Mathematicaによる経済学

野　田　哲　夫

はじめに

1980年代以降のパーソナル・コンピュータの普及は教育現場においてもめざましいものがあり，大学の講義においても「情報処理」の講座が理学部や工学部などの理工系の学部だけではなく，人文社会科学系の学部でも次々と新設されている。[注1] この背景には，コンピュータ・ハードの性能の向上や低価格化があったのはもちろんのことであるが，利用目的に応じたアプリケーション・ソフト開発の急激な進歩があったことは言うまでもない。[注2]
従来の情報処理教育は，ハードウェアに関する一定の知識とShannon[注3] や Win-

[注1] 経済学教育の分野においては，大型コンピュータを使ったSASやSPSS,ANALYSTなどによる数値データ解析が経済統計や計量経済学の分野で以前から行われていたが，パソコンの導入は後述するようにスプレッド・シートの活用などによって基礎的経済教育の分野から情報処理教育を行うことを可能にした。

[注2] 「コンピュータテクノロジーの発達にみられるような情報制御系労働手段の発達は，コンピュータ・ハードの発達であったと同時に，オペレーティング・システム（OS）やデータベース管理システム(DBMS)，ネットワーク制御ソフト(DCMS）などに代表される，これらのソフトウェアをコンピュータ・ハードから切り離し，普及していく過程でもあった。当初，ソフトウェアに使用される開発言語は，研究開発分野に限られたものであったが，IBMによるコンピュータビジネスの支配権確立以来，一般のユーザーにも普及し，ハードウェアの軛から解き放たれた無数のアプリケーションソフトが開発され，同時にそれ自身が価値，価格をもつ独自の商品として自立することになったのである」（拙稿「情報化と人間労働」『一橋研究』第14巻第４号所収，1990，107頁)。特にソフトウェア産業成長の背景には60年代から始まったIBMのアンバンドリング政策（価格分離政策）があり，またシリコン・テクノロジーの急速な進展がコンピュータの価格・性能の著しい改善をもたらして，その広範な普及を可能とした。一方，このコンピュータのディジタル処理による応用分野の広がり，適用分野が拡大するにつれて，それぞれの利用目的に合わせて，汎用のプロセッサを用いて目的とする論理的な複雑度をプロセッサから分かれたソフトウェアに負担させてきたのである（拙稿「情報化とネットワーク生産体系」『一橋研究』第15巻第４号所収，1991，45頁参照)。

ner[注4]以来の数理的・工学的情報理論の学習を導入部分として，BASICやFORTRAN,COBOL,C,などのコンピュータ言語を修得し，これによってそれぞれの必要分野に応じてプログラムを作成することであった。経済学教育においても，BASICを使ったミクロやマクロの数式プログラミング，産業連関表の作成や，マルクス経済学における再生産表式の作成，転形問題の解法などのプログラミングが一橋大学の久保庭真彰氏らによって先駆的に行われている。[注5]しかしながら，これらの業績は従来の経済理論の入門的な部分を的確にプログラミングしているが，コンピュータ言語の理解と入力に多大の労力がかかりすぎ，かならずしも経済理論の学習自体に適しているとは言い難いところがある。むしろ線型的な数式を形式言語によってディジタル化することによって，数式の本質をわかりにくくし，経済理論と数学にコンピュータ言語の教育が加わることによって過重負担になっていると思われる。

このようなコンピュータ言語による経済理論のプログラミングに代って，スプレッド・シートなどのアプリケーション・プログラムが多数登場することにより，ハードウェアの知識はもちろんのことコンピュータ言語の学習も不用となり，より専門分野に接近した形でのプログラミングが可能になったといえよう。特にスプレッド・シートのなかでも最初に普及したLotus1-2-3を利用した国民所得分析や産業構造分析などの経済データ解析のプログラミングに関する解説書はここ数年に相次いで登場している。[注6]このスプレッド・シートの登場に

[注3]Claude E. Shannon,アメリカの通信工学者で，通報の集合から平均的に得られるニュース価値によって情報量を定義した。

[注4]Norbert Winner,アメリカの数学者。生物または機械系における情報の伝達と制御の問題を統一的に究明しようとする科学，サイバネティックスを提唱。

[注5]久保庭真彰編『マイコンによる経済学』(1984，青木書店)，久保庭真彰編『社会科学のためのマイコン入門』(1985，青木書店)，久保庭真彰・浅利一郎『経済学のためのパソコン入門』(1988，大月書店)，久保庭真彰編『コンピュータ経済学』上，下（1989，東洋経済新報社）などがある。また，これを剽窃したものに梅原嘉介『入門　コンピュータ経済学　マクロ編』(1989，日本現代評論社)，梅原嘉介『文科系の入門BASIC』(1989，日本評論社)，『コンピュータによるマクロ経済学』上，下（1992，文真堂）などがある。

