

翼の動的失速に関する研究

河島 佑男* 山崎 正秀**
安藤 安則***

概 要

一様流中で静止していた2次元対称翼を、35%翼弦まわりに一定角速度で急に回転させた時の動的失速現象についての実験的研究を行った。翼弦に垂直な空気力を、測定翼を支持する歪ゲージを貼った板バネの空気力による撓みから直接に求める方法と、圧力変換器によって測定した翼表面の圧力分布を積分する方法の2通りの方法によって求めた。実験を行う前に、実験方法の正しさを小さい迎角の範囲で理論値と上記の2つの実験値を比較することによって調べた。零度の初期迎角から一定角速度で迎角を急に増大させた時の翼弦に垂直な空気力の係数の最大値は、速度パラメータ $2b\dot{\beta}/U$ (b : 半翼弦長, $\dot{\beta}$: 角速度, U : 一様流の速度) に強く依存することが確認された。また、静的な失速状態にある翼の迎角を一定角速度で急に変化させた時の、迎角に対する翼弦に垂直な空気力の係数の曲線の傾きは、角速度が増大するにつれて大きくなり失速していない状態の静的な傾きに近づくことがわかった。

1. 緒 言

翼の迎角がある角速度で増大する時の失速角及び最大揚力は、静的なそれらと比較して大きくなることは以前から知られている。この現象は静的な失速現象に対して動的失速現象と呼ばれ、初期には Farren¹⁾ の報告にある様に飛行機の着陸時における動的不安定に関する問題として取り上げられた。その後、この現象はヘリコプタのロータブレードやコンプレッサブレードに大きな変動荷重を生ぜしめ、ロータの構成要素の疲労寿命を低下させる失速フラッタの発生原因として取り上げられ、種々の研究²⁻⁷⁾ が報告されている。Ham と Garelick⁸⁾ は本実験に使用したのと同じ翼型 NACA 0012 の翼について、圧力変換器を用いて調べたヘリコプタのロータブレードに生ずる動的失速の実験的研究の報告をしている。

本研究においては、最初に翼弦に垂直な空気力を測定する2つの方法(測定翼を支持する歪ゲージを貼った板バネの空気力による撓みから測定する方法と圧力変換器による方法)の正しさを、迎角が小さい範囲では理論計算が可能であるのでその解析を行い、理論値と実験値を比較することによって調べた。

更に静的に失速していない状態または静的に失速している状態にある翼の迎角を、一定角速度で急に

* 九州大学教授, 工学部

** 九州大学助手, 工学部

*** 石川島播磨重工業株式会社, 技術研究所, 流熱部

増大または減小させた時の動的失速領域を含む領域における翼弦に垂直な空気力の変化を実験的に求め考察した。

2. 実験装置

2.1. 駆動装置

翼の駆動装置を図1に示す。モータ①の回転はベルト②によってフライホイール③に伝わる。その回転は歯車④を介してクラッチが取り付けられている軸⑤に伝わり、クラッチレバー⑥を引きクラッチをかみ合わせることによってチェーン⑦を介して下部回転腕⑧に伝わる。更にその回転は前後のロッド⑨により上部回転腕⑩に伝わり、上部回転腕に固定された翼⑪が回転する。翼が約45度回転すると軸⑤に取り付けられた離動装置により動力の伝達が切れ、バネによって停止時の衝撃を吸収すると共にストッパーが飛び出して翼のはねかえりを防止する。

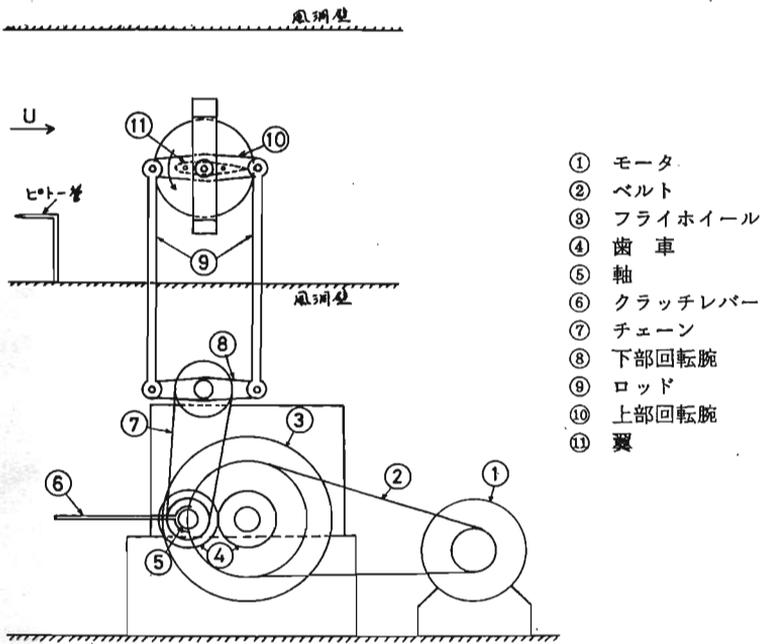


図1 駆動装置

2.2. 測定装置

本実験に使用した翼の型は NACA 0012 でその翼弦長は 20 cm である。翼弦に垂直な空気力は以下に述べる測定方法 A 及び測定方法 B の 2 通りの方法で測定する。

a) 測定方法 A

この方法は歪ゲージを用いて直接に翼弦に垂直な空気力を測定する方法で、その時用いた翼のモデルを図2に示す。このモデルは翼幅 10 cm の中央の測定翼と、その両側の 2 次元流れを実現させるため

