

# ワイツマン型費用関数について

石 川 健

## 1. はじめに

本稿ではワイツマンの独占的競争市場モデル〔Weitzman (1991)〕<sup>1)</sup>における費用関数について若干の考察を加える。ワイツマン・モデルそのものおよびその「市場の一般モデル」としての意義についてはすでに拙稿 (1993) で述べているので、以下、モデルにかんする記述は本稿での問題にかかわる限りで最小限度にとどめる<sup>2)</sup>。

ワイツマンは、Hotelling - Lancaster - Salop 流の製品差別化モデル<sup>3)</sup>を用いて独占的競争市場モデルを構築している。そこでは、同種の財の間にも質的な差異〔これを財特性 (attributes) の差異と呼ぶ〕が存在し、消費者は様々な異なった財の特性のうちで最も自己の理想に近い特性を選好し、各企業は各々ほかの企業とは異なった特性を生産することにより、自己の市場を確保しようとする。こうした状況の下で、企業が価格を戦略変数として競争を行う場合を考察したのが、Weitzman (1982) のモデルである。Weitzman (1991) のモデルとそれ以前のモデルとの違いは、製品の用途上のまたは質的な多面性 (versatility ; バーサティリティ) を、企業が操作可能な変数であると解釈し、製品差別化が存在する場合の効用関数と個別企業レベルの費用関数を定義する際にバーサティリティを変数として組み込んだ点にある。ワイツマンはこうし

---

1) Weitzman (1991) 以前のワイツマン・モデルにかんする文献に以下のものがある。

Weitzman (1982), Meade (1986), Solow (1986).

2) 詳しくは、Weitzman (1991) および拙稿 (1993) を参照されたい。

3) Hotelling (1929), Lancaster (1979), Salop (1979).

た製品差別化モデルの新たな理解と費用関数の独自の定義（ワイツマン型費用関数）により，独占的競争市場均衡において規模にかんする収穫逓増の社会的生産関数を導出したのである<sup>4)</sup>。

本稿の目的は，Weitzman（1991）とは逆に，ヴァーサティリティを導入したワイツマン型製品差別化効用関数とそのもとでの独占的競争市場均衡条件および規模にかんする収穫逓増の社会的生産関数から，ワイツマン型費用関数と同じ性質を持つ費用関数を導出することである。

## 2. 製品差別化モデル

Weitzman（1991）で用いられた製品差別化モデルは，「市場の環状道路モデル（circular road model）」と呼ばれるものであるが，それは次の（i）から（xii）の諸仮定からなる。すなわち，

- （i）消費者は財の特性を選択する。
- （ii）財特性は円周上に分布する（この円を特性円と呼ぶ）。
- （iii）特性円の各点には異なる特性が分布する。
- （iv）消費者は自分が最も理想とする特性を示す円周上の点に立地し，その点で最も効用が高い。
- （v）消費者が得る効用は消費者の立地点と実際に購入する特性を示す点との弧形の距離にしたがって減少する。
- （vi）消費者は特性円上に一様に分布し，特性に対して次元の選好順序を持つ（簡単化のための仮定）。
- （vii）効用の減少が距離に対して指数的に生ずるとして，財1単位あたり得られる効用を次のように定める。すなわち，

---

4) Weitzman (1982), Meade (1986), Solow (1986) では，ここで変数として扱われているバーサナリティは単なる定数であり，また技術は費用関数ではなく個別企業レベルの規模にかんする収穫逓増生産関数で与えられている。

$$(1) \quad u(h) = e^{-\frac{h}{2v}}, \quad v > 0.$$

ここに、 $h/2$  は消費者の立地点と彼または彼女が実際に購入する特性との弧形の距離を表す。

$v$  はワイツマンによってバーサティリティと名付けられた変数である。これは従来の製品差別化モデルにおいては定数として扱われてきた。式の形からわかるように、ある企業（またはその企業が生産する製品の特性）と消費者との距離が一定の場合、企業がバーサティリティ  $v$  の値を大きくすれば、消費者がその企業の生産する特性から得る効用は大きくなる。このことは、ある企業が生産する特性が、より多くの消費者の嗜好に対応できるということであり、製品の質が多面的なものとなることと理解できる。逆に、企業がバーサティリティ  $v$  の値を小さくすることは、企業が質的に限定された単純な製品の生産または限られた種類の製品の生産へ専業化していくことを意味している。このとき、一定の距離にいる消費者がその企業の生産する特性から得る効用は小さくなる。企業数は製品のバラエティーの数に等しく、

