行するようになる。この相通こそ數學的經驗の特性である。

第三に實證性と論證性の相通を見るに、計算の結果や證明の結論が外界の實相と符合同調するためには、その計算、證明が正確に實行されていることが先決事である。だから、事實、實際によつて證し立てられるには卽ち實證されるには先づ以つて計算、證明によつて證し立てられること卽ち論證されることが必要である。このことは實證には論證が孕まれていることを示す。さればこそ外界の實相と相反異調の結果、結論が導出された折にはそれまでの推論過程を今一度檢討することが試みられるのである。〃論より證據〃という古諺は事實によつて論理を批判することを意味する。

さて反對に〃理論は尤もだが實際はそう行かぬ〃というのは、理論の正しいことは認めるが實行は無理だというのである。これは論證可能であるけれども實證されない場合のあることを示す、ここに論證が實證よりも廣いことがわかる。それは實證は我々の外界においてであり、論證は外界を超え得るからである。かく見る時論證性は外界に局限される折に實證性を添えるのである。例えば、3+2=5 は3人と2人が集つてみんなで何人かという折に實際に5人であることによつて實證される。

このように實證性の內に論證性が先行し、論證性が局限されて實證性を添加するのである。かかる相通こそ數學的經驗の特性である。

第四にA、B兩面の相通をまとめて見るに、我々は步行することとから馬に乘ることを知り、馬車をつくり自轉車をつくり自動車を汽車を汽船をつくり、遂に飛行機を創つた。こうして始めは地上を走つていたのが今は地上からとび立ち、地上の何物にも拘束を受けることなく自由に大空をかけめぐるようになつた。恰度これと同樣に、始めは我々の外界について研究を進めていたのが後には外界から拘束を受けることなく自由に思考をめぐらして研究するようになつた。このことはA自然研究の面が成長してB自由思考の面に發展した樣子を物語るものである。このA、B兩面の研究活動は決して二つの活動でなしに、一つの數學的活動である。そのわけは次のことから肯かれる。

其一、A面の活動の中にB面の活動が胎動しているからである。それは自然界、社會の事物、現象についての研究活動はそれらの實相を解明し表現することに努力を集中するのであるが、問題解決に當つては、外界の事物、實際に卽應した把え方をなし、解決に役立つように物の理を生かして考えていき、事實、實狀に適合するような解答を定めるのである。だが然し、事物や實狀に囚われることは決して秀れた

活動ではない。常に出來る限り自由に思考をめぐらし、思考可能なあらゆる方向を探究することが大切である。勿論、信仰や權威におそれることなく、傳統や惰性にひかれることなく、堂々と自由に推理を進めることが望ましい。例えば、地球を廻して考えることも、太陽を廻して考えることも、軌道を円と考えることも、楕円と考えることも、又は平行線が只一本と考えることも、一本もないと考えることも、多數本と考えることも、又は數的に考えることも、圖的に考えることも、さらに綜合的に考えることも、解析的に考えることも、演繹的に考えることも、歸納的に考えることも凡べて自由である。かくしてこそ發見も創造も發明も創作も可能であつて、外界についての研究は速やかに進歩し、問題は鮮やかに解決されるのである。このように見る時、A面の活動の中には自由に假定し、自由に推理し、自由に檢定するというB面の活動が胎動していることがわかる。

其二、B面の活動の中にはA面の活動が包含されているからである。それは我々の外界から獨立して外界を一應不問にして自由に思考する活動においても、問題解決に際しては要點を的確に把えて、解決に役立つように純理を推し進めて正確に解答を檢定していくのである。この活動はA面における活動と本質的には同樣なものである。相異する點は、問題としての對象がA面においては具體的な事物、現象に附着したものであるのに、B面においては事象から獨立して假定されたものである所に見られる。だが然し、兩面の對象は全然別々のものではない。例えば、A面における數1、2、3……は事物を數えて得た（自然的）數であるのに對して、B面における數1、2、3……は事物から獨立して假定された（人造的）數であるけれども、何れも自然數1、2、3……としては全く同樣のものである。而かも公理によつて建設された人造的の數1、2、3……は自然數一般であつて、その具體化の他の實例としては、2、4、6……でも3、6、9……でもよい。これらは自然數1、2、3……と同樣な構造である。このようにB面における對象は廣く一般的であつて、A面における對象を具體的見本として孕んでいることがわかる。

かく見る時、活動本質においても問題對象においても、B面の活動はA面の活動を包含しているのである。

このようにA、B兩面の活動が相通している所に數學的經驗の特性がある。

以上の考究によつて結論されることは、兩面の特色の相通から見ても、活動の相通から見ても、數學的經驗活動は一元的統一體であることだ。さればこそ自然研究と自由思考の兩活動は共在共榮の美わしい姿で不斷に成長發展を續けていくのである。ここに子供の生活改善のための數學と子供の數理開發のための數學とが不即不離にして異身同體となつて教育に貢獻し得る根源が見出される。このような數學的經驗の再構成によつて、數學的行動を子供の身につけるにはどうすればよいかの問題は、數學的思考について次に述べた後で最後に解明する。

