MathematicaによるIS-LM分析

野　田　哲　夫

はじめに

本稿は，現在スーパー・コンピュータからパーソナル・コンピュータまで広範囲で普及している数式処理アプリケーション・ソフトMatehematicaを使い経済学の基礎的な理論のプログラミングを試みた拙稿「Matehematicaによる経済学」(『経済科学論集　第19号』所収）の続編にあたるものである。「Mathematicaによる経済学」においてはMathematicaによりマクロ経済学における＜国民所得決定の乗数理論＞や＜加速度原理にもとづく投資関数と景気循環モデル＞のプログラミングとグラフィック化や，ミクロ経済学の基礎となる価格理論の＜予算制約下における２財の消費均衡＞のプログラミング等を試みた[注1]。そして，その後も経済学教育におけるコンピュータ利用の普及は目覚ましいものがあり，表計算ソフトを利用した計量分析は当然のものとなったが，[注2]特にMathematica利用に関しても，現在MacPower誌連載中の中村勝平「たかがMathematica」において拙稿の＜国民所得決定の乗数理論＞に計量分析的な要素を加えて発展させる形でプログラミングがされている。[注3]また，深谷庄一『コンピュータ・エコノミクス』ではC言語を使いミクロ理論を中心に経済学の基礎理論の全般的なプログラミングがされている。[注4]

そこで本稿では，「Mathemticaによる経済学」のマクロ理論の部分を発展させる必要があるので，マクロ経済分析の核心部分となる財市場と貨幣市場の経済の調整メカニズム（IS-LM分析）のプログラミングを試みたい。[注5]

[注1]詳しくは拙稿「Mathematicaによる経済学」(『経済科学論集　第19号』1993年所収）を参照。

[注2]表計算ソフトを利用した経済理論のプログラミングでは，前稿でも紹介した大沢豊，田中克明『経済・経営分析のためのLotus1-2-3』(1990，有斐閣）の他，浅利一郎『経済学のための「Lotus1-2-3」』(1991，青木書店)，大藪和雄・安井修二他『経済学1-2-3　Lotus1-2-3を使った経済学入門』(1992，日本評論社）などの他，現在『経済セミナー』(日本評論社）に連載中のApple社のパーソナ

第1節　IS-LM曲線の導出

前稿「Mathematicaによる経済学」では総需要曲線から均衡国民所得の決定をプログラミングしたが，これは実物経済＝財市場に限った均衡方程式であり貨幣市場の側面は捨象されている。そこで前回の扱った財市場のモデルに貨幣市場を導入することによってマクロ経済の一般的な均衡式であるIS-LMモデルが作られる。　まず，この均衡式を単純化した形で表示すると

$$I(R)=S(Y,R) \qquad (1)$$

$$M=P\times L(Y,R) \qquad (2)$$

（Iは投資，Sは貯蓄，Yは実質国民所得，Rは利子率，Mは貨幣供給量，Pは一般物価水準，Lは実質貨幣需要）

（1）式は財市場での均衡条件式を示し，利子率と実質国民所得を変数として貯蓄と消費が均衡していることを表している。（2）式は貨幣市場の均衡条件式を示し，利子率と実質国民所得の他に一般物価水準を変数として貨幣市場が均衡していることを表している。この連立方程式では2個の方程式に対して変数が3個存在するため，これを解くにはさらにもう一つの方程式が必要となる。

ケインズ以前の古典派経済学においては貨幣が実体経済のヴェールであると考えられていたため（1）式と（2）式を分離する，いわゆる古典派二分法が考えられてきた。そこで実質国民所得を所与とし数式的には

$$Y=Y_0 \qquad (3)$$

が導入され（3）式（1）式に代入することによって財市場を均衡させる利子

ル・コンピュータMacintoshを利用した笹山茂「MACで入門！経済学」や高橋克秀「MACで実践！統計学」などがある。

注3 中村勝平「たかがMathemetica」(『MacPower』所収，アスキー社，1993-1994)

注4 深谷庄一『コンピュータ・エコノミクス』(日本評論社，1992)

注5 このIS-LM分析に関しては，前掲の「MACで入門！経済学」の連載第8回「IS-LM分析をマックで」(『経済セミナー』) 1994年3月号収）において，表計算ソフト，マイクロソフト・エクセルを利用したプログラミングとIS-LM曲線の描写がなされているが，表計算ソフトではリニアプログラミングができないため財市場と貨幣市場の均衡式を解く連立方程式の解法がプログラムの前提となってしまう（逆に言えば連立方程式を卓上で解いた後にプログラミングしなければならない)。