(viii)  $n$  (有限) 個の対称的企業が生産を行うものとする。

各企業は自己の市場を確保するためにできるだけ隣接企業から離れようとする（できるだけ他の企業とは異なった特性を生産しようとする）ので、均衡状態のもとでは、各企業は円周上に等間隔に立地することになる。特性円の円周の長さを  $H$  とすれば、均衡下で 1 企業が確保できる市場の範囲は  $H/n$  となる。

(ix) 均衡下で各企業は同一の量と価格で販売し、各企業は価格とバーサティリティとを戦略変数として競争するものとする。

$n$  個の企業のうち、 $n-1$  個の企業の価格とバーサティリティをそれぞれ  $p^*$ ,  $v^*$  とし、ある企業  $a$  が価格とバーサティリティをそれぞれ  $p$ ,  $v$  に変化させたとする。企業  $a$  は自らの隣り合う企業と市場内の消費者をめぐって競争を行う。2つの企業の市場の境界上の消費者 (marginal consumer; 限界消費者) にとって2つの企業が生産する特性が無差別である条件は、消費者が実際に得る効用の実質値が等しくなることであり、

$$(2) \quad \frac{e^{-\frac{h}{2v}}}{p} = \frac{e^{-\frac{H}{n} - \frac{h}{2}}}{p^* v^*}$$

と表せる。(2)を対数変換し、距離  $h$  を価格  $p$  とバーサティリティ  $v$  の関数として表すと、

$$(3) \quad h(p, v) = \frac{\frac{H}{nv^*} - \log p + \log p^*}{\frac{1}{2v} + \frac{1}{2v^*}}.$$

(x) 企業 a の製品に対する需要量を  $d$  とし、それが価格  $p$  とバーサティリティ  $v$  の関数であるとする [ $d(p, v)$ ].

(xi) 市場に支出される総所得を  $I$  で表し、単純化のために所得は特性円上に一様に分布するものと仮定する。

このとき、企業 a の製品に対する需要は、

$$(4) \quad d(p, v) = \frac{I h(p, v)}{p H}.$$

ここに、 $I/p$  は実質総支出、 $h(p, v) / H$  は企業 a の市場シェアである。われわれは、製品差別化モデルにおける均衡状態のもとで得られる費用関数の性質について知りたいので、1 企業の産出量を  $y$  とし、個別企業レベルの需給一致 ( $y = d$ ) を仮定する。

(xii) 各企業の費用  $c$  は産出量  $y$  とバーサティリティ  $v$  の関数であると仮定し、

$$(5) \quad c(y, v)$$

とする。

このとき各企業の利潤を  $\pi$  とすると、

$$(6) \quad \pi = p d(p, v) - c(d(p, v), v).$$

価格  $p$  にかんする利潤最大化の 1 階の条件は、 $E$  を需要の価格弾力性とする  
と、

$$(7) \quad p = \frac{E}{E-1} \cdot \frac{\partial c}{\partial d} .$$

(7) 式は, (4) 式を使って計算してナッシュ均衡 (すなわち  $p = p^*$ ,  $v = v^*$ ) で評価すると, 次のようになる.

$$(8) \quad p = \left( 1 + \frac{H}{nv} \right) \frac{\partial c}{\partial d} .$$

バーサティリティ  $v$  にかんする利潤最大化の 1 階の条件は,

$$(9) \quad p = \frac{\partial c}{\partial d} + \frac{\frac{\partial c}{\partial v}}{\frac{\partial d}{\partial v}} .$$

ここで, 需要のバーサティリティ弾力性  $E_v$  を,

$$E_v = \frac{\partial d}{\partial v} \cdot \frac{v}{d}$$

と定める. 需要のバーサティリティ弾力性  $E_v$  を (4) 式を使って計算し, ナッシュ均衡で評価すると,

$$(10) \quad E_v = \frac{I}{2 n p y} .$$

均衡では, 個別企業の利潤はゼロ [ $p y = c(y, v)$ ] になり, 社会全体の投入財から得られる総所得  $X$  (ただし投入財  $X$  をニューメレールとしてその価格を 1 とする) と国民総生産  $n p y$  が等しくなる ( $n p y = X$ ). さらに, 均衡状態では, 総支出  $I$  は総所得  $X$  に等しくなる. これらのことを (10) 式において考慮すれば,  $E_v = 1/2$  となり, (9) 式は次のように書き換えられる.

$$(11) \quad p = \left( 1 + \frac{2v}{y} \cdot \frac{\frac{\partial c}{\partial v}}{\frac{\partial c}{\partial d}} \right) \frac{\partial c}{\partial d} .$$