解説書はここ数年に相次いで登場している。[注6]このスプレッド・シートの登場によって，大量の数値データを処理しグラフィック化すると同時に，回帰分析などの統計的な分析を行うことが可能になったが，これらはデータに依存しておりアプリケーションによるプログラミングにも限界があるため，代数を使った抽象的な経済理論の修得には困難を生じさせる。[注7]この点では先のコンピュータ言語による経済理論のプログラミングからは一歩後退した側面がある。そこで，近年大型コンピュータやワークステーションからパーソナル・コンピュータへ移植されつつある数式処理ソフトによる経済理論解析の活用が展望されるのである。[注8]

そこで，本稿では現在スーパー・コンピュータからパーソナル・コンピュータまで広範囲で普及している数式処理ソフトMathematicaを使って，経済学の初歩的なプログラミングを試みてみる。

[注6] Lotus 1 - 2 - 3を使ったアプリケーション開発は経営情報学や会計情報学で先行していたが，経済学関係でも，大沢豊，田中克明『経済・経営分析のためのLotus 1 - 2 - 3』(1990，有斐閣）の他，浅利一郎『経済学のための「Lotus 1 - 2 - 3」』(1991，青木書店)，大藪和雄・安井修二他『経済学1 - 2 - 3　Lotus 1 - 2 - 3を使った経済学入門』(1992，日本評論社）などがある。また，SPSSなど従来大型コンピュータやワークステーションなどで扱われていた統計分析ソフトのパソコンへの移植が可能になり，より専門的なものとして，司馬正次編『やさしいデータ解析　SPSSXによる』(1989，東洋経済新報社)，司馬正次他『パソコンデータ解析　SL-MICROによる』(1989，東洋経済新報社)，山本嘉一郎他『パソコンSPSS』(1991，東洋経済新報社）や，室田泰弘他『パソコンによる経済予測入門　エコノメイトによる日本経済予測』(1992，東洋経済新報社）などの解説書もある。

[注7] ただし，データを恣意的・連続的に変更することによってモデルを作ることは可能であり，大西博「Lotus 1 - 2 - 3とコンピュータ教育」(『経済セミナー』1992年4月号，日本評論社所収）では，表計算機能を使って簡単な2財による交換と市場のモデルを構造化している。

[注8] パソコン用の数式処理アプリケーションは，以前はmuMATHやREDUCEなどが代表的なものであったが，これらの操作には専門的な数学の知識が不可欠であった。近年は，後述するMathematicaやTheorist,MATLABなど，ユーザーインターフェースがよりフレンドリーになった数式処理アプリケーションが普及しつつある。

第1節　Mathematicaによるマクロ経済学

Mathematicaは，数式処理，数値計算，グラフ処理を合わせた統合型ソフトウェアで，Inferance社の天才数学者Stephan Walfram氏によって開発された。数式処理では，因数分解，代数方程式の解析の他に，関数系の微分積分や，微分方程式の解を求めることが可能である（Mathematicaの内蔵関数はVer2.0で843となっている)。大型コンピュータやUNIXワークステーションはもちろん，IBM-PCやMacintoshのパーソナル・コンピュータなどで利用が可能であり，[注9]邦文の解説書もいくつか出版されている。[注10]このアプリケーションを経済学に応用したものとして野口旭氏の業績が先駆的なものとしてあげられる。[注11]しかし，これはいきなり二部門モデルにおける均衡解の計算を，コブ＝ダグラス型生産関数とミル＝グレアム型需要関数との均衡から導きだすことから始めているので，経済学の初心者にとっては難解であり，またMathematicaによる

[注9]Mathematicaが走るのは，IBM PC,Macの他にVAX,HP,IBM RISC,MIPS,NeXT,SiliconGraphics,Sony News,SUN,Data General,CONVEXといったパソコンから大型コンピュータまで幅広い領域に及んでいる。筆者はMacintosh版Mathematica Ver2.0を使用。ハードディスクを16MB以上占領し，メインメモリーも5MB以上必要な巨大なプログラムではある。なお，現在普及が進んでいるオペレーティング・システム，Microsoft Windows版の発売も予定されており，そうなれば国産のNECやEPSONなどのパソコンでの使用も可能である。

[注10]Mathematica自体の解説書は750頁もある膨大なもので，英語力と数学の高度な専門知識が要求される。邦訳がなされている解説書としては，Ian Vardi,*Computational Recreations in Mathematica,*（時田節訳『Mathematica　計算の愉しみ』，1991，トッパン)，Richard E. Crandall,*Mathematica for the Sciences,*伊東利明/蔡東生訳『Mathematica　理工系ツールとしての』，1991，トッパン）がある。またMacintosh版の解説書には，阿部寛『やさしいMacの数式処理プログラム』（1990，毎日コミュニケーションズ）や小池慎一『Mathematica数式処理入門』（1990，技術評論社）がある。

[注11]A.Noguchi, “The Two-Sector General Equilibrium Model:Numerical and Graphical Representations of an Economy,”*The Mathematica Journal*,Volume 1, Isuue 3, Winter 1991,　野口旭「Mathematicaによる一般均衡分析」(『経済セミナー』1992年4月号，日本評論社所収）を参照。

プログラミングの一定の知識が必要である。

そこで，基本的な操作については注10の解説書を参照されるのが一番であるが，まず導入部分として，いままでもいくつかのパソコンを利用した経済理論解説書でとりあげられてきた「国民所得決定45度線グラフ」[注12]をグラフィック化するプログラムの作成をしながらMathematicaの基本的な操作を解説していこう。