II　數學的思考の特性

紙面の都合上結論だけを述べて先へ進めることにする。

數學的思考の特性は思考の形式には殆ど見られないで、思考の內容(何を又は何について思考するか)及び思考の方法(どのようにして思考するか、又は何によつて思考するか)に鮮やかに見られる。數學的思考の特性は、數・圖・記號・用語等を又は等について思考するのである。だからこれらについての思考に長ずる人にとつては數學的思考は容易であるが、劣る人にとつては困難である。さらに物事を思考する時に、數・圖・記號・用語等に寫表し、飜譯し、融化して思考する仕方が數學的思考の方法であり、ここに特性がある。正確に的確に能率的に思考するには、數・圖・記號等に托して思考するのが一つの方法なのである。これらにあやかるが故に正確・的確・能率的なのである。これ以外に特別な數學的思考は存在しない。これが結論である。

Ⅲ　數學教育の方法假說

數學教育の純固有目標を、數學的解決を實行させ數學的思考を洗煉することだと假說してこれを達成するための方法について假說を立てるには、第一にどんな問題にどんな順序で對決させるかを見ればよい。第二にどのように解決させ、どのように指導するかを考えればよい。

Ⅰ　どんな問題がよいか。

子供をどんな問題に對決させるかについての一般的(教育的)觀點は勿論重視する。卽ち

1、教育の一般目標に卽するもの。

2、子供の必要に應ずるもの。

イ、子供の經驗に卽するもの。

ロ、子供の興味に卽するもの。

ハ、子供の能力に卽するもの。

3、社會の必要に應ずるもの。

イ、社會生活に役立つもの。

ロ、社會生活に共通なもの。

ハ、最も基礎的なもの。

これらのことを念頭において、數學教育の問題としてはどんな問題を選べばよいかについて、なまの問題とかいた問題を見ていく。

1、なまの問題について

なまの問題というのは目標の假說で述べたように、いわゆる問題に形成される以前を含むもので、子供の基本的欲求に關連して生起する疑問・願望・要求・必要などであつて、漠然とした曖昧なものである。例えば、今度の運動會には自分たちの組が優勝したいとか、どうして每晩停電するのだろうかとか、もつと色々の品物が買いたいとか、……等數限りなく見出される。これから子供が子供の目的に照して不用因子を排除し有用因子を强調してあらわにしていくといわゆる問題となつて來るのである。さらにもつと明瞭にするために考究すべき事柄をあれこれと採り出し問題を分析していくつかの小問題に作り變えていき次第に問題解決に移り進むのである。子供の生活にある問題、子供が經驗する問題、事實問題、經驗單元、等のものは大方なまの問題といわれるであろう。これらはそのままでは問題とは云い難い。

（これを課題という人もある）なまの事態から問題への形成がなされねばならぬ。この形成過程をも含めたものがなまの問題である。なまの問題で、問題への形成に多く勞力と時間を費消してしまうことは不幸である。形成された問題の數學的解決に充分な努力と餘裕を與えることが賢明である。なまの事態から問題を形成し得ても、それが解決出來ない時は誰かに解いてもらえばよいとも考えられる。逆に問題の形成は出來ないが誰かが問題にまでして與れるならばその解決は可能であるだけでよいとも云えるであろう。望ましいのは問題が形成され解決され得ることである。どうしても何れか一方だけ强いられるならば、解決可能の方をえらぶことを主張する。それは數學教育の純固有目標が數學的解決の實行で亞固有目標が問題の形成であると假說したからだ。

なまの問題をえらぶ時には、問題への形成に要する勞力と時間が問題の解決に要する勞力と時間を食いとらないように考量すべきである。これは學習指導の仕方にも大いに反省を要することともなろう。問題形成において稍々もすると大部の時間をとられて手間どつた故に數學の力が子供につかない結果が出てぐる。

なまの問題をえらぶ時には、それから形成されて來る問題がそれ自身の中に數學的解決を孕むことが大切である。もつと立ち歸つていけばなまの事態がそれ自身の本質として數學的問題を産み出すものでなくてはならぬ。なまの事態から無理に數學的問題を抽き出したり、又は數學的問題に着物をきせてなまの問題を虚構したり、するのは何れも子供を欺むくことである。