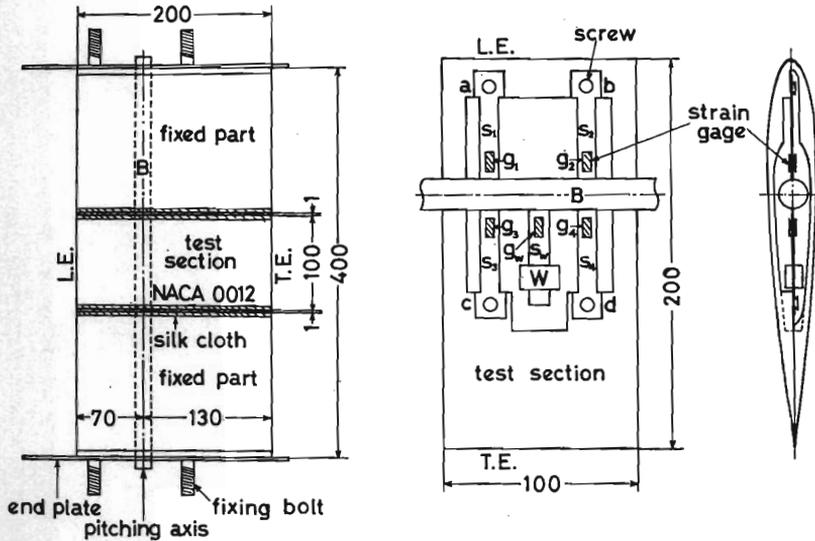


図 2 歪ゲージを用いて空気力を測定するための翼のモデル

の翼端板をもった翼幅 15 cm の固定翼 (図 1 に示す上部回転腕に固定されている) の 3 つの部分より成る。翼の内部には回転中心に鉄製の梁 B が通っており固定翼に剛結されている。測定翼はその梁に剛結された 4 枚のリン青銅板 (s_1, s_2, s_3, s_4) の末端 (a, b, c, d) においてビスで宙吊りに支持されている。翼弦に垂直な空気力はそれによって撓むリン青銅板に貼った歪ゲージ (g_1, g_2, g_3, g_4) によって計測する。測定翼と固定翼の間は約 1 mm の隙間があるが、測定翼まわりの 3 次元流れによる効果を除くために、その隙間に薄い絹布を測定翼の変位を妨げない程度にゆるく貼っている。

この方法による測定において、測定翼の慣性力による固定翼と測定翼の間の初期の振り撓みとそれに続く測定翼の固有ピッチング振動が表われる。この振動は一定角速度の回転運動に重なって起るもので、この振動の振幅が大きいと一定角速度で回転しているとはみなせなくなる。そこで測定翼を支持する板バネの剛性を十分に高くしてその初期撓みと振動の振幅を小さくし、歪ゲージには感度の高い半導体歪ゲージを使用した。また歪ゲージの出力信号に含まれる慣性力による固有振動の信号は、図 2 に示す測定翼とは独立に梁 B に取り付けられた片持ち振り子 s_w の錘り W の位置を調節して測定翼の固有振動数に一致させ、その振り子に貼った歪ゲージの出力信号を元の信号から電氣的に減算することによってほぼ取り除いた。

b) 測定方法 B

この方法は圧力変換器を用いて翼面上の圧力分布を測定し、それを積分することによって翼弦に垂直な空気力を求める方法で、この時得られる圧力分布より翼まわりの流れを推測することができる。この方法で用いた翼のモデルと圧力測定孔の位置を図 3 に示す。翼は翼弦長さ 20 cm, 翼幅 40 cm の矩形翼で翼の両端に翼端板がついている。圧力は翼内に装着した圧力変換器により、翼幅中央に位置する前縁より翼弦長の 2 ~ 90 % 後方の翼弦位置の 10 点で測定した。圧力孔の直径は 1 mm である。

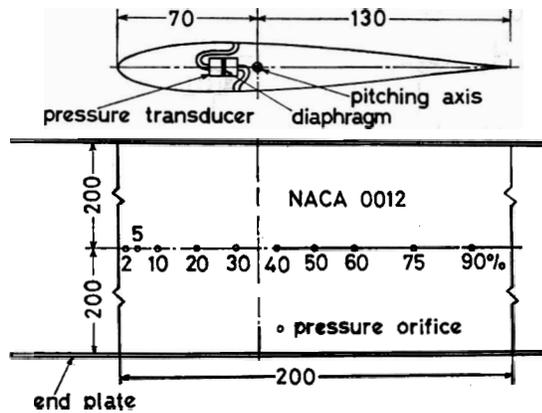


図3 圧力変換器を用いて空気力を測定するための翼のモデルと圧力測定孔の位置

圧力変換器はそのダイヤフラム面が翼弦に垂直になる様に設置し、回転運動開始時の加速度の影響をダイヤフラムが受けない様にした。回転運動による遠心力はダイヤフラムに影響することはなかった。