これは，総需要が国民所得水準を決定するというケインズの有効需要原理にもとづき，政府による投資需要が乗数理論[注13]によって国民所得を引き上げることを視覚的に明かにするグラフィックである。

まず，消費需要（C）を国民所得（Y）の増加関数，と考えると

$$C = cY + A \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

となり（cは限界消費性向，$0 < c < 1$，Aは基礎消費），この時点での均衡所得は

$$Ye = \frac{1}{1-c} A \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

となるが，これは必ずしも完全雇用水準に達しているとはいえない。

これに，外生的に決る投資水準をＩとすると，総需要は

$$C = cY + A + I \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

[注12]前掲の久保庭真彰，浅利一郎『経済学のためのパソコン入門』163頁～165頁，また梅原嘉介『入門　コンピュータ経済学　マクロ編』参照。

[注13]生産によって得られた所得は各経済主体に分配され，消費や投資などに支出される。この国民経済全体の流れをマクロ的にとらえたケインズは，投資支出を国民所得増大の原動力と考えた。ある期間に投資が増加するなら，これは当然生産の増大に結び付き，所得を増加させる。そこで，所得のうち消費される割合を一定とするならば（残りが貯蓄される），所得の増大が消費を増加させることによって生産を刺激し，さらに所得を増やしていく。この波及効果を明らかにしたのが投資の乗数理論である。

これを数式で示すと，投資の増分をΔＩ，所得の増分をΔＹ，消費の割合をｃとするならば，

$$\Delta Y = c \times \Delta I + c^2 \times \Delta I + c^3 \times \Delta I \cdots\cdots\cdots\cdots$$

となり，無限等比級数の和の公式を利用すると

$$\Delta Y = \left(\frac{1}{1-c}\right) \Delta I$$

となる。くわしくは，森義隆他『近代経済学入門』(1981，青木書店)，『経済用語の基礎知識』「国民所得」の項（1992，自由国民社）などを参照。

となり，均衡国民所得（Ye）は

$$Ye=\frac{1}{1-c}(I+A) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

となる。

この，（2）式と（4）の差，すなわち投資が増減した後の国民所得の増減を視覚的に明かにしようとするのである。

まず，（1）（3）式の関数において独立変数となるのは国民所得のYであるが，MathematicaではこのYを打ち込んで $\boxed{\text{Enter}}$ keyを押すと変数として宣言され出力される（入力は太字，出力は標準文字でなされる)。

Y $\boxed{\text{Enter}}$

Y

このYに数値を代入すれば，その数値が出力結果として表示される。

Y＝100 $\boxed{\text{Enter}}$

100

次に（1）（3）式の関数自体はユーザーが自分で定義するものだが，これも変数の宣言と同様に任意の式を代入すればよい。この際に独立変数の部分は引数として定義するので，後に任意の名前が使用できる（f [ ]の中にx__のように引数にアンダーラインを続ける)。また，f [x__]＝ではなくてf [x__]:＝のように＝の前に：をつけることによって，関数がその時点で評価されて代入されるのではなく，再び呼び出されて使用されるときに右辺が評価されるしくみになっている。たとえば

f [x__]:＝c*x＋A

と関数定義した後に

f [Y] $\boxed{\text{Enter}}$

とすれば，

A + c Y

と出力されるし，

f [100] $\boxed{\text{Enter}}$

のように数値を代入すれば

A ＋ 100 c

と出力される。

投資を加えた後の需要関数については

g [x__]:= f [x]+B

と定義して入力すればよい。

また，基礎消費，投資，消費性向などは

c =0.5

A=50

B=50

のように定数値で宣言しておいても後に数値の変更は容易に操作が可能である。

次に，均衡所得を導出する（2)，（4）式は，このままその式を代入してもよいがグラフで明かなようにこれはC＝Yの45度線との交点なので，方程式を解くためのSolve[式，変数]関数を用いる。式は[左辺＝＝右辺]の形をしており

Solve[f [Y]==Y,Y]

と入力すればよい。（4）式についても同様で，

Solve[f [Y]==Y,Y]

Solve[g [Y]==Y,Y] $\boxed{\text{Enter}}$

{{Y －＞100.}}

{{Y －＞200.}}

解として，100，200をそれぞれ得た。

最後に肝腎のグラフ作成だが，ここに数式処理ソフトのインターフェースの優位性があり，2次元グラフについてはPlot[ ]関数を用いればよい。書式は

Plot[{f1,f2,....},{変数，最小値，最大値},オプション]

の順で入力すればよく，関数は同一座標内にいくらでも表示できる。

Plot[{Y, f [Y], g [Y]},{Y, 0 ,300},

AxesLabel－＞{ "Y", "D"}]

AxesLabelはXラベルをX軸に，Yラベルを Y軸に描くオプションで，“”で

囲むと文字列で表示される。[注14]