2、かいた問題について

かいた問題というのは、教科書にかかれた問題、先生が與えた問題、作られた問題、等であつて、問題の性格を既に備えたもの又は問題への形成が既に爲されたものである。かいた問題をえらぶ時にも、問題自身の中に數學的解決を孕むものでなくてはならぬ。即ちその問題の本質が數學的解決の方法を選びとるようなものであることだ。ここに數學的解決のための問題でなく、問題のための數學的解決であることがわかる。數學のための問題でなく、問題のための數學である。數學的解決にしても數學的思考にしても問題のために方法として働らくところに眞の面目が見られる〃散りてこそ浮ぶせもあり蓮の花〃と歌にもある如く、自身を離れて問題に即くことこそ、自らを生かす道である。だから分數の加法のための問題をえらぶのではなしに、問題の本質が分數の加法をえらぶ如き問題を採り上げるのである。こうしてこそ問題が本質的に解決され、分數の加法が長所を發揮する。

かいた問題をえらぶ時にも、計算の實施に要する時間と勞力が、解決の理路を創るに要する時間と勞力を食いとらないように考量すべきである。これは數學教育の現場に大いに猛省を强いることにもなろう。これこれの計算をすれば解決出來るという理路は創れてもその計算を實際にすることが出來ない場合と、どんな計算をすれば問題が解決出來るかは見出せないけれども他人からこれこれの計算をすればよいと知らせてもらえば、計算だけなら出來る場合とある。解決の理路を創ることも理路にそうて計算することも兩方とも出來るのが理想であるけれども、もしも、どうしても一方を輕視しなければならない時

は、計算の方を捨てる。數學教育の純固有目標としては數學的解決と數學的思考を假說したのであつて、單なる計算を、問題解決にとけ込んでいない計算を過大視することは許されない。計算が不出來の故に又は計算に重點をおく故に、計算だけに多くの時間と勞力を費消してしまうのは不幸である。子供を計算器にしても無意味である。最悪の場合を極論すれば、計算は他人にしてもらつても計算表を用いても計算器によつても、とにかく出來ればよい。それよりも大切なことは、これこれの計算をすれば解決出來ることがわかることである。その上に計算が自分で出來れば申分はない。

要するに數學教育の目標を達成するために、子供に對決させる問題の選擇假說として次の條件を設定する。

1、なまの問題でもかいた問題でも、問題の本質が數學的解決（方法）をえらびとるような問題であること。

2、問題の形成と計算の實施に要する時間と勞力が過大とならぬような問題をとること。

Ⅱ　どんな順序がよいか。

なまの問題にもかいた問題にも各々長所短所があるから一方だけを過大評價することは許されない。數學教育の現場において巧みに兩方の長所を生かし短所を除くには、どんな順序で問題に對決さすかを考究することがむしろ重要である。何れにしても單純から複雜への鐵則は動かせないであろう。

先ずなまの問題について見るに、これは生徒の生活に連結し具體的な事態から出發するものであるから、子供の生活經驗の發展に沿うた順序になるべく從うのがよい。ここで生活自體の順序でなしに、生活から形成される問題自身の順序である。この順序は問題自身が數學的解決を選びとるのであるから、結局數學的解決（方法）の順序ということになる。即ち生活自體の順序でなしに、（生活からなまの事態から形成される問題の）解決方法の順序である。例えば、お正月→お花見→水泳→秋祭りの順序でなしに、お正月から形成される問題の數學的方法の上に→お花見から形成される問題の數學的方法を發展させていきその上に→水泳……→秋祭り……。の順序である。生活自體の順序（系統）と數學自體の系統とは相應し難いし、相應させ難いけれども、解決方法の系統は數學自體の系統に相應させ易いのである。何故なれば、數學自身が問題解決の方法として發生し發展して來た趨向があるからだ。

「系統」ということは、①順序を追うてつづきつながり統一あること又は②箇々の事物の間に存する關係を一の原理又は法則の下に順序を立て列ねることである。生活の系統というのは何を意味するのかよくわからないけれども①に近いであろう、數學の系統というのは②に當るであろう。何れにしても數學的解決の實行を數學教育の純固有目標と假說したことに照して見る時、數學自體が目標ではなく解決實行が目標であるから、解決方法から見て望ましい順序に問題が見出されることが必要である。強いて數學自體の順序（系統）に囚われることは教育的であるまい。

次にかいた問題について見るに、これはなまの事態から形成された問題をさらに細分した小問題の一つであることも、又は全然獨立の問

題であることもあろうが、何れにしても數學的解決の順序即ち解決方法の順序を最も望ましくするように問題を順次與えたらよいであろう。なまの問題ばかりでは解決方法の望ましい順序が亂れたり途切れたりする心配があるから、これを防ぐためにも、又望ましい順序で解決方法が發展することを助けるためにも、かいた問題を巧みに配列することが必要である。ここでも解決方法のための問題でなく、問題のための解決方法であることを忘れてはならないし、問題と順序を混同してはいけない。

このような構想の下に、なまの問題とかいた問題をからませ乍ら單純から複雜へと順序正しく子供に解決させていくことを主張する。即ち、數學教育の問題（教材）の配列順序は「數學的解決（方法）の最も望ましい順序に從うこと」と假說する。