率R_0が決定され，このR_0を（2）式に代入すると物価水準P_0が決定されることになる。すなわち（2）式において貨幣供給Mの増減は財市場に影響することはなく，物価水準を増減させるだけになるのである。

これに対してケインズ経済学では

$$P=P_0 \qquad (4)$$

を導入することによって，（1），（2）式を財市場と貨幣市場の同時決定式と見るのである。すなわち（1）式は財市場の均衡を実現させる利子率Rと国民所得Yの組合せを示すIS曲線となり，（2）式は貨幣市場の均衡を実現させる利子率Rと国民所得Yの組合せを示すLM曲線となるのである。そして，このIS曲線とLM曲線から均衡利子率R_0と均衡実質国民所得Y_0が決定されるのである。[注6]

この連立方程式をMathematicaのSolve 関数を用いてプログラミングし，IS-LM曲線をグラフィック化してみよう。

まず財市場における均衡式であるが，投資をINV，貯蓄をSAV，利子率をRAT，実質国民所得Yとして投資関数と貯蓄関数を

$$INV=a^{*}RAT+b \qquad (5)$$

$$SAV=c^{*}RAT+d^{*}Y \qquad (6)$$

と定義する（a,b,c,dはそれぞれ定数）。

財市場における均衡は投資と貯蓄が均衡するINV＝SAVとなるところで利子率RATと実質国民所得Yが決定されるのであるからこれに

$$INV=SAV \qquad (7)$$

を加えた連立方程式を解けばよい。

Mathematicaでは方程式の解法にSolve関数を使うが，[注7]連立方程式を解く場合はまず下記のように連立方程式をEqn1として定義して，Solve関数によっ

[注6]もちろんケインズ自身が考えたのはこのような単純な均衡方程式ではなく，IS-LM分析はその後の新古典派総合のマクロ経済学教科書によって単純化されたものであり，それに対する批判，ケインズ自身の再評価もあるが，本研究ノートではまず均衡方程式のプログラミングを前提としているためここではこれらの論争には触れない。

[注7]Solve関数の詳しい定義については拙稿「Mathematicaによる経済学」204頁を参照されたい。

てSolve[式,{未知数}]／／ExpandAllとすれば結果が得られる。

これをMathematica上でまとめてプログラミング化すると，

```
Eqn1={INV==a*RAT+b,
      SAV==INV,
      SAV==c*RAT+d*Y};

      a=-10
      b=200
      c=5
      d=0.5

 Soln1=Solve[Eqn1,{RAT,SAV,INV}]//ExpandAll
-10
200
5
0.5
```

$$\{\{RAT->\frac{40}{3}-0.0333333Y,\ SAV->\frac{200}{3}+0.333333Y,$$

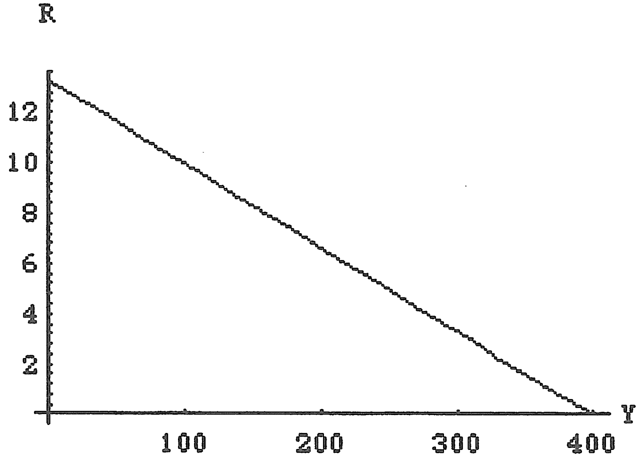
$$INV->\frac{200}{3}+0.333333Y\}\}$$

となる。

ここで得られたRAT－＞40／3－0.033333Yが財市場における均衡を達成させる利子率RATと実質国民所得Yの組み合わせであり，これをグラフィック化すればIS曲線となる。