そこで，これまでのすべてを表示させると，

```
Y
f[x_]:= c*x+A
g[x_]:= f[x]+B

c =0.5
A=50
B=50

f[Y]
g[Y]
Solve[f[Y]==Y,Y]
Solve[g[Y]==Y,Y]
Plot[{f[Y],g[Y],Y},
      {Y,0,300},
     AxesLabel->{"Y","D"},
     PlotPoints->200,
     PlotStyle->
     {{GrayLevel[0.0]},
      {GrayLevel[0.4]},
      {Dashing[{0.015,0.015}]}}
     ] Enter
```

Y

0.5

[注14] その他のオプションについては，小池慎一『Mathematica数式処理入門』139頁-141頁参照。

50

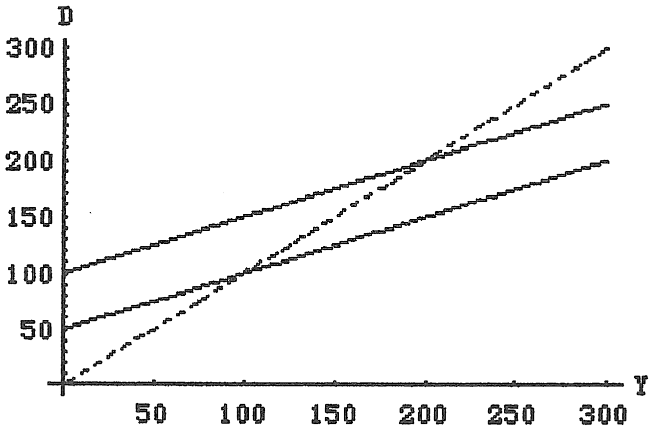
50

50 + 0.5Y

100 + 0.5Y

{{Y −> 100.}}

{{Y −> 200.}}



−Graphics−

と表示される。グラフが3本あるので，オプションのPlotPointsを使って関数をサンプルする最小の点の数を多くし（デフォルト値は25），PlotStyleを使いGrayLevelでグラフの濃淡を（0と1の間で決る），Dashingで破線を描かせるようにしている（数値は破線間隔）。[注15]

また，ここでは投資規模は外部から独立変数として与えられているが，この投資規模を過去の所得の変化率の関数と設定し（加速度原理にもとづく投資関

[注15] また，gl＝Plot[{f[Y],g[Y],Y}，{Y,0,300}]と関数を定義した後に，Show関数を使ってオプションを追加することができる。その場合書式は，Show[グラフィックスオブジェクト，オプション]となる。日本語の直接入力は現在のところ英語システムでMathematicaを作動させて，日本語入力FEP,SweetJamを使う他はない（Macintoshでの場合)。さらにグラフィックスを加工したい場合はMacDrawIIやSuperPaintなどのグラフィックソフトにペーストして加工・修正すればよい。

数), これを先の乗数理論と連結させることで景気循環のモデルが作成できる。[注16] これはサミュエルソン＝ヒックス・モデルとも呼ばれるが, これのグラフィック化を試みてみよう。

まず, 今期（第ｔ期）の投資総額を前期（第ｔ－１期）と前々期（第ｔ－２期）の国民所得の増加額の関数とすると,

$$I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \quad (v\text{は加速度因子}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

となる。

また, 今期（第ｔ期）の消費総額を前期（第ｔ－１期）の国民所得の関数とすると,

$$C_t = aY_{t-1} + b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

となる（ここで, $v>0, 1>a>0>, b>0$）。

需給均衡式は,

$$Y_t = C_t + I_t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

となるので, これに（1）,（2）式を代入すると,

$$Y_t = (a+v)Y_{t-1} - vY_{t-2} + b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

と, 2階の定差方程式を得る。

また, 数列Y_tの階差数列をZ_tとすると,

$$Z_t = (a+v)Z_{t-1} - vZ_{t-2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

となる。ここで, 二次方程式　$x^2-(a+v)x+v=0$を解いた解をそれぞれ, α, β, また$Z_1=Y_1-Y_0$, $Z_2=Y_2-Y_1$とすると,

$$Z_t - \alpha Z_t - 1 = (Z_2 - \alpha Z_1)\beta^{t-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

$$Z_t - \beta Z_t - 1 = (Z_2 - \beta Z_1)\alpha^{t-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

となり,（6）,（7）式より

$$Z_t = \frac{\alpha(Z_2 - \alpha Z_1)\beta^{t-1} - \beta(Z_2 - \beta Z_1)\alpha^{t-1}}{\beta - \alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

が得られる。

ここからY_tは, 初項Y_0に階差数列Z_tの和をZ_1から第ｔ－１項まで加えた

[注16] この景気循環モデルは久保庭真彰『マイコンによる経済学』119頁-124頁にBASICによってプログラミングされている。

ものとなる（下式）。

$$Y_t = Y_0 + \sum_{k=1}^{t-1} Z_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ここで，（9）式を1期ずつ算出し，座標軸にプロットしていけば，加速度原理にもとづく国民所得の変動，景気循環モデルをグラフィック化することが可能である。