翼の迎角は幾何学的角変位を電圧出力に変換する角変位交換器により計測した。翼弦に垂直な空気力、圧力及び翼の迎角は電磁オシログラフに記録した。

3. 理論による実験方法の正しさの検証

前述のAとBの2通りの実験方法の正しさを、小さい迎角の範囲で非定常薄翼理論による理論値と実験値を比較することによって調べた。

3.1. 理論式

非定常揚力の理論解析において、翼は2次元の平板翼と仮定しその迎角は小さく、流体は非粘性で非圧縮であると仮定する。図4に示す様に一定速度 U で翼弦方向に運動していた翼が、翼弦中央から ba 後方の軸Cまわりに急に回転を開始し、その迎角を増大する時に翼に作用する非定常揚力（速度 U の一様流中で迎角零度で静止していた翼が、同じ軸Cまわりに回転した時の非定常揚力と等価である。）の理論式は次式の様になる。

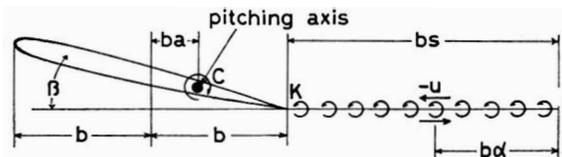


図4 理論式で用いられる記号を示す図

$$L = L_1 + L_0 + L_2$$

$$= \pi \rho b^2 (U \dot{\beta} - ba \ddot{\beta}) + \left[C_{L\beta} \rho b U^2 \beta + C_{L\dot{\beta}} \rho b^2 \left(\frac{1}{2} - a \right) U \dot{\beta} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\rho U \left[\int_0^{\beta} \left\{ C_{L\beta} b U \frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha} + C_{L\beta} b^2 \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{d^2\beta(\alpha)}{d\alpha^2} \right\} \right. \\
 & \times \int_0^{\infty} \frac{e^{-r(s-\alpha)}}{r^2} \frac{dr d\alpha}{\{K_1(r) - K_0(r)\}^2 + \pi^2 \{I_0(r) + I_1(r)\}^2} \\
 & \left. + C_{L\beta} b^2 \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\beta}(0) \int_0^{\infty} \frac{e^{-rs}}{r^2} \frac{dr}{\{K_1(r) - K_0(r)\}^2 + \pi^2 \{I_0(r) + I_1(r)\}^2} \right]
 \end{aligned}$$

ところで

ρ : 空気密度

u : 後流の渦度 (時計まわりを正とする)

I : 翼が回転運動を開始した時の後縁の位置

$b\alpha$: I から回転運動開始後のある瞬間における後縁までの距離

$b\alpha$: I と後流自由渦度の距離

L_1 : 見かけの質量による揚力

L_0 : 準定常揚力

L_2 : 後流の分布渦度による揚力

β : 翼の迎角 (時計まわりを正とする)

$\dot{\beta}$: 角速度

$\ddot{\beta}$: 角加速度

$C_{L\beta}$: 実験的に得られた揚力傾斜

K_0, K_1 : 第2種の変形ベッセル関数

I_0, I_1 : 第1種の変形ベッセル関数

r : 実変数

である。理論式の誘導は付録に示す。

3.2. 理論値と実験値の比較

動的な実験を行う前に静的な翼弦に垂直な空気力を測定した。その結果を図5に示す。歪ゲージによる計測において測定翼の両端の隙間に絹布を貼らない場合は、翼弦に垂直な空気力の係数 C_n の迎角 β に対する傾き $C_{n\beta} = dC_n/d\beta$ は迎角が 4° くらいまでしか一定でないが、絹布を貼った場合には迎角が約 9° まで一定の傾き ($C_{n\beta} = 5.67$) 得ることができた。歪ゲージによる測定値と圧力変換器による測定値 (Reynolds number = 2.57×10^6) はよく一致している。比較のために NACA T.N. No. 385 に記載の同じ翼型に関する実測値 (Reynolds number = 3.23×10^6) を示している。前記の理論式における揚力傾斜 ($C_{L\beta} = dC_L/d\beta$) は、上記の実験で得られた $C_{n\beta}$ とほぼ等しく計算に際して $C_{L\beta}$ のかわりに $C_{n\beta}$ の値を用いた。

速度 $U = 19.2 \text{ m/s}$ の一様流中で迎角零度で静止していた翼が、角速度 $\dot{\beta} = 3.83 \text{ rad/s}$ または $\dot{\beta} = 5.74 \text{ rad/s}$ で回転運動を行う場合について、翼弦に垂直な空気力の理論値と実験値の比較を行った。

図6に迎角の時間的変化の測定値と理論計算を行う時に用いるその近似曲線を示す。図7に迎角に対する翼弦に垂直な空気力の係数 C_n の実験値と理論値を示す。迎角が小さいので理論計算で求まる揚力係数