そこでR1[y__]:＝(40／3)－0.33333*yとして関数定義しPlot関数によってグラフィック化を行ってみる。

```
R1[y__]:=(40/3)-0.0333333*y
Plot[{R1[Y]},
     {Y,0,400},
     AxesLabel->{"Y","R"}
     ]
```



－Graphics－

次に貨幣市場における均衡であるが，ケインズ経済学においては貨幣供給は外生的となるが，貨幣需要に関しては貨幣それ自体の性質とは異なる貨幣需要者の選考態度を重視した貨幣保有の動機がこれに取り入られる。すなわち，通常貨幣の機能としては，①計算単位としての機能，②交換手段としての機能，③価値貯蔵手段としての機能の3つの機能がある。古典派経済学ももちろんこれらの貨幣の機能を重視し，貨幣が現実経済の中で果たしている役割を重要視していたからこそ，金本位性によって貨幣価値を安定させようとしたのである。しかしながら，その場合も貨幣の供給は利子率の変更を通じて財市場の均衡に影響を与えることはなく，物価水準に影響するだけであると見られていた。

これに対してケインズは取引的動機と予備的動機，投機的動機による貨幣需要を貨幣市場の均衡式に導入し，この貨幣市場における均衡が所得と利子率を変化させることによって財市場における均衡条件式に影響を与えることを理論

化したのである。

まず，取引的動機による貨幣需要であるが，経済主体が日常の取引に際して受取と支出のギャップを埋めるために支払手段としての貨幣を常に手元においておくための貨幣需要である。これは一般的に所得水準に依存しているため，所得の関数となる。この貨幣需要をL1，実質国民所得をYとすると

$$L1=p^{*}Y \qquad (8)$$

が得られる（以下，p,q,rは定数)。

次に，予備的動機による貨幣需要であるが，これは将来の取引の不確実性や不意の支出に遭遇したときのため，また有利な購入の好機に備えるための貨幣保有の動機であり，ケインズ自身はこれを中心的な動機と考えたのである。しかしながら，現在ではこれは将来の資産選択と関連するため次の投機的動機による貨幣需要に含めて考えられる。

その投機的動機による貨幣需要は，将来収益を生み出す様々な金融資産に対して人々がその資産に投機せずに手元に貨幣を持つのは，それ以上の収益を生み出すかもしれない資産への投機のために現在の資産との選択において「予備的」に貨幣が必要だからである。これは金融資産の収益性との選択になるため利子率の関数となる。この貨幣需要をL2，利子率をRATとすると

$$L2=q^{*}RAT+r \qquad (9)$$

が得られる。

そこで，全体的な貨幣需要をL，外生的に決まる貨幣供給をM=M1として貨幣市場における均衡式

$$M=L \qquad (10)$$

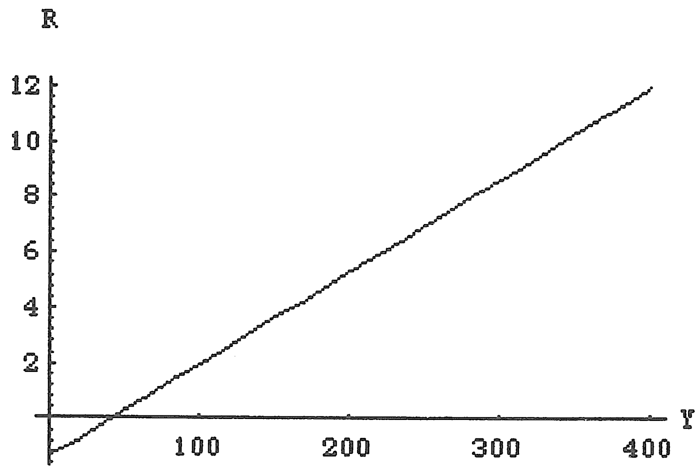
を解く連立方程式Eqnをプログラミングし，財市場における均衡式同様に表示すると以下のようになる。

```
Eqn2={L1==p*Y,
      L2==q*RAT+r,
      L==L1+L2,
      M==L,
```

```
    M==M1};

    p=0.5
    q=-45
    r=180
    M1=200
Soln2=Solve[Eqn2,{RAT,L1,L2}]//ExpandAll
{{L2->200. -0.5Y, L1->0.5Y,
  RAT->-1.33333+0.0333333Y}}
```