まず，Mathematicaに

a ＝0.75

b ＝40

v ＝0.8

Y0＝50

Y1＝55

Y2＝(a ＋ v)＊Y0－ v ＊Y1＋40

Z1＝Y1－Y0

Z2＝Y2－Y1

p ＝((a ＋ v)＋((a ＋ v) ^ 2 － 4 ＊v) ^ (1 / 2))/ 2

q ＝((a ＋ v)－((a ＋ v) ^ 2 － 4 ＊v) ^ (1 / 2))/ 2

などの初期値，計算式を入力する。

次に，数列の和はMathematicaではSum関数が用意されている。形式は，数列 f の第1項から最大項までの和 $\sum_{i=1}^{imax} f$ を，Sum[f,{i,imax}]で表す。そこで，階差数列をSとすれば，

S ＝(p(Z2－ p ＊Z1)＊q ^ (t － 1)－ q (Z2－ q ＊Z1)＊p ^ (t － 1))/(q － p)

f [x_]:＝Y0＋Sum[S,{ t , 1 , x }]

と関数定義すればよい。

次に，この関数を変数xをx＝1から50まで1おきにプロットさせるには，グラフィックのオプションにあるListPlotを用い（{変数，初期値，最終値，間隔} の順で設定），

fp＝Table[{x,f[x]},{x,1,50,1}]

gp＝ListPlot[fp,AxesLabel－＞{ “ t ”，“Y”}] $\boxed{\text{Enter}}$

として実行すれば，以下の結果とグラフィック表示が得られる。

0.75

40

0.8

50

55

73.5

5

18.5

0.775 + 0.446514 I

0.775 − 0.446514 I

(0. + 1.11979 I) ((12.3312 + 4.80003 I)

$(0.775-0.446514\ I)^{-1+t}+(-12.3312+4.80003\ I)(0.775+0.446514\ I)^{-1+t}$)

```
{{1, 50}, {2, 54. + 0. I}, {3, 68.8 + 0. I},
  {4, 88.54 + 0. I}, {5, 107.297 + 0. I},
  {6, 120.578 + 0. I}, {7, 126.159 + 0. I},
  {8, 124.184 + 0. I}, {9, 116.657 + 0. I},
  {10, 106.572 + 0. I}, {11, 96.9609 + 0. I},
  {12, 90.1317 + 0. I}, {13, 87.2354 + 0. I},
  {14, 88.2095 + 0. I}, {15, 92.0364 + 0. I},
  {16, 97.1889 + 0. I}, {17, 102.114 + 0. I},
  {18, 105.625 + 0. I}, {19, 107.128 + 0. I},
  {20, 106.648 + 0. I}, {21, 104.702 + 0. I},
  {22, 102.07 + 0. I}, {23, 99.5469 + 0. I},
  {24, 97.7415 + 0. I}, {25, 96.9618 + 0. I},
```

{26, 97.1976 + 0. I}, {27, 98.1869 + 0. I},

{28, 99.5315 + 0. I}, {29, 100.824 + 0. I},

{30, 101.753 + 0. I}, {31, 102.157 + 0. I},

{32, 102.041 + 0. I}, {33, 101.538 + 0. I},

{34, 100.851 + 0. I}, {35, 100.189 + 0. I},

{36, 99.7119 + 0. I}, {37, 99.5022 + 0. I},

{38, 99.5589 + 0. I}, {39, 99.8145 + 0. I},

{40, 100.165 + 0. I}, {41, 100.505 + 0. I},

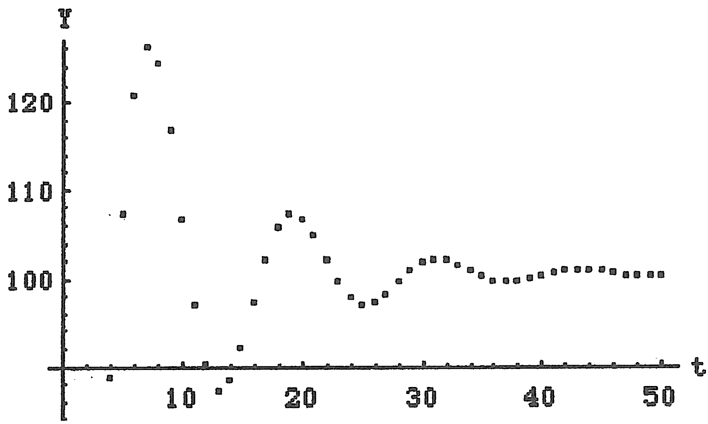
{42, 100.75 + 0. I}, {43, 100.859 + 0. I},