この順序は生活の順序でも、數學の系統でも、子供の心理や論理の發達段階でも、數學の發生順序でも、ない。むしろ、これらの凡べてを母體として産み出される順序であり、最後には、數學の系統にまで脫皮し得る順序であろう。具體的には、數學教育の實踐によつて試作され實踐され洗煉されて始めて確立される順序である。假說の意味は、この順序を自覺し試行することを主張する所にある。

Ⅲ　どのように解決させるか。

子供を問題に當面させてどのように數學的に解決させるかを明らかにするには、問題を數學的に解決するとはどうすることか、その過程はどうなのか數學的に思考するとはどうすることかその心理はどうなのかを先ず明確にしなければならない。これらについては數學的經驗及びその特性や數學的思考及びその特性の章で細かく述べたから振り返つて見てもらいたい。ここでは單純で基本的な問題（ひとえの問題）と複雜で綜合的な問題（あわせた問題）についてどのように解決させるかの狙いを記して私の假說を立てていく。

1、ひとえの問題について、

これは一段階の問題とか、解決に當つて基本的概念や關係だけで事足りる問題とか、分析された小さい問題とか、基本的な計算又は作圖の問題とかの如きである。從つてA面にもB面にも小學校の各學年にも中學校、高校にも當然存在する問題である。

ひとえの問題を解決させる急所は、解決の機具に通曉させることである。數學的解決の機具は基本的な數學的概念や關係であつて多くは數字や文字や記號や用語で表現されている。これらは凡べて一般又は普遍といわれる性格を有し而も特殊又は具體に相通し得るものである。これらの構成把捉については既述したように、當初は曖昧模糊とした不完全な意味狀態でありこれから出發して、そのままを他に適用又は使用することによつて次第に明確判然さを增して最後に醇化結晶するに到るのである。と同時に適用又は使用することによつて一般を生生しく味得するのである。一般とか普遍とかいうのは、箇々の特殊又は具體に當てはめることによつてその本質があらわにされ確立されるものである。箇々の特殊や具體に顯現し得ないような一般や普遍は空念佛に過ぎない。それで數3でも形の長方形でも比例の關係でも面積の公式でも、最初から明確な把握を强制しても無駄であろう。先ずお菓子の3つとか、ハガキの形が長方形とか棒の高さとその影の長さ

が比例の關係とか、出來るだけ鮮明な見本（子供には當初漠然と見えるかも知れない）に當面させて、これらの概念なり關係を他の事物や他の事柄に適用させ使用させるがよい、その折、適用可能な事柄だけでなしに適用不當な事柄（例えば、4つや5つのもの、臺形や平行四邊形、共々に增加する二つの量）にも直面させることが是非必要である。こうして同類のものと異類のものとの兩方に適用させてそこで區別がつくようになれば〃類〃が形成され〃一般〃が把握される。即ち、當初事象に附着していた數、圖、關係が遂に事象から獨立した數、圖、關係となり、具體的事象に適用可能な數、圖、關係がかち得られる。このように先ず鮮明な見本的具體から出發して具體に適用し使用して得られた一般は、自由自在に具體に顯現可能であるし、逆に具體の中に一般を發見することも出來るもので、一般⇕具體の相通を實現するのである。

基本的な計算においても同樣で、例えば、3+5 でもかけ算でも%でも先ず鮮明な見本によつてこれらの意味・仕方を明示してやり、この意味・仕方を他の事柄に使用していき乍ら 3+5 で解ける問題の類を、かけ算で解ける問題の類を、%で示す問題の類を構成することによつて 3+5 とか、かけ算とか、%とかの一般が具體との相通において把捉される。B面の問題においても同樣である。例えば、くり上げでもくり下げでも、始めに見本的説明を與えてこれを他の計算に適用し使用し乍ら漸次十で束ねるという一般的手續を味得するのである。

A面でもB面でも小學校でも中學校でも、〃類〃において〃相通〃において基本的な數學的概念や關係や操作を味得することこそ、數學的解決の機具を創作することであり機具に通曉することである。これがひとえの問題を解決させる急所であり、コツである。既成の解決機具を押しつけ又は最初に解決機具を急いで作らせてその使用を强いることは無理である。始めの鮮明な見本は教師が明示することもあるし子供が氣付くこともある。續いて、これを他に適用し使用していくことを能力と呼び、その間次第に明確となり醇化していくことを理解と呼ぶならば、理解と能力とは不二一體のものであり、この一體的活動のラ線的上昇の歩みは練習と呼ばれてよいであろう。單なる形式的計算はこの意味においては練習とは云えない。

結局、ひとえの問題を解決させるには、問題に當面してそこにある具體的事柄の中に一般的事柄（數學的概念や關係等）を見出させる又は一般的事柄を適用させることである。そこには一般⇕具體の相通が見られ數學的經驗の特性が結果するであろう。解決の機具を創作することとからみ合わせつつとけこませつつ問題を解決させることである。これは基本學習の狙いである。