この，RAT->-1.33333+0.0333333Yが貨幣市場における均衡を達成させる利子率RATと実質国民所得Yの組み合わせであり，これをグラフィック化すればLM曲線となる。これも財市場同様に行うと，

```
R2[y_]:=-1.33333+0.0333333*y
Plot[{R2[Y]},
    {Y,0,400},
    AxesLabel->{"Y","R"}
    ]
```



－Graphics－
と表示される。

ケインズ経済学では上述のように財市場における均衡と貨幣市場における均衡が相互依存的にリンクされているので，最後に両者を連立させればマクロ的な均衡状態における利子率と実質国民所得との実数として導出が可能であり，IS-LM曲線のグラフィック化が可能である。

まず，実数の導出は

```
Eqn3＝{RAT＝＝R1[Y],
      R1[Y]＝＝R2[Y]}
Soln3＝Solve[Eqn3,{RAT,Y}]//ExpandAll
```

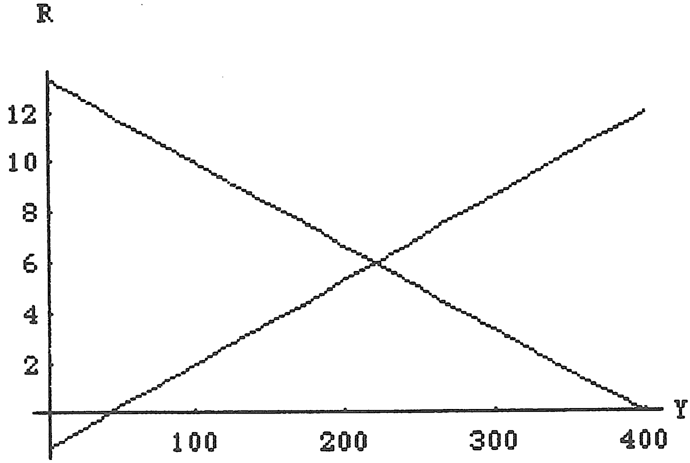
$$\{RAT = \frac{40}{3} - 0.0333333Y, \ \frac{40}{3} - 0.0333333Y == -1.33333 + 0.0333333Y\}$$

```
{{RAT－>6., Y－>220.}}
```

でなされ，最後の6が均衡利子率，220が均衡実質国民所得である。

次にIS-LM曲線は，

```
Plot[{R1[Y],R2[Y]},
     {Y,0,400},
     AxesLabel－>{"Y","R"},
     PlotPoints－>200,
     PlotStyle－>
     {{GrayLevel[0.0]},
      {GrayLevel[0.4]}}
     ]
```



－Graphics－
で表示される。

第２節　財政政策と金融政策の効果のシュミレーション

ここでは第１節で得られたIS-LM曲線をもとに，財政政策と金融政策が利子率と実質国民所得に与える効果を数値的，またグラフィック上表示してみよう。

まず第１節における均衡状態から，公共投資を始めとする財政支出の拡大があった場合を想定する。これは，財市場における均衡式（Eqn1）において投資支出がbの他にdbの増加があったと考えればよい。これをプログラミングし，その場合の利子率RATと実質国民所得Yの組み合わせを求めると，

```
Eqn4＝{INV＝＝a*RAT＋b＋db2,
        SAV＝＝INV,
        SAV＝＝c*RAT＋d*Y};

        a＝－10
        b＝200
```

```
db=50
c=5
d=0.5
```

```
Soln4=Solve[Eqn4,{RAT,SAV,INV}]//ExpandAll
```

−10

200

50

5

0.5

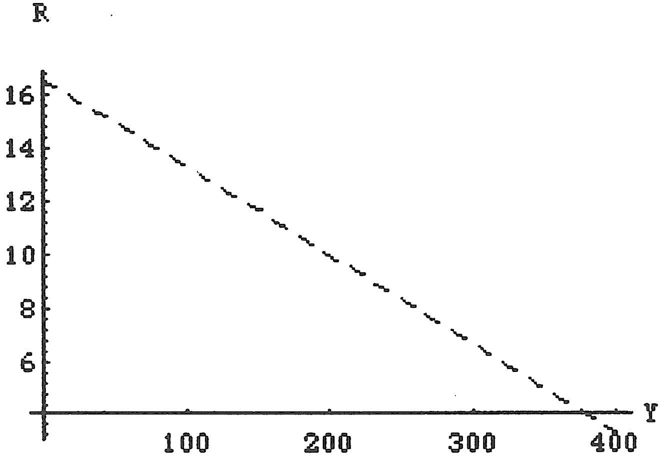
$$\{\{RAT->\frac{50}{3}-0.0333333Y,\ SAV->\frac{250}{3}+0.333333Y,$$