{44, 100.831 + 0. I}, {45, 100.701 + 0. I},

{46, 100.522 + 0. I}, {47, 100.348 + 0. I},

{48, 100.222 + 0. I}, {49, 100.166 + 0. I},

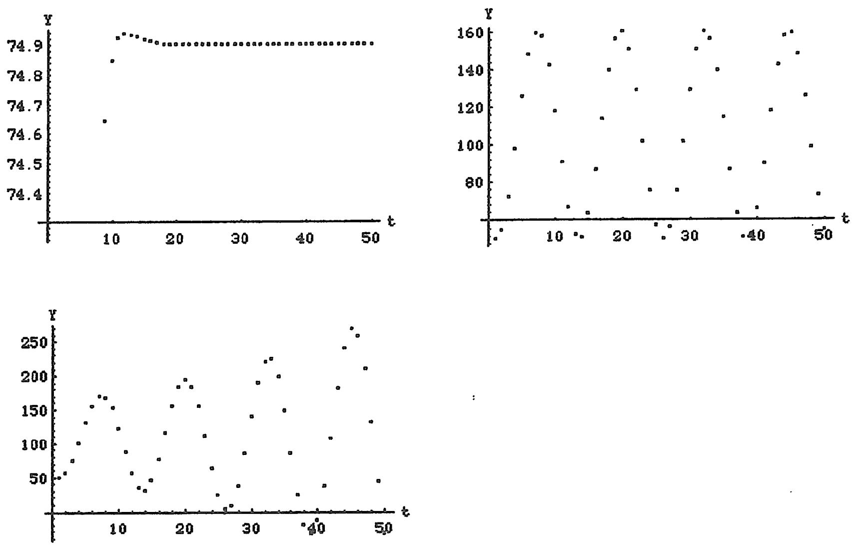
{50, 100.179 + 0. I}}



Graphics-

ここでは，加速度因子vの値を0.8に設定したので，グラフが減衰振動し，$\frac{b}{1-a}$に収束していく様子が伺えるが，vの値をに変化させることによって，グラフは様々な振動の形態を示す。[注17]

[注17]下図は左から順にｖの値を0.3，１，1.05と変化させた場合のグラフで，それぞれ単調収束，定常振動，発散振動の形態を示しているのが分かる。



第2節　Mathematicaによるミクロ経済学

ここでは，Mathematicaを使ってミクロ経済学の基礎となる価格理論の導入的な部分である予算制約下における2種類の財の消費均衡のプログラミングを行ってみる。[注18]

ミクロ経済学の導入部分では個人が2種類の財を消費する際に，その選好のパターンが無差別曲線で表示される。これは，例えば効用関数を新古典派型($U = 4\log Y_1 + 6\log Y_2$)と定義しておけば，$Y_1 = \left(\frac{e^U}{Y_2^4}\right)^{\frac{1}{6}}$となる。ここでUの値を様々に変化させて，無差別曲線を多数グラフィック表示させるためには，U＝5*nとして

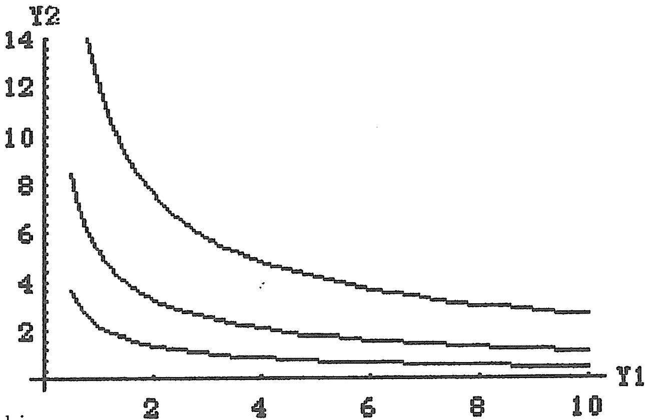
```
f [x__]:=((E^U)/(x^ 4))^(1/6)
U=5*n
Plot[
    Release[Table[ f [x],{n,1,3}]],
    {x,0.5,10},
    PlotLabel-> "U=4*log(Y1)+6*log(Y2),U= 5 ,10,15",
    AxesLabel->{ "Y1", "Y 2 "}
    ]
```

Enter

と入力すれば，

[注18]Basicによる価格理論のプログラミングは久保庭真彰『マイコンによる経済学』第2章を参照。

$U = 4 * \log(Y_1) + 6 * \log(Y_2)$, $U = 5$, 10, 15



－Graphics－

のように，nを1から3まで1きざみづつ（Uを5づつ）変化させた無差別曲線を3本表示する。

ここで，無差別曲線が原点に対して凸型になっているのは第1財の消費量が増加するにしたがって，第1財の限界効用（marginal utility）[注19]が減少するからであり，この際に同じ効用水準を維持するために第2財によって代替する比率は第1財の限界効用を第2財の限界効用で除算した限界代替率（marginal rate of substitution;MRS）によって表される（もちろん，第1財と第2財を逆にした場合もこのようになる)。

そこで，効用関数を新古典派型($U = 4\log Y_1 + 6\log Y_2$)にして，第1財$Y_1$の増減による，第2財$Y_2$の増減を算出するには，

```
f[x_, y_]:= 4*Log[x] + 6*Log[y]
u:= f[Y1, Y2]
Y1= 1
v:=Solve[u -10==0, Y2]
```

[注19]第2財の消費量を一定にしたまま第1財の消費量を微小量増加させた場合の効用の限界的な変化。

N[v,6] Enter

とすれば，

{{Y2 -> 5.29449}}

と表示されるので，あとはY1の数値を適当に変更してやればよい。[注20]

ここでN[v,6]としているのは，Mathematicaでは自然対数の底eがそのまま大文字で表示され，計算結果が{{Y2 -> $E^{\frac{5}{3}}$}}のように表示されるので，関数Nによって出力の桁数を指定しているのである。