2、あわせた問題について

これは多段階の問題とか、解決に當つて基本的概念や關係や操作の組合せを要するような問題とか、原理を立てて多くの事柄をまとめる問題とか、分析すると多くの小問題になるような問題とかで、A面にもB面にも小學校にも中學校にも程度の差はあるにしても數多く見られる問題である。

こんな問題を解決させるには解決の機具に通曉させるだけでは不充

分で、機具の活用即ち解決の方法に習熟させることが肝要である。それには問題を數學的に解決するために、解決の機具（數學的概念や關係や操作）をどのように役立てるか、どのように組合せるか、どんな見とおしでどのように連結するかについて思考させるのである。この思考活動を活潑にさせるには、第一に當面する問題全體（背景・內容・本質）から見出される又は寫表し得られる數學的概念や關係や操作を綿密に見究めさせることである。往々かいた問題などに當面してそこにある數學的記號や用語（條件・公理・定理・術語）の意味がわからないために、解決の糸口がつかめず困つている子供を見受ける。第二に當面する問題全體又はこれから得られる數學的概念や關係と類似（形式・內容・方法などに共通的特性をもつていること）した問題や數學的概念・關係等を既往經驗の中から想起させることである。第三にその問題に關連を有する事柄や數學的概念・關係等を周圍に探し求めさせること、例えば、調査した資料に基づいてグラフを作成しようとする時に學級文庫や圖書室にあるグラフや書物を研究させる如きである。第四に教師が一人一人の子供に又は全體の子供に解決の手がかりや糸口についてヒントを與えるとか、何等かの關連又は類似を有する既成の解決方法なり知識なりを必要に應じて與えてやり（この場合はつめこみ教育でなしにほしがる學習となる）これを參考にして思考させること、第五は子供の生來の能力を充分發揮させることである。こうして問題解決のために解決の機具を役立てようとする思考活動を活潑にさせるなら、問題を數學的に寫表し、得られた數學的概念・關係等を有效に組合せて解決の理路を形成し進行して、到達した結論を檢定し、正解をもたらして、數學的解決を完遂するであろう。

結局、あわせた問題を解決させるには、基本的な數學的概念・關係等についての思考を活潑にさせ、これら解決の機具を活用させることである。ここに數學的思考の特性が見られる結果となろう。これは系統學習の狙いである。

この間、解決の機具は益々洗煉されさらに機具を活用して形成された解決の理路は高次の機具となるであろう。大切なことは、あくまで數學的解決の實行が目標であつて解決の機具自體が目標ではないことである。

III　どのように指導するか。

ここではどのように指導すれば數學的思考が伸張し數學的解決が發展するかについて、內容の共通化と方法の一般化の假說を立てて見よう。

1、內容の共通化

先ずどんな內容（問題）で指導するかについて見るに、子供の生活や社會生活の必要から生起する問題內容と共通の構成部分（事物、現象、事柄、狀態、知識、技術）を有する問題內容が望ましい。こんな問題內容に對して數學的に思考し數學的解決を實行しておけば、子供が實際に生活上の問題を數學的に解決しようと思考する時、類似の經驗として浮び上つて來て大いに役立つであろう。

次にひとえの問題においてもその內容はなるべく多方面に多樣性をもたせて指導することである。例えば、%については身體、食物、健康、成長、病氣、藥品、住宅、物價、賣買、株式、貯蓄、産物、人

ロ、貿易、火災、天災、天體、等々に見られる%による表現の如きである。このように%一般が多方面に多様性をもつ%具體と相通しておれば、子供が將來際會する問題内容と共通する巾が廣く保たれて類似の經驗として想起される源泉が滿される。

あわせた問題の内容においても同様なことが望ましい、だがむしろここでは解決の仕方に多様性を持たせることが望ましい。例えば同一問題に對しても色々の別解があろうし、多くの問題には夫夫別々の解決もあろうし時には共通の解決もあろう。

とにかく問題解決に當つては過去の類似の經驗が有效に作用するのであるから、次々と内容の共通化を企圖して累積的に經驗を重ねることが肝心である。それには縦の方向即ちP→Q→R→……の進行方向において内容の共通化を圖り横の方向即ちP・Q・R・の夫夫に内容の多様化を圖ることとである。

A面の解決活動はA面内においては廣い意味で内容に共通性がある。それは凡べて自然界や社會の事物・現象・事柄・狀態等である、この意味で類似の經驗として働らく。これと同様にB面の解決活動はB面内においては類似の經驗として有效に作用する。だが併しA面とB面の間では内容に共通性が乏しいから類似の經驗として働き難い傾向がある。だからB面で數の計算問題が巧みに解決出來てもA面の實際問題が巧みに解決出來るとは限らぬ。これには他の原因もあろうが、これに對しては方法の一般化を企圖することが有效である。