$$INV->\frac{250}{3}+0.333333Y\}\}$$

となる。

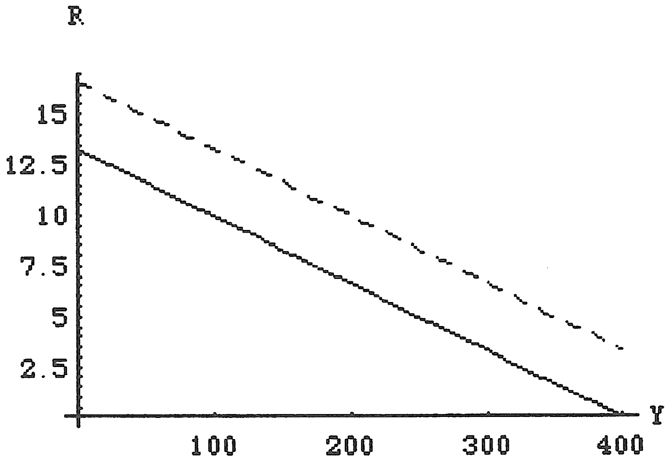
これをグラフィック表示すると，

```
R3[y_]:=(50/3)-0.0333333*y
Plot[{R3[Y]},
    {Y,0,400},
    AxesLabel->{"Y","R"},
    PlotStyle->
    {Dashing[{0.025,0.025}]}
    ]
```



となり，初期均衡の状態に比べて財政支出があった場合のIS曲線のシフトは以下のように表示される。

```
Plot[{R1[Y],R3[Y]},
{Y,0,400},
        AxesLabel->{"Y","R"},
        PlotStyle->
        {{GrayLevel[0.0]},
          {Dashing[{0.025,0.025}]}}
        ]
```



－Graphics－

そして，貨幣市場の均衡に変化がなかったと仮定すると，新たな均衡状態における利子率RATと実質国民所得Yの組み合わせは，前節と同様の式によって，

```
Eqn5={RAT==R3[Y],
      R3[Y]==R2[Y]}
Soln5=Solve[Eqn5,{RAT,Y}]//ExpandAll
```

$$\{RAT==\frac{50}{3}-0.0333333Y,$$

50

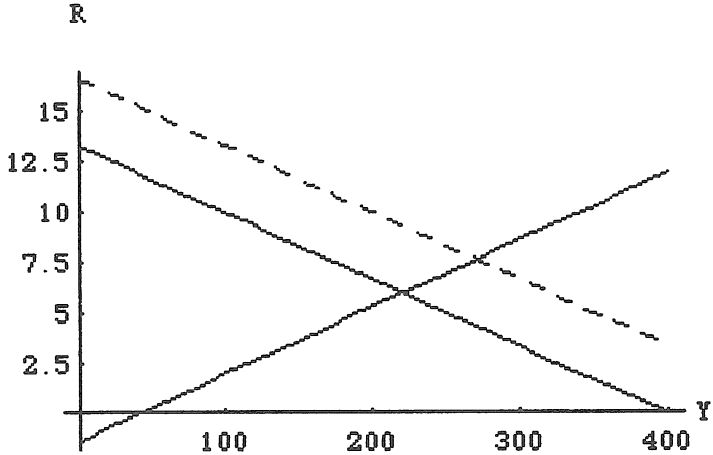
－0.0333333Y＝＝－1.33333＋0.0333333Y}

3

{{RAT－＞7.66667, Y－＞270.}}

となり，初期の均衡状態（利子率＝6，実質国民所得＝220）に比べて，財政支出によって利子率と実質国民所得がそれぞれ上昇したことが明らかになり，これをグラフィック上に表示すると以下のようになる。

```
Plot[{R1[Y],R2[Y],R3[Y]},
    {Y,0,400},
    AxesLabel->{"Y","R"},
    PlotStyle->
    {{GrayLevel[0.0]},
    {GrayLevel[0.4]},
    {Dashing[{0.025,0.025}]}}
    ]
```