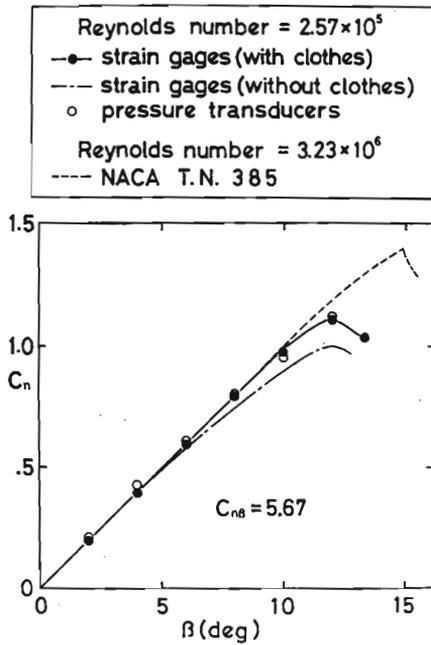


図5 迎角に対する静的な翼弦に垂直な空気力の係数の変化

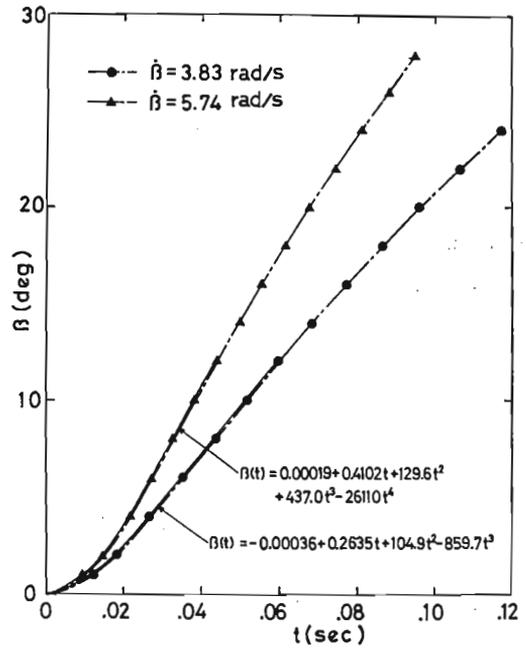


図6 迎角の時間的変化と理論解析で用いる近似曲線

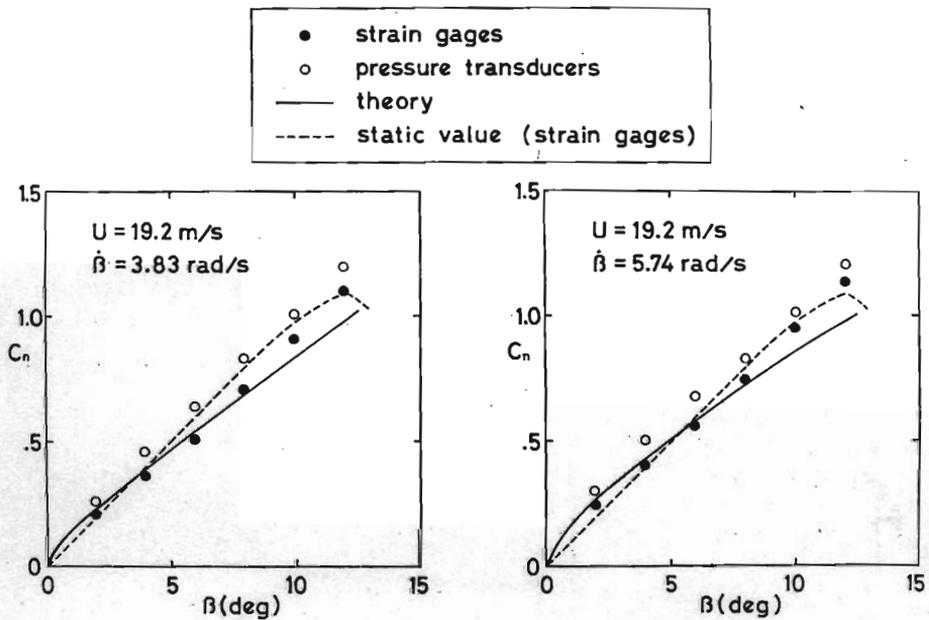


図7 翼弦に垂直な空気力の係数の理論値と実験値の比較

を近似的に C_n の理論値としている。歪ゲージで計測された実験値と理論値はよく一致しているが、圧力変換器により計測された実験値はやや大きな値となっている。歪ゲージで計測する場合、圧力変換器による計測の場合と異なり翼弦に垂直な空気力は直接に計測できるので、その値は圧力変換器による実験値より確かであると考えられる。以後翼弦に垂直な空気力の計測は主に歪ゲージを用いた方法で行った。

4. 実験結果とその考察

速度 $U=19.2 \text{ m/s}$ の一様流中で迎角零度で静止していた翼が、一定角速度 $\dot{\beta}=3.83 \text{ rad/s}$ または $\dot{\beta}=5.74 \text{ rad/s}$ で急にその迎角を増大した時の翼弦に垂直な空気力の係数の時間的変化を図8に示す。動的な翼弦に垂直な空気力の係数の最大値 C_{nmax} は、静的な値 ($C_{nmax}=1.1$) より大分大きい。この現象は翼面上の圧力分布に関係している。図9に $\dot{\beta}=5.74 \text{ rad/s}$ の場合の動的失速の過程における差圧力分布 ΔC_p の変化を示す。大きな動的な C_{nmax} は、迎角の時間的変化による失速の発生の遅れと、図9から推測される様に動的失速の過程において、翼の前縁付近から放出され翼の上表面に沿って移動する自由渦度に起因する翼の上表面の持続した Suction によって生ずる⁶⁾。同速度の一様流中で角速度が高くなると C_{nmax} の値が大きくなっている。歪ゲージによって計測された C_{nmax} の値を $0.01 \sim 0.08$ の範囲の速度パラメータ $2b\dot{\beta}/U$ に対して表わしたのが図10である。 C_{nmax} の値は速度パラメータに強く依存し、それらの実験点は速度パラメータが約 0.08 以下の範囲では、静的な C_{nmax} の実験点を通る