とにかく指導に當つては内容の共通化に心を配り類似の經驗を豊かにすることが實に大切である。

2、方法の一般化

特殊的のものや具體的のものを單にそれだけのこととして指導するならば、類似の經驗として有效に作用しない。もしも特殊や具體を一般化された形になるように指導すれば、方法的に共通化されて將來廣く有效に働らき得るのである。

先ずなまの問題の指導においては、單に問題の形成を具體的に指導するだけに止らずに、問題の形成過程を一般化された形にするように、例えば「目的に照して不用因子は捨て去り有用因子を採り出していく」のように指導しておけば、實際生活において自分で目的を設定し、この目的のために何を問題としていけばよいかを思考する時に類似の經驗として活動し得るであろう。ここになまの問題の狙いがある。

次にかいた問題の解決を指導するに當つても、單にその問題解決を具體的に指導するだけに止らずに、解決の過程や思考の方法を一般化された形になるように、例えば、デュウイの思考過程とか、ドウンケルの解決過程とか、ポリアの思考方法とか、又は解決の鍵となる記號や用語の意味をよく把握すること、かくされている條件（假定）を見破ること、行詰れば觀點を變更すること、類推を用いること、等の如くに指導すれば、他の問題解決に當つて方法的に類似の經驗として有效に活動し得る。

さらに深く堀り下げて見ると、基本的な數學的概念、關係等の構成把捉は、凡べて經驗の一般化によつて爲されるのである。箇々の特殊や具體を單にそれだけのものとしないで〃類〃において、具體⇕一般の相通において把握するのである。ここに方法の一般化は自らの母體

を見出すであろう。それ故、指導に當つては具體と一般の相通を實現するように考慮すべきである。例えば、一般を具體に適用することと具體の中に一般を發見することを交互に經驗さす如きである。

さてA面における解決活動が一般化されて來るとB面の解決活動に發展していくのである。A面→B面の間に具體→一般の相通が實現されると、數學的解決は方法の一般化をなし遂げるのである。それはさらにB面における高次な方法の一般化へと發展するに到る。このように方法が一般化されて始めて、AB兩面はお互いに類似の經驗として有效に相作用をなし得る。常にAB兩面の相通を期して指導が進められねばならない。

終りに强調したいことは、問題解決に當つて類似の經驗を活用しようと意圖するように子供を指導することが極めて重要であることだ。この試行によつて過去の經驗が組み直されるならば、そこに經驗の再構成が行われる。こうして數學的經驗は發展し數學的思考は伸張するであろう。

IV 經驗單元と教科單元

新しい教育と前からの教育の二つの立場は、生活か數學か、生活の發展か數理の系統か、經驗カリキユラムか教科カリキユラムか、經驗單元か教科單元か、生活の數學化か數學の生活化か、生活の場における數學か數學としての數學か、生活をよくする爲に數學を學習するのか數學を身につける爲に生活をとり入れるのか、等々の對立的な問題を惹起している。新らしい數學教育の思潮が滔々と押寄せてこれに浸されたかの如く見えた時にも又新らしい數學教育が反省されつつある今時にも、この二つの立場は融け合わないでうずき續けている。嘗つては數學が主で生活が副であつて、今では生活が主で數學が副とされているが、ほんとうにそうなつているだろうか、ここにも銳い反省を要するであろう。さらに數學に主位をゆずり再び昔に復歸したい氣配がないであろうか。ここにも强い警戒を要するであろう。

この二つの立場を如何に止揚するかについて私の立てた假說から論じて見よう。卽ち、數學教育の純固有目標として數學的解決の實行とその內面に働らく數學的思考の洗煉とを假說し、この目標を達成するために數學教育の方法を假說した。これらの假說から二つの立場を如何に融合するかを構想して行こう。それには、子供が當面する問題の內容と方法の順序と思考の方法の三面から考究していく。

Ⅰ 問題の內容

數學的解決の實行という目標を達成するために、どんな問題がよいかにおいて、その內容は子供の生活に必要な內容若しくはそれと類似な（共通的特性を有する）內容で而もその本質が數學的方法をえらびとるものが望ましいのである。どのように指導するかにおいて、なまの問題にしてもかいた問題にしても內容の共通化を指導假說とした。これは、子供の生活にあるもの、子供が必要とするもの、子供のすむ社會が必要とするもの、等々との內容的共通化を企圖して指導することを强調したのである。このように問題の選擇にも解決の指導にも、問題の內容は子供の生活から子供の必要から子供の社會の必要からという立前である。それ故に、これらの問題內容について數學的解決の