－Graphics－

同様に，貨幣供給量を増加させて金融を緩和させた場合の均衡状態の変化もプログラミングができる。

まず，前節における貨幣市場の(Eqn2)において，外生的な貨幣供給がM1に加えてM2に増加した場合を考える。

```
Eqn6={L1==p*Y,
        L2==q*RAT+r,
        L==L1+L2,
        M==L,
        M==M1+M2};


        p=0.5
        q=-15
        r=180
        M1=200
        M2=50
Soln6=Solve[Eqn6,{RAT,L1,L2}]//ExpandAll
0.5
```

86

−15

180

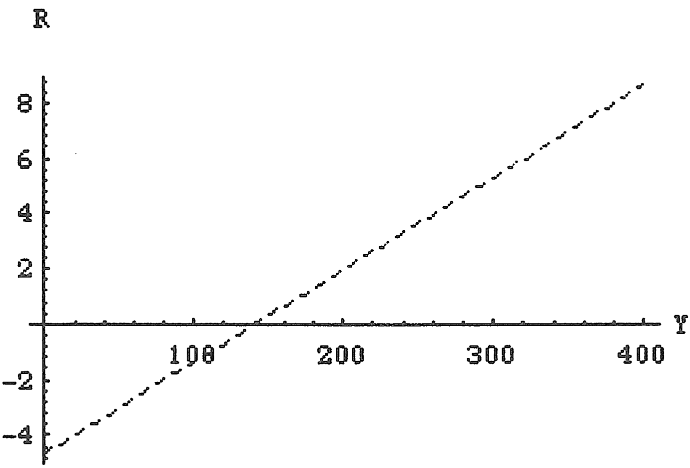
200

50

{{L2−>250. −0.5Y, L1−>0.5Y,
RAT−>−4.66667+0.0333333Y}}

次に，この場合のLM曲線は以下のように表示され，

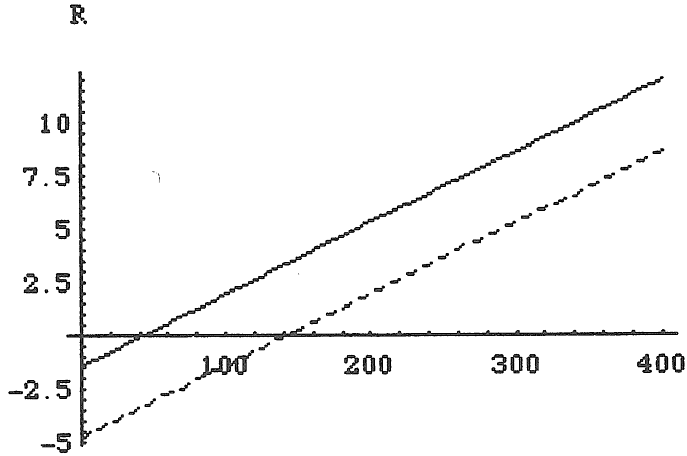
```
R4[y_]:=−4.66667+0.0333333*y

Plot[{R4[Y]},
     {Y,0,400},
     AxesLabel−>{"Y","R"},
     PlotStyle−>
     {Dashing[{0.015,0.015}]}
     ]
```



−Graphics−

初期の均衡状態からのシフトは，

```
Plot[{R2[Y],R4[Y]},
        {Y,0,400},
        AxesLabel->{"Y","R"},
        PlotStyle->
        {{GrayLevel[0.4]},
         {Dashing[{0.015,0.015}]}}
        ]
```



－Graphics－

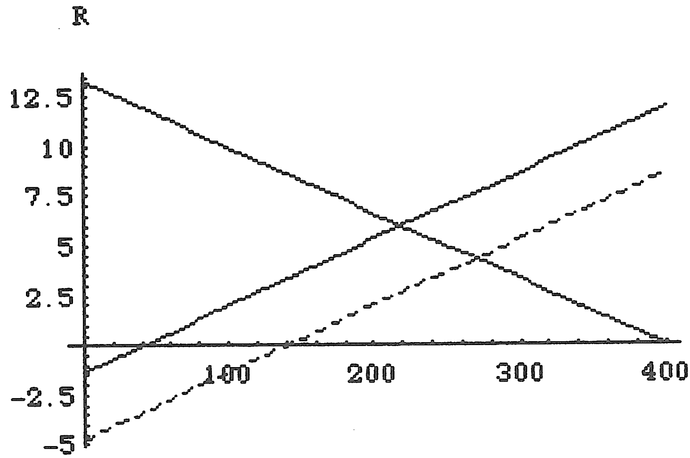
となる。

そして，この状態における利子率RATと実質国民所得Yの組み合わせを求めると，

```
Eqn7={RAT==R4[Y],
          R4[Y]==R1[Y]}  Soln7=Solve[Eqn7,{RAT,Y}]//ExpandAll
{{RAT  ==-4.66667+0.0333333Y,
                                        40
  -4.66667+0.0333333Y==-0.0333333Y}
                                        3
```