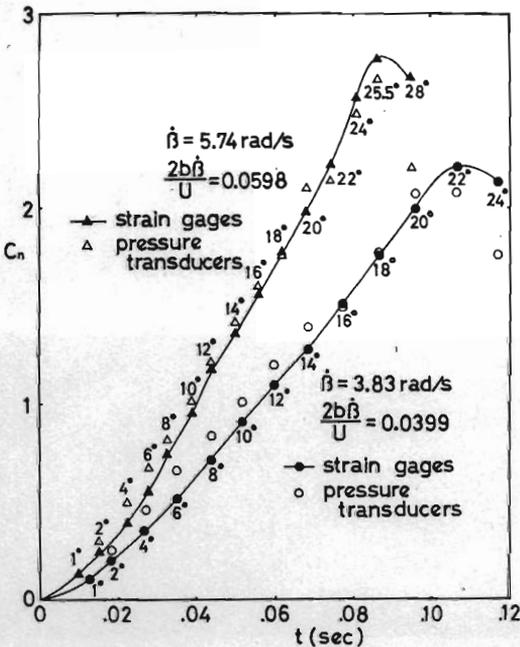


図8 初期迎角零度から迎角を急に増大した時の翼弦に垂直な空気力の係数の時間的変化

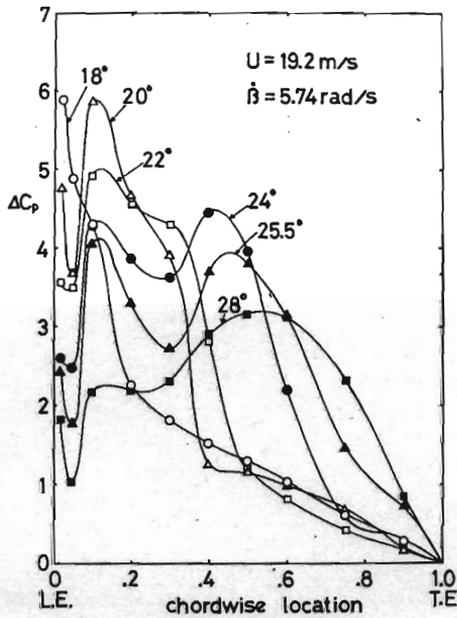


図9 初期迎角零度から迎角を急に増大した時の動的失速の過程における圧力分布

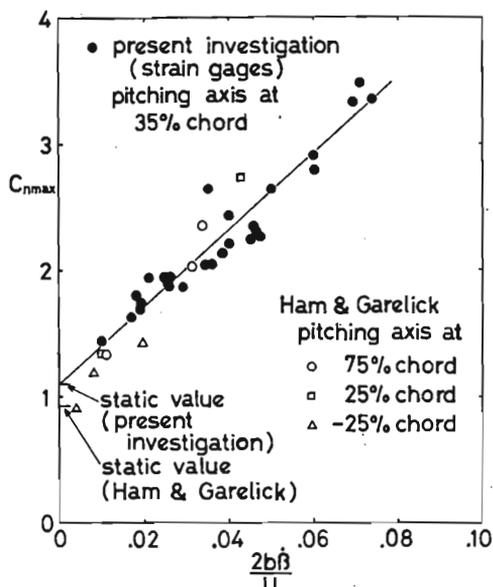
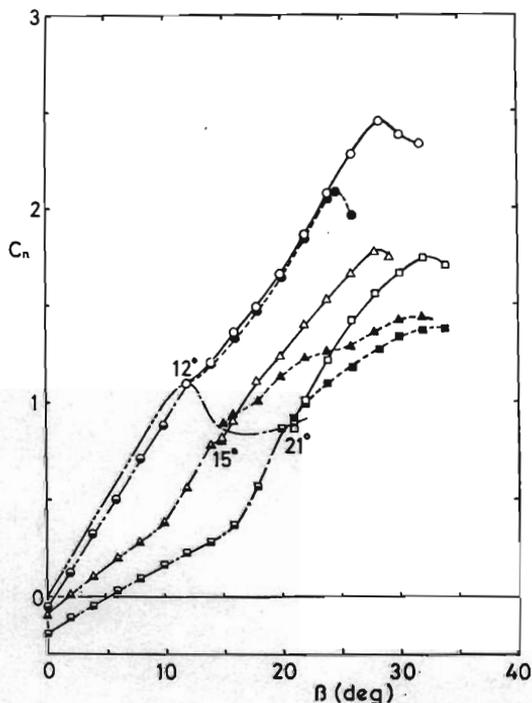


図10 初期迎角零度から迎角を急に増大した時の速度パラメータに対する翼弦に垂直な空気力の係数の最大値

1つの直線で大体近似することができる。

比較の意味で Ham と Garelick の報告⁶⁾にある実験値を同時に示している。これらの実験値は速度パラメータが小さいところで本実験の値よりやや小さく、静的な値も小さい。