次に，効用水準を一定にしたまま，それぞれの財の限界効用を調べるには，効用関数をそれぞれの変数について偏微分する必要がある。偏微分については，Mathematicaには関数D[ ]が用意されており，

$\frac{\partial}{\partial x}f$, $\frac{\partial}{\partial x^n}f$, $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}$ ……fはそれぞれ，D[ ]，D[[f ,{x,n}]，D[f ,x1,x2, ...]として実行すればよい（全微分はDt[ ]で実行する）。

たとえば，関数を

f[x_ , y_]:= 4 *Log[x]+ 6 *Log[y]

と定義したあとに

D[f[x,y],x] Enter

とすれば

4

–

x

というように，f[x,y]をxにより偏微分した結果が得られる。

同様に，

D[f[x,y],y] Enter

とすれば

[注20] **Y1= 5 ,Y2=10**と数値を変えて Enter すれば，それぞれ{{Y2-> 1.81069}}，{{Y2-> 1.14060}}と出力され，同一効用水準における第1財の増分による第2財の減少分がわかる。

6
—
y
と出力される。

そこで，各財の限界効用を計算し，限界代替率を算出するプログラムは，

```
f[x__, y__]:= 4*Log[x]+ 6*Log[y]
Y1= 1
D1=D[f[x,y],x]/.x->Y1
D2=D[f[x,y],y]/.y->(E^(5-2*Log[Y1]))^(1/3)
N[D1,6]
N[D2,6]
N[D1/D2,6] [Enter]
1
4
  6
----
  5/3
E
4.
1.13325
3.52966
```

のようになり，$Y_1=5$，$Y_1=10$と入力値を変更していくとMRSは0.241425，0.0760442となって，限界代替率が逓減していることがわかる。ここでD_1=D[f[x,y],x] のあとに /.x->Y_1 としたのは，D_1に一時的に数値を代入するための命令である。

さて，先にグラフィック化された無差別曲線はUの値を変えることによって無数に存在するが，消費者の行動は所得と第1財，第2財のそれぞれの価格からなる予算制約式によって制約される。所得をPI，第1財の価格をP_1，第2

財の価格をP_2とすれば，これは，

$P_1Y_1 + P_2Y_2 = PI$

と表現される。

この予算制約条件のもとで消費者が効用を最大にするためには，予算制約式と無差別曲線が接している状態であればよい。[注21] このためには，先に求めた限界代替率と予算制約式の傾きが一致していればよいわけであるので，予算制約式が与えられればそこからこれと接点を有する無差別曲線を逆算して導出し，同時に各財の消費量を算出することが可能である。

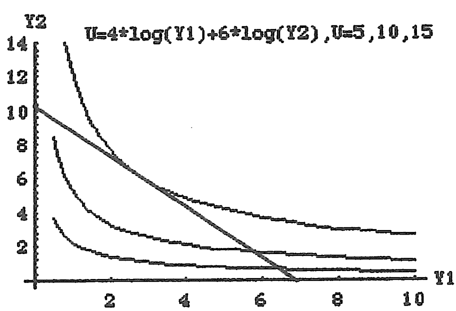
Mathematicaには一般的な式の解を求めるFindRoot関数がある。形式はFindRoot[左辺==右辺,{x,x0}]で，xの解をx0から出発して捜す。連立方程式の場合は，

FindRoot[{式1，式2，....},{x,x0},{y,y0},....]としてやればよい。

そこで，

```
f[x_,y_]:= 4*Log[x]+ 6*Log[y]
g[x_,y_]:=P1*x+P2*y
P1= 3
P2= 4
PI=10
```

[注21] 予算制約条件下で効用が最大になるためには，予算制約式と交点をもつ最も原点から離れた無差別曲線において効用が最大になる。下の図からもわかるとおり，これは予算制約式と無差別曲線が接する場合である。



```
D1=D[f[Y1,Y2],Y1]
D2=D[f[Y1,Y2],Y2]
```

と各関数を定義したあとに，続けて

```
FindRoot[{
        U==f[Y1,Y2],
        g[Y1,Y2]==PI,
        D2/D1==P2/P1
        },
        {U,1},
        {Y1,1},
        {Y2,1}
        ] [Enter]
```

とすれば，

```
 3
 4
10
 4
--
Y1
6
--
Y2
{U-> 3.58352, Y1-> 1.33333, Y2-> 1.5}
```

となり，効用と各財の消費量が求められる。

これをグラフィックで表示するには，続けて

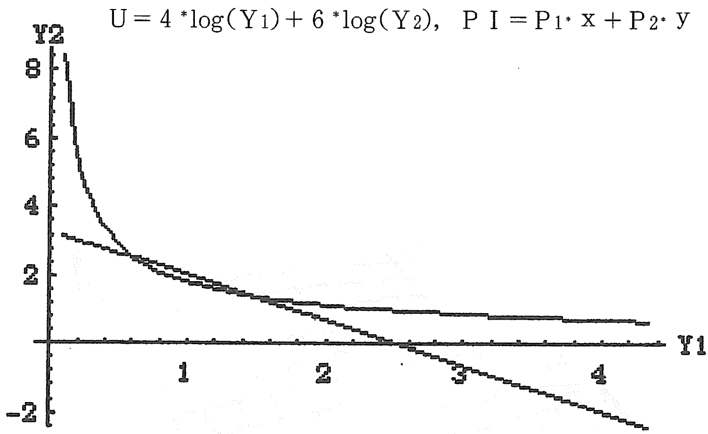
```
t[x__]:=((E^U)/(x^4))^(1/6)
u[x__]:=(-P2/P1)*x+PI/P1
Plot[{t[x],u[x]},
```