{{RAT－＞4.33333, Y－＞270.}}
となり，初期の均衡状態（利子率＝6，実質国民所得＝220）に比べて，金融緩和によって利子率が低下し実質国民所得が上昇したことが明らかになり，これをグラフィック上に表示すると以下のようになる。

```
Plot[{R1[Y],,R2[Y],R4[Y]},
    {Y,0,400},
    AxesLabel->{"Y","R"},
    PlotStyle->
    {{GrayLevel[0.0]},
     {GrayLevel[0.4]},
     {Dashing[{0.015,0.015}]}}
    ]
```



－Graphics－

このように，単純なモデル上ではあるが，財政支出と金融緩和という外生的な経済政策の影響によって国民所得が同様に増加するが（モデルを単純化するため物価水準の変化は捨象してある）財政支出の拡大は投資－貯蓄バランスを変化させることによて利子率を上昇させていることがわかる。これは，財政支

出の拡大が投資-貯蓄バランスを変化させ民間の資金需要を逼迫させるためであり，いわゆるクラウディングアウト効果と呼ばれるものである。[注8]

これを数式的に明らかにすると，財市場と貨幣市場の両市場における均衡に財政支出が果たす役割を抽出するために，以下のM2＝0として以下の連立方程式を解くと，

```
Eqn8={INV==a*RAT+b+db,
      SAV==INV,
      SAV==c*RAT+d*Y,
      L1==p*Y,
      L2==q*RAT+r,
      L==L1+L2,
      M==L,
      M==M1+M2};

      a=-10
      b=200
      c=5
      d=0.5
      p=0.5
      q=-15
      r=180
      M1=200
```

[注8]新新古典派（マネタリスト）などは財政支出の拡大による景気刺激策の有効性を否定する。これはたとえ国債発行によって政府支出を拡大しても、国債発行が資本市場での資金調達であるために、金利を引き上げて民間資金需要を追い出してしまうためである。すなわち、資本市場では国債発行が金利を引き上げ、これによって民間での投資水準が低下して民間の資金調達が減少することになる。クラウディングアウトが起こるかどうかは国債発行による金利を引き上げるの水準、民間の資金需要の金利への影響にかかわる。高度経済成長期には、日本の金融市場は、金利が固定的に運営されてきたためにクラウディングアウトは起こらないという議論があったが、今日では、金利が市場で自由に変動するためにクラウディングアウトの可能性が高くなることになる。

```
Soln8=Solve[Eqn8,{RAT,Y}]//ExpandAll
M2=0
{{RAT->6. +0.333333n, Y->220. +db}}
```

となる。

金融政策についても，同式にそのままdb=0を代入すれば，

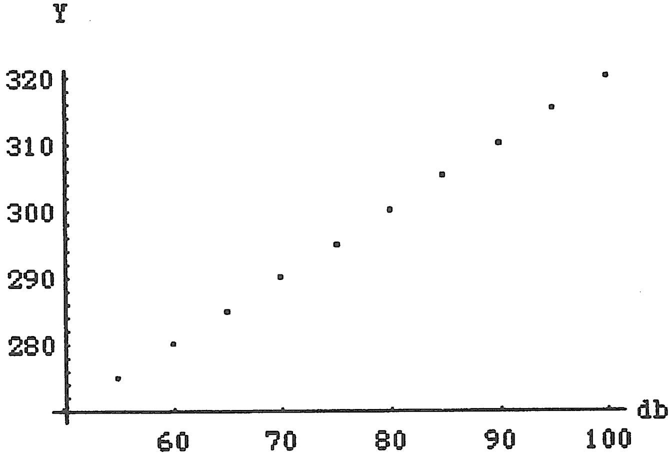
```
db=0
Soln9=Solve[Eqn8,{RAT,Y}]//ExpandAll
{{RAT->6. -0.333333 n, Y->220. +10. M2}}
```