速度 $U=21.6 \text{ m/s}$ の一様流中において、静的な失速状態にある翼の迎角 ($\beta=15^\circ$ または $\beta=21^\circ$) を一定角速度で急に増大または減少させた時の、迎角に対する翼弦に垂直な空気力の係数 C_n の歪ゲージによる計測値を図11に示す。比較のために静的な C_n の値と、静的な失速を起す直前にある翼の迎角 ($\beta=12^\circ$) を一定角速度で急に増大または減少させた時の C_n の値を示している。静的な失速状態にある翼の迎角を角速度 $\dot{\beta}=7.0 \text{ rad/s}$ で増大させた時の C_n の値は、失速角以下の静的な C_n の迎角に対する傾きとほぼ同じ



$U = 21.6 \text{ m/s}$

	angular velocity $\dot{\beta}$ (rad/s)	initial angle of attack (deg)
-----	static	
○—○	7.0	12
△—△	7.0	15
□—□	7.0	21
●-●	3.7	12
▲-▲	3.7	15
■-■	3.7	21
○-○	-7.0	12
△-△	-7.0	15
□-□	-7.0	21

図11 静的に失速している状態または失速していない状態から迎角を急に増大または減少させた時の迎角に対する翼弦に垂直な空気力の係数の変化

傾きで増大するが、角速度が $\dot{\beta}=3.7 \text{ rad/s}$ と小さくなるとその傾きは小さくなる。このことは、角速度が増大するにつれて迎角の変化に伴う剝離領域の形の変化の遅れが大きくなるために起るのである。静的な失速状態にある翼の迎角を一定角速度で増大させた時の $C_{n\max}$ の値は、静的に失速していない状態から迎角を同じ角速度で増大させた時の $C_{n\max}$ の値よりも大分小さい。また静的な失速状態にある翼の迎角を増大させた時の $C_{n\max}$ の値は、初期迎角に無関係にほぼ一定であり、角速度が大きい方が $C_{n\max}$ の値が大きい。静的な失速状態にある翼の迎角を一定角速度 $|\dot{\beta}|=7.0 \text{ rad/s}$ で急に減少させた時の C_n は、失速していない時の静的な C_n の迎角に対する傾きとほぼ同じ傾きで減少し、途中でその傾きが急に小さくなり一定となって減少し静的な C_n の値に近づく。この場合も迎角の変化に対する剝離領域の形の変化の遅れが大きく、迎角に対する C_n の傾きが急に小さくなるところで剝離領域の形が変化し始めているものと思われる。

5. 結 言

歪ゲージによる翼弦に垂直な空気力の計測は圧力変換器による計測より簡便で確かであるが、後者の方法により流れの模様や圧力分布やモーメント等の豊富な情報が得られる。

初期迎角零度から迎角を一定角速度で急に増大した時の $C_{n\max}$ の値は、速度パラメータ $2b\dot{\beta}/U$ が約 0.08 以下の範囲では速度パラメータの一次関数でほぼ近似できる。

静的な失速状態にある翼の迎角を一定角速度で急に増大させた時の C_n の迎角に対する傾きは、角速度が大きくなると増大し失速角以下の静的な C_n の迎角に対する傾きに近づく。この場合の $C_{n\max}$ の値は、静的に失速していない状態から同じ角速度で迎角を増大させた時の $C_{n\max}$ の値よりはるかに小さく、また角速度が大きくなると $C_{n\max}$ の値は大きくなる。静的な失速状態から迎角を大きな一定角速度で減少させた時、 C_n の迎角に対する傾きは失速角以下の静的な傾きとほぼ同じであるが、途中で急に減少する。これらの結果は、角速度が大きくなると迎角の変化に伴う翼まわりの剝離領域の形の変化の遅れが大きくなるからだと思われるが、それを立証するには可視化された翼まわりの流れの観察が必要である。

謝 辞

本研究は財団法人三菱財団学術奨励金（代表者、応用力学研究所種子田教授）の援助によって行われた研究である。

参 考 文 献

- 1) Farren W. S. : *The Reaction on a Wing Whose Angle of Incidence is Changing Rapidly, Wind Tunnel Experiments with a Short Period Recording Balance*, Report and Memoranda, No. 1648, 1935, pp. 127-150.
- 2) Ward J. W. : *The Behavior and Effects of Laminar Separation Bubbles on Aerofoils in Incompressible Flow*, J.R.A.S., Vol. 67, 1963, pp. 783-790.
- 3) McCroskey W. J. and Fisher R. K., Jr. : *Detailed Aerodynamic Measurements on a Model Rotor in the Blade Stall Regime*, J.A.H.S., Vol. 17, 1972, pp. 20-30.

- 4) Johnson W. : *The Effect of Dynamic Stall on the Response and Airloading of Helicopter Rotor Blades*, J.A.H.S., Vol. 14, 1969, pp. 68-79.
- 5) 猿渡敬治 : 急激な迎角の変化に対する翼の応答, 九州大学工学部修士論文, 1971.
- 6) Ham N. D. and Garelick M. S. : *Dynamic Stall Considerations in Helicopter Rotors*, J.A.H.S., Vol. 13, 1968, pp. 49-55.
- 7) 磯貝紘二 : 失速が起るような高い迎角で調和振動する2次元翼に働く空気力に対する半実験的理論, 航空宇宙技術研究所報告, TR-122, 1966.
- 8) Wagner H. : *Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln*, Z.A.M.M., Vol. 5, 1925, pp. 17-35.