### 3. ワイツマン型費用関数の導出

以上では、Weitzman (1991) における議論にしたがったが、そこでワイツマンは、費用を一定とするときに製品の産出量とバーサティリティとの間にトレードオフ関係が存在する個別企業レベルの費用関数を  $c(y, v) = \phi(yv^a)$  と定義し (ワイツマン型費用関数)、独占的競争市場均衡状態において、社会的生産関数が規模にかんして収穫逓増になることを示した。ワイツマン型費用関数の特徴は、費用のバーサティリティにかんする弾力性と費用の産出量にかんする弾力性との比率が  $a$  になる点にあるが、このことは費用を一定とするときバーサティリティが 1% 低下すれば、産出量は  $a$ % 増加すること、すなわち企業がその生産を 1% 専業化させれば費用一定のもとでも産出量は  $a$ % 増加することを意味している。

以下では、ワイツマンのように費用関数を定義することなく、費用が産出量とバーサティリティの関数であるだけ仮定したときに、独占的競争市場均衡条件のもとで導出される費用関数が、ワイツマン型費用関数と同様に、バーサティリティと産出量のあいだでトレードオフ関係を持つことを示そう。バーサティリティにかんする費用の弾力性と産出量にかんする費用の弾力性の比率を  $\varepsilon$  と書くことにすると、

$$\varepsilon \equiv \frac{\frac{\partial c}{\partial v} \cdot \frac{v}{c}}{\frac{\partial c}{\partial y} \cdot \frac{y}{c}} .$$

個別企業レベルで常に需給一致が実現する均衡状態においては  $y = d(p, v)$  であることに注意すれば、(8)、(11) 式より、

$$(12) \quad \varepsilon = \frac{H}{2nv} .$$

(12) 式は、費用がバーサティリティと産出量の関数であることと (1) 式で定義されるワイツマン型の製品差別化効用関数を用いた独占的競争市場均衡条件から導き出されている点に注意されたい。なお、ワイツマン型費用関数を用

いて計算した場合にも、 $\varepsilon = H / 2 n v$ となる<sup>5)</sup>。

ここで、われわれの議論から得られる費用関数が、実際にワイツマンが定義したそれと同じ性格のものになることをみるために、個別企業レベルの費用関数から規模にかんする収穫逓増の社会的生産関数を導いたワイツマンの議論とは逆に、ワイツマンが導出した型の規模にかんする収穫逓増型の生産関数と独占的競争市場均衡条件から、個別企業レベルの費用関数を具体的に求めてみよう。(12)式より、

$$(13) \quad v = \frac{H}{2 \varepsilon n} .$$

ゼロ利潤条件より、

$$(14) \quad n = \frac{X}{c(y, v)} .$$

(13), (14)式より、

$$(15) \quad v = \left\{ \frac{H c(y, v)}{2 \varepsilon} \right\} \frac{1}{X} .$$

ここで社会的な生産関数を規模にかんして収穫逓増とし、次のように定義する。

$$(16) \quad Y = A X^{1+\sigma}, \quad \sigma > 0 .$$

ワイツマンが導出した生産関数はこのタイプのものである。ここに  $Y$  は実質国民総生産、 $A$  と  $\sigma$  は正定数、 $X$  はこれまでと同様市場全体の要素投入量である。価格  $p$  のかわりに、1 企業の市場内のすべての消費者が得る効用の平均値  $\theta$  で総生産量を評価することによって実質化を行うと、実質国民総生産  $Y =$

5) ワイツマン型費用関数を使って、価格  $p$  とバーサティリティ  $v$  にかんする利潤最大化条件を求めれば、それぞれ、

$$\dot{p} = (1 + H/nv) \phi \cdot (y v^\alpha) v^\alpha$$

$$p = (1 + 2a) \phi \cdot (y v^\alpha) v^\alpha$$

となる。両式の右辺を比較して  $a = H / 2 n v$  を得る。詳しくは Weitzman (1991) pp. 10-12. および拙稿 (1993) p. 47.

$n y \theta$ となる<sup>6)</sup>.

(14), (15) 式を (16) 式に代入すると,

$$(17) \quad y = \frac{A}{\theta} \left(\frac{H}{2 \varepsilon}\right)^\sigma c^{1+\sigma} v^{-\sigma}.$$

したがって,

$$(18) \quad c(y, v) = \left\{ \frac{\theta}{A} \left(\frac{2 \varepsilon}{H}\right)^\sigma \right\}^{\frac{1}{1+\sigma}} (y v^\sigma)^{\frac{1}{1+\sigma}}$$

以上で, 社会的生産関数 (15) から個別企業レベルの費用関数が導出された.

$$\frac{\frac{\partial c}{\partial v} \cdot \frac{v}{c}}{\frac{\partial c}{\partial y} \cdot \frac{y}{c}} = \sigma$$

であり,  $\varepsilon$  が一定であれば, 導出された費用関数 (18) は, ワイツマンが規模にかんする収穫増生産関数を導出する際に定義した個別企業レベルのワイツマン型費用関数と同型のものであることがわかる.