となり，財政・金融政策が利子率RATと実質国民所得Yに与えている効果が数式的にも明らかになる。

ここでも，両政策が実質国民所得Yの増加に与えている影響は同じであるが，利子率RATの増減に対しては逆の効果を与えていることがわかる。

これをグラフィック化すると，実質国民所得については両政策とも以下のようになり，

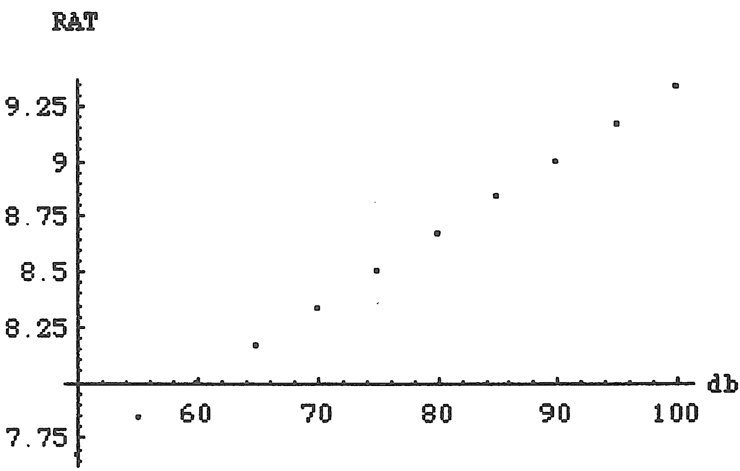
```
f1[x__,y__]:=220+x
fp1=Table[{db,f1[db]},{db,50,100,5}]
gp1=ListPlot[fp1,
                AxesLabel->{"db","Y"}
                ]
{{50, 270}, {55, 275}, {60, 280}, {65, 285}, {70, 290},
  {75, 295}, {80, 300}, {85, 305}, {90, 310}, {95, 315},
  {100, 320}}
```



利子率RAT対して財政支出が与える効果は,

```
f2[x__]:=6+0.0333333x
fp2=Table[{db,f2[db]},{db,50,100,5}]
gp2=ListPlot[fp2,
        AxesLabel->{"db","RAT"}
        ]
```

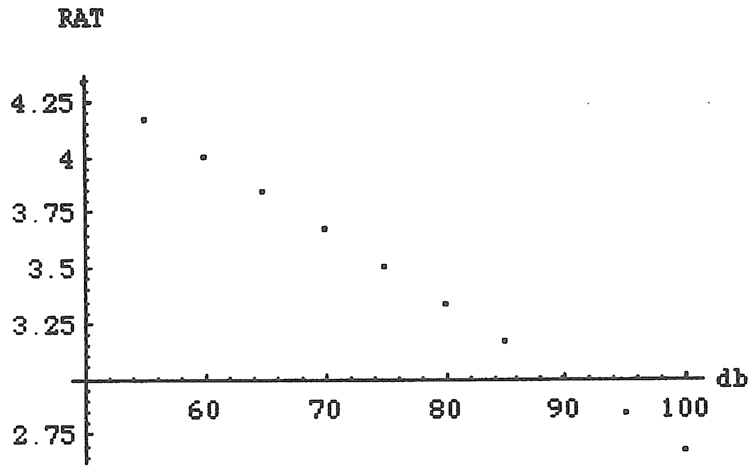
{{50, 7.66667}, {55, 7.83333}, {60, 8.}, {65, 8.16666},
{70, 8.33333}, {75, 8.5}, {80, 8.66666}, {85, 8.83333},
{90, 9.}, {95, 9.16666}, {100, 9.33333}}



逆に金融政策が与える効果は,

```
f3[x_]:=6-0.0333333x
fp3=Table[{db,f3[db]},{db,50,100,5}]
gp3=ListPlot[fp3,
              AxesLabel->{"db","RAT"}
              ]
```

{{50, 4.33333}, {55, 4.16667}, {60, 4.}, {65, 3.83334},
{70, 3.66667}, {75, 3.5}, {80, 3.33334}, {85, 3.16667},
{90, 3.}, {95, 2.83334}, {100, 2.66667}}



と表示される。[注9]

[注9] 貿易収支の変化は税率，税収の変化がマクロ経済のバランスに与える影響も，初期状態の均衡式を加工することによって同様に表示することが可能である。