(昭和52年10月29日 受理)

付録 非定常揚力の理論式の誘導^{a)}

非定常揚力の理論解析を行うにあたって以下の仮定を設ける。翼は2次元の平板翼とする。流体は非粘性で非圧縮である。翼の迎角は小さく、翼の回転運動によって生ずる攪乱速度もまた一様流の速度 U に比して小さい。座標軸は翼に固定されており、原点は翼弦中央の点で、 x 軸は翼弦に沿ってとり後縁の方向を正の方向とする。

翼の表面の非定常流れに線形化された Bernoulli の方程式を適用すると、翼の上下面の圧力差 Δp は次の様に書ける。

$$\Delta p = -2\rho \left[U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \quad (\text{付-1})$$

ところで

φ : 翼の上表面の攪乱速度ポテンシャル (以後攪乱速度ポテンシャルを速度ポテンシャルと呼ぶ)

ρ : 空気密度 t : 時間

である。翼の表面の流れを非循環流れと循環流れに分けて、それぞれの流れの速度ポテンシャルを φ_{NC} 及び φ_C とする。翼が軸 C ($x=ba$) まわりに回転運動を行う時、翼の上表面の非循環流れの速度ポテンシャルは次の様になる*。

$$\varphi_{NC} = U\beta\sqrt{b^2-x^2} + \dot{\beta} \left(\frac{1}{2}x-ba \right) \sqrt{b^2-x^2} \quad (\text{付-2})$$

但し

b : 半翼弦長

β : 迎角 (時計まわりを正とする)

$\dot{\beta}$: 角速度

である。差圧力 Δp_{NC} は式 (付-1) の φ に式 (付-2) の φ_{NC} を代入することによって得られる。

$$\Delta p_{NC} = 2\rho U^2 \beta \frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}} - 2\rho U \dot{\beta} \left\{ \frac{3}{2}\sqrt{b^2-x^2} - \left(\frac{1}{2}x-ba \right) \frac{x}{\sqrt{b^2-x^2}} \right\} - 2\rho \dot{\beta} \left(\frac{1}{2}x-ba \right) \sqrt{b^2-x^2} \quad (\text{付-3})$$

* NACA REPORT NO. 496 (1935) の p. 5 を参照のこと。但し、この REPORT では半翼弦長を単位長さとして表示している。

Δp_{NC} を翼弦に沿って積分すると非循環流れによる揚力 L_{NC} が得られる。

$$L_{NC} = - \int_{-b}^b \Delta p_{NC} dx = \pi \rho b^2 (U \dot{\beta} - ba \ddot{\beta}) \quad (\text{付-4})$$

揚力 L_{NC} は見かけの質量による寄与 L_1 である。

次に循環流れによる揚力 L_C を求める。その時翼の後流の自由渦は x 軸上にあると仮定する。翼の後縁 $\xi=b$ から $\xi=\xi_0$ まで連続的に分布している自由渦 $-u(\xi)d\xi$ による翼の上表面の速度ポテンシャル φ_C は

$$\varphi_C = \frac{1}{2\pi} \int_b^{\xi_0} u(\xi) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{b^2-x^2} \sqrt{\xi^2-b^2}}{b^2-x\xi} \right) d\xi \quad (\text{付-5})$$

となる。ところで後流自由渦は速度 U で x 軸に沿って正の方向に流されることから次の関係が成り立つ。

$$\frac{\partial \varphi_C}{\partial t} = U \frac{\partial \varphi_C}{\partial \xi} \quad (\text{付-6})$$

式 (付-5) と式 (付-6) を式 (付-1) に代入すると、差圧力 Δp_C が得られる。

$$\Delta p_C = -2\rho U \left(\frac{\partial \varphi_C}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_C}{\partial \xi} \right) = -\frac{\rho U}{\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2-x^2}} \int_b^{\xi_0} \frac{\xi+x}{\sqrt{\xi^2-b^2}} u(\xi) d\xi \quad (\text{付-7})$$

循環流れによる揚力 L_C は Δp_C を翼弦に沿って積分することによって得られる。

$$L_C = - \int_{-b}^b \Delta p_C dx = \rho U \int_b^{\xi_0} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-b^2}} u(\xi) d\xi \quad (\text{付-8})$$

ここで次の関係を使って図4に示される座標に変換をする。

$$\xi = b(s-\alpha+1) \quad (\text{付-9})$$

ところで $\xi=b$ は $\alpha=s$ に、 $\xi=\xi_0$ は $\alpha=0$ に対応する。また距離 bs と時間 t との関係は $bs=Ut$ である。式 (付-8) を座標変換すると次式となる。

$$L_C = \rho U b \int_s^{\alpha=0} \frac{s-\alpha+1}{(s-\alpha)^2+2(s-\alpha)} u(\alpha) d\alpha - \rho U b \int_s^{\alpha=0} \frac{u(\alpha) d\alpha}{(s-\alpha)^2+2(s-\alpha)} \quad (\text{付-10})$$

循環流れによる揚力 L_C を評価するには循環の強さを決定しなければならない。循環の強さは、翼の後縁 $x=b$ における速度は無限大にならないという Kutta の条件

$$\frac{\partial \varphi_{NC}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_C}{\partial x} = \text{finite} \quad (\text{付-11})$$

より決定される。式 (付-11) に式 (付-2) と式 (付-5) を代入すると次の関係式が得られる。

$$2\pi b \left\{ U\beta + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\beta} \right\} = \int_b^{\xi_0} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} u(\xi) d\xi \quad (\text{付-12})$$