(16) 式で  $\sigma \rightarrow 0$  とすれば, 生産関数は古典的な規模にかんする収穫一定のケースになるが, このときに得られる費用関数には産出量とバーサティリティのトレードオフが存在せず, 費用が産出量のみ関数になりかつ産出量に比例するという, 規模にかんする収穫一定の生産関数に対応する古典的な費用関数になる.

(8) 式より, 独占的競争市場均衡においては,  $p = (1 + 2 \varepsilon) \partial c / \partial y$ ,  $\varepsilon > 0$  であるが, そのとき通常技術的に容認できる  $\partial c / \partial y > 0$  の場合には, (11) 式より,  $\partial c / \partial v > 0$  となる. すなわち, 産出量  $y$  とバーサティリティ

6) 平均効用  $\theta$  は次式で与えられる.

$$\theta = \frac{\int_0^{\frac{H}{2n}} e^{-\frac{h}{v}} dh}{\frac{H}{2n}} = \frac{1 - e^{-\sigma}}{\sigma}.$$



$v$  の増加はどちらも費用を増加させる方向で作用する。したがって、費用一定という条件のもとでは、バーサティリティ  $v$  と産出量  $y$  とは逆方向へ変化する。費用一定という条件下でも、企業がバーサティリティ  $v$  を低下させれば、すなわち生産を専業化すれば、産出量  $y$  は増加するし、逆に同じ条件のもとでバーサティリティを上昇させれば、産出量は減少せざるを得ない。そして、このときのバーサティリティ  $v$  の 1% の低下（または上昇）に対応する産出量  $y$  の増減率（または減少率）は、われわれが得た費用関数（18）においては  $\sigma\%$  である。

問題にしている市場が独占的競争状態になく、完全競争市場の場合には、 $p = \partial c / \partial y$  (= 限界費用) であり、 $\varepsilon = 0$  であるから、産出量とバーサティリティの間にはトレードオフはなく、(18) 式で言えば、 $\sigma = 0$  になる。したがって、産出量とバーサティリティとのトレードオフの存在は、市場が独占的競争状態で均衡しているということに大きく依存しているといえる。

## 5. 小 結

最後に、いくつかの注意を与えておきたい。その第 1 は、ワイツマン・モデルにおいてはワイツマン型の個別企業レベルの費用関数の定義から社会的な規模にかんする収穫逓増生産関数（16）が導出され、逆に本稿では社会的生産関数（16）から個別企業レベルのワイツマン型費用関数（18）を導出したわけだが、このことは、Weitzman (1991) で仮定された費用関数が決して *ad hoc* なものではないことを裏付けているということである。第 2 点目は、われわれが仮定しワイツマンが導出した社会的生産関数が規模にかんする収穫逓増型であるということは、社会的分業による利益が存在するということであるが、このことを個別企業レベルでみると、各企業が限られた種類の（低いバーサティリティの）製品の生産に専業化することが利益をもたらすということ、すなわちわれわれが導出しワイツマンが仮定した個別企業レベルの費用関数の性質と

して理解できるということである。そして最後に、社会的分業による利益ないしは個別企業の專業化による利益の存在は市場経済の出発点であり、こうした問題にかんする散文的記述はたびたびなされたが、数理経済学的モデルによる分析はこれまでみられなかったことを知る必要があるということである。

## (文 献)

- Hotelling, H. (1929). "Stability in Competition." *Economic Journal*, vol. 39. pp. 41-57.
- 石川 健 (1993) 「現代市場の一般モデルー独占的競争を中心にしてー」  
『比較経済体制学会会報』第31号, pp. 44-49.
- Lancaster, K. (1979) . *Variety, Equity, and Efficiency*, Columbia University Press.
- Meade, J. E. (1986). *Alternative Systems of Business Organization and of Workers' Remuneration*, Chap. 2, Allen & Urwin.
- Salop, S. C. (1979). "Monopolistic Competition with Outside Goods," *Bell Journal of Economics*, vol. 10, pp. 141-56.
- Solow, R. M. (1986). "Monopolistic Competition and the Multiplier," in W. P. Heller, R. M. Starr and D. A. Starret eds., *Equilibrium Analysis: Essays in Honor of Kenneth J. Arrow*, vol. 2, pp. 301-315.
- Weitzman, M. L. (1982). "Increasing Returns and the Foundation of Unemployment Theory," *Economic Journal*, 92, December, pp. 787-804.
- Weitzman, M.L. (1984). *The Share Economy*, Harvard University Press.  
(林 敏彦訳『シェアエコノミー』岩波書店)
- Weitzman, M. L. (1991). "Volume, Variety, and Versatility in Growth and Trade," *Discussion Paper*, No. 1535, January, Harvard Institute For Economic Research.