實行が狙いとなれば、子供は生活の場において數學學習をすることになり、生活の數學化が試みられる。從つて生活を數學的に改善し、生活に有用な、生活に役立つ數學が身につく結果を期待し得るであろう。だが併し、問題の内容を子供の生活經驗との共通性においてとることは、生活の場において學習させ生活の數學化を望み數學を役立てるための故ではない。數學的解決の實行という純固有目標を達成するための故にである。このことについて明らかにして行こう。數學的解決の實行には解決の機具が必要であると共にその活用が肝要である。數學的機具は他人から貸與されたものよりも、自分で創作したものの方がその活用を自在ならしめる。機具の創作についてはひとえの問題の所で述べたように、不完全な意味のまま具體物に適用し使用することによつて創作すると共に一般性をかち得るのである。ここで適用し使用することは「子供の生活の場において、子供の必要な内容について」實行するのが最も自然であり容易であり適切である。從つて效果的であり能率的である。いやむしろ「子供の世界、子供の必要」以外に適用し使用する現場もないし適用し使用する意欲も起らない。子供の經驗、子供の要求から離れた場で、緣のない事について、如何程適用、使用を強制しても子供はいやがるか出來ないかに過ぎないであろう。子供の具體的經驗の最中において子供の基本的欲求に關連して生起する疑問・困惑・願望・要求等について（なまの問題）の數學的解決の最只中に、「適用し使用しつつ」數學的機具（基本的な數學的概念、關係等）が創作されていくのである。これを除けば解決の機具は貸與される以外に子供のものにはならないであろう。

機具の活用においても、解決しようとする問題（かいた問題、あわせた問題）の内容が、機具の創作において解決した問題（なまの問題、ひとえの問題）の内容と共通性を有すれば有する程、活用は自然に容易に適切に可能となり、從つて效果的に能率に會得されることは縷說を要しないであろう。

このように「數學的解決の實行」は解決機具の創作及び活用と融合一體的に實現される。解決の機具の創作は子供の生活の場において子供の必要な内容について適用し使用することによつてのみ可能となり、機具の活用も亦これらの内容と共通性を有する内容についてこそ極めて可能性が強い。ここに問題の内容が子供の經驗に連結することを要求する根據が嚴存する。單に役立ち有用なるためだけの故でなしに、數學的解決の實行という目標を達成するための故にである。

Ⅱ　方法の順序

數學的解決の實行という目標を達成するために、問題をどんな順序にすればよいかの所で「解決方法の望ましい順序に」と假說したのは、この順序に色々とあるからだつた。例えば、わかり易い順序とわかり難い順序、子供の順序と大人の順序、心理的と論理的、發生的と既成的、等々種々樣々である。ここで數理の系統とか數學の體系とか呼ばれているのは、大人の論理的な既成の順序に當てはまるであろう。例えばよせ算という解決方法→かけ算という解決方法とか、整數での解決方法→分數での解決方法→小數での解決方法→無理數での解決方法とかである。これらは極めて大雜把な順序であり而も人類が長年月を要して洗煉した順序である。然しこれがそのまま「數學的解決

の實行」を目指して育ちいく幼い子供の歩みを最も適切にする順序となり得ないことは、數學教育の足跡が明證している。「解決方法の望ましい順序」になるためには多くの素因が考えられるであろうが、大きな因子として解決方法の類似的發展（又は一般化）があげられる。例えば、二數のよせ算での解決方法→多數のよせ算での解決方法→多同數のよせ算での解決方法→かけ算での解決方法の順序である。これはさらに綿密に見ていくと、二數のよせ算→多數のよせ算の間には次の二通りが考えられる。①$a+b=c \rightarrow a+b+p+q=c+d=e$、これは二數のよせ算を$p+q=d$にも$c+d=e$にも適用したのである。②$a+b=c \rightarrow a+b+p+q=c+p+q=\alpha+q=e$、これは二數のよせ算を$c+p=\alpha$にも$\alpha+q=e$にも適用したのである。何れも二數のよせでの解決方法が使用され適用されたので、解決方法の類似的發展であり一般化である。十進法についても、一を十箇宛束ねて十とし、十を十箇宛束ねて百とし、百を十箇宛束ねて千とする等、又六十進法、何進法等、何れも束ねたものを一まとめにしていくという解決方法の類似的發展であり、方法の一般化である。此の外多くの因子が考えられるであろう。例えば、子供の論理にふさわしい順序とか、飛躍のない順序とか、等々である。これらの因子を假說し、實驗によつて檢證し、取捨選擇していけば遠からず望ましい順序が確立されるであろう。これが今後私に課せられた仕事である。ともあれ、望ましい順序は單によせ算の次にかけ算という如き大雜把な順序でなしに、よせ算での解決方法からかけ算での解決方法へ到る間を連結する鎖の輪の數々でありその順序である。この微細なつながりの順序は、大人には極めて微細に見えるとしても子供にとつては重大なことであるかも知れない。さて、解決方法の望ましい順序は數學的解決の實行のさ中において探求され確立されていくのである。解決の實行を離れた方法の順序は空廻りするに過ぎないであろう。實行を通して創り出された望ましい順序はやがて數理の系統と呼ばれ數學の體系と名付けられるものに脫皮し得るであろう。今では脫皮以前のものであり若干の相違はあろうけれども、それは新しいものと古いもの、生成のものと既成のもの、未熟と成熟の差異である。これらは意とするに足りない。いやむしろ、若きものに未熟のものに新しきものに豫想外の素晴らしい寶石を見出すことすらある。數學としての數學、數理の系統、數學の體系を重視する前からの數學教育の狙いは「解決方法の望ましい順序」の確立によつて滿されないのであろうか？　子供が數學的解決に精根を打ちこんでいそしむことと融合一體的に解決方法の望ましい順序が探求され樹立されて、そこに新らしい若々しい數學が創り出されるならば、何も好んで化石化した既成の古めかしい大人の數學を子供に押しつけて苦しませる必要はあるまい。「數學的解決の實行」という目標に努力すれば、前からの數學教育の主張を實現することが可能である。