上式の左辺は準定常循環 Γ_0 である。

$$\Gamma_0 = 2\pi b \left\{ U\beta + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \right\} \quad (\text{付-13})$$

従って式(付-12)は

$$\Gamma_0 = \int_0^{\xi_0} \sqrt{\frac{\xi+b}{\xi-b}} u(\xi) d\xi \quad (\text{付-14})$$

と書け、式(付-9)で表わされる座標変換を行うと

$$\Gamma_0 = b \int_0^1 \sqrt{\frac{s-\alpha+2}{s-\alpha}} u(\alpha) d\alpha \quad (\text{付-15})$$

となる。故に式(付-10)の右辺の第1項は準定常揚力 L_0 である。

$$L_0 = \rho U \Gamma_0 = 2\pi \rho b U^2 \left\{ \beta + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{\dot{\beta}}{U} \right\} \quad (\text{付-16})$$

式(付-16)の{ }内は翼の運動によって誘起される3/4翼弦長点の流れの吹き下ろし角である。式(付-10)の右辺の第2項は後流中の自由高度による揚力 L_2 で、ラプラス演算子法を用いて評価される。

$$L_2 = - \int_0^{\infty} \frac{u(\alpha) d\alpha}{(s-\alpha)^2 + 2(s-\alpha)} \quad (\text{付-17})$$

関数 $f(s)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}\{f(s)\}$ で表わし、次の様に定義する。

$$\mathcal{L}\{f(s)\} = \int_0^{\infty} e^{-ps} f(s) ds \quad (\text{付-18})$$

p はラプラス変換のパラメータである。式(付-17)を合成定理を使ってラプラス変換すると

$$\mathcal{L}\{L_2(s)\} = -\rho U b \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{s^2+2s}} \right\} \mathcal{L}\{u(s)\} \quad (\text{付-19})$$

となる。同様に式(付-15)をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}\{\Gamma_0(s)\} = b \mathcal{L}\left\{ \sqrt{\frac{s+2}{s}} \right\} \mathcal{L}\{u(s)\} \quad (\text{付-20})$$

となる。式(付-20)と $\mathcal{L}\{d\Gamma_0(s)/ds\} = p\mathcal{L}\{\Gamma_0(s)\} - \Gamma_0(0)$ の関係を用いると式(付-19)は次の様になる。

$$\mathcal{L}\{L_2(s)\} = -\rho U \mathcal{L}\{\theta(s)\} \left[\mathcal{L}\left\{ \frac{d\Gamma_0(s)}{ds} \right\} + \Gamma_0(0) \right] \quad (\text{付-21})$$

ところで $\theta(s)$ は次式で表わされる。

$$\mathcal{L}\{\theta(s)\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\sqrt{s^2+2s}} \right\} / p \mathcal{L}\left\{ \sqrt{\frac{s+2}{s}} \right\} \\ p\{K_1(p) + K_0(p)\} \quad (\text{付-22})$$

但し K_0 と K_1 は第2種の変形ベッセル関数である。式(付-21)を合成定理を使ってラプラス逆変

換すると次式となる。

$$L_2(s) = -\rho U \left[\int_0^s \frac{d\Gamma_0(\alpha)}{d\alpha} \phi(s-\alpha) d\alpha + \Gamma_0(0) \phi(s) \right] \quad (\text{付-23})$$

式 (付-22) をラプラス逆変換すると

$$\phi(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-rs}}{r^2} \frac{dr}{\{K_1(r) - K_0(r)\}^2 + \pi^2 \{I_0(r) + I_1(r)\}^2} \quad (\text{付-24})$$

となる。但し I_0 と I_1 は第 1 種の変形ベッセル関数で、 r は実変数である。式 (付-23) に式 (付-13) と式 (付-24) を代入すると、後流中の自由渦度による揚力 L_2 が得られる。

$$\begin{aligned} L_2 = & -\rho U \left[\int_0^s \left\{ 2\pi b U \frac{d\beta(\alpha)}{d\alpha} + 2\pi b^2 \left(\frac{1}{2} - a \right) \frac{d^2\beta(\alpha)}{d\alpha^2} \right\} \right. \\ & \times \int_0^\infty \frac{e^{-r(s-\alpha)}}{r^2} \frac{dr d\alpha}{\{K_1(r) - K_0(r)\}^2 + \pi^2 \{I_0(r) + I_1(r)\}^2} \\ & \left. + 2\pi b^2 \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\beta}(0) \int_0^\infty \frac{e^{-rs}}{r^2} \frac{dr}{\{K_1(r) - K_0(r)\}^2 + \pi^2 \{I_0(r) + I_1(r)\}^2} \right] \quad (\text{付-25}) \end{aligned}$$

翼に作用する全揚力 L は、非循環流れによる揚力 $L_{NC}(=L_1)$ と循環流れによる揚力 $L_C(=L_0+L_2)$ の和で与えられる。

$$L = L_{NC} + L_C = L_1 + L_0 + L_2 \quad (\text{付-26})$$

式 (付-26) に式 (付-4) と式 (付-16) と式 (付-25) を代入し、理論的揚力傾斜 2π のかわりに揚力傾斜の実測値 $C_{L\beta}$ を用いると揚力 L が得られる。