ここで重大な誤解を防ぐために、既成數學の役割について述べておこう。デュウイの言葉にもあるように、第一、人類の歴史は長い。歴史（過去の經驗）の中には過去の行動、實驗の長い記錄があり、又多くの原理、知識を正當づける證明がある。これらは貴重なもので無視することは愚かしい限りだ。第二、これらの原理、知識が新らしい條

件の下で如何に實際に働らくかを見究め、又新らしい事實を判斷する時に一層効果的な道具となるように、古い原理、知識を變えていくことは極めて大切である。このように既に組織立てられた知識は充分尊重すべきである、だが併し、それらは自ら新らしい知識を組織立てようとする時、効果的に活用されるに當つてより一層重要となるのである。さらに、模倣は創造の母といわれる如く子供は模倣から出發して創造へと突き進む、萬事殘らず子供に創造さすことは不可能である。人類が今日の數學を築くまでの何萬年かの足取りを再び歩ますことは愚の骨頂である。ここに既成の數學が數學教育に生かされる場がある。それは子供が數學的解決を實行する現場においてである。例えば、數學的解決の機具である所の基本的な數學的概念や關係等の構成把捉の時に、鮮明な具體的見本は教師が與えてもよい。又は一週は七日で一日は二十四時間である等の知識は知らせてやつてよい。さらに數學的解決に苦心している時に、當面している問題や解決に關連をもつ所の既成の解決方法をヒントとして與えて、これを變えて効果的に活用さすことも大切である。このような與え方で既成の數學を知らせるならば、つめこみ教育でなしにほしがる學習として生かされるのである。既成の數學は、子供が自ら新らしい數學を組織立てようとする時、効果的に活用されるに當つて極めて重要となることを忘れてはならない。

Ⅲ　思考の方法

數學的解決の實行は數學的思考の方法と共にある。數學的思考のはたらき無しの數學的解決はあり得ないし、逆に數學的解決から離れた數學的思考は無意味である。だから、數學的解決の實行において數學的思考の伸長が期待される。數學的思考は、數學的機具の構成把捉に、機具の活用洗煉において見られる如く、數學的內容（數量・圖形・關係・記號等）について思考し、而も、問題を數學的內容に寫表し、飜譯し、融合して、思考を進めるのである。ここに數學的內容の有する特色から正確・的確・能率的・等々の長所を有する思考が實行され伸長され洗煉されうるのである。こうして秀れた思考の方法が會得されて來る。昔から數學は頭をねるため、思考を鍛えるため、考える働らきを磨くため、といわれる點は、數學的解決の實行に努力すれば、秀れた思考の方法として身につく。

加うるに、數學的解決の長所がつかめて來ると、問題に當面して數學的方法で解決しようと強く感ずるようになるであろう。態度を一定の方法で行動せんとする特に感ぜられる傾性であるという意味において、上記の結果は數學的態度が身について來ることを示す。

以上要約すれば、數學的解決の實行を目標として、問題の內容を子供の經驗からとり（內容の共通化）、解決方法の望ましい順序を立てて（方法の一般化）、指導するならば、數學教育に期待されている「生活に役立つ」「數學がつかめる」「考えがよくなる」等々が實現され、數學的態度が身について來る。ここに生活の數學化と數學の生活化、生活の場における數學と數學としての數學等の立場が融合される可能性が見られる。ここで內容の共通化はA面の問題解決から出發することによつて實現され、方法の一般化はA面に止らずにB面に到りAB兩面の相通において始めて可能となる。即ち、これは具體↑↓一般の

相通において、而も一般は數學的內容である。これを見るに目標及び方法の假說は數學的經驗と思考の特性に據るものである。

これらはあくまでも假說であつて、これが確立されるためには今後の實踐的研究に俟たねばならない。一九五二・三・六

（くわしくは、拙著、數學教育概說—誠文堂新光社—を見られたい。）