{x,0.1,PI/P1+1},

PlotLabel−> "U=4*log(Y1)+6*log(Y2),PI=P1*x+P2*y",

AxesLabel−>{"Y1", "Y2"}] $\boxed{\text{Enter}}$

としてやれば下図のグラフィックが得られる。



−Graphics−

このように，Mathematicaに内蔵される様々な関数によって均衡解の算出やグラフィックスによる表現が容易に可能になるが，これは生産における生産関数と費用関数との均衡においても可能である。

さらに，BasicやFortranなどのコンピュータ言語でより困難を極めた3次元グラフィックスの作成はより容易になる。

そこで前掲の野口氏の論文にも言及されており，久保庭・浅利著『経済学のためのパソコン入門』でもプログラミングされているコブ=ダグラス型生産関数のグラフィックス作成であるが，これはPlot3d[ ]で作図する。書式は

Plot3d[{f},{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},オプション]

となっている。

まずコブ=ダグラス型生産関数を

$Z=X^{0.5}Y^{0.5}$　（Zは生産量，Xは資本用役，Yは労働用役）

と定義する。これはMathematicaに，

f［x__,y__］:＝x ^ a＊y ^（1－a）

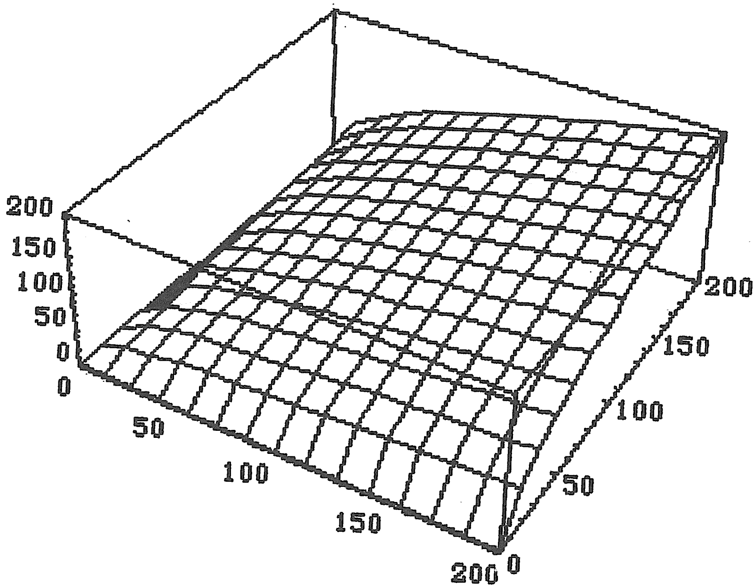
Z＝f［x,y］

A＝0.5

と入力すればよい。そして，X,Yの定義域をそれぞれ｛0，200｝として

g1=Plot 3 D［f［X,Y］,｛X,0,200｝,｛Y,0,200｝］ $\boxed{\text{Enter}}$

とすれば，即座に



－SurfaceGraphics－

と表示される。[注22]

このようなグラフィックス作成の容易さが数式処理ソフトの最大の利点であ

[注22]このグラフィックスはオプションなしのデフォルトで作成されたもので，２次元グラフのときと同様にShow関数を利用することによって，角度，光源，濃度などを変えさまざまなグラフィックスが表示できる。

り，現在Macintosh専用であるが，やや軽量の数式処理ソフトTheorist[注23]でもさらに容易に同様の操作が可能である。[注24]

[注23]Theoristは，もともとMacintoshのパソコン用のプログラムとして開発されたため，Mathematicaに比べて視覚的なインターフェースをより活用しており，ユーザーインターフェースが非常にフレンドリーなものとなっている。機能的にはMathematicaに劣るが，部分積分，因数分解，式の展開，値の代入，テーラー展開の他，自作の特殊関数を数学公式を利用して登録することもできる。またmathematicsフォルダ内にはラプラス変換，ベッセル関数，行列演算などが付属されており，入門的な経済数学のプログラミングとしてはこれで十分である。プログラミング自体に教育機関での利用が意識されており，現在Macintoshの英語版しか発売されていないのが残念であるが，今後Windowsの普及ともあわせてMS-DOS系の機種版の普及が望まれる。このTheoristの他にMacintosh用としては，数値解析・数式解析の両者が可能なより高度なアプリケーション，HiQがある。

[注24]まず，Theoristを起動した後に，

Declarations

と表示されるので，ここに

$Z = x^{0.5} y^{0.5}$

と入力した後にこの数式を選択し，メニューバーのGraphからz=f(x,y) Illum3Dを選択して変数を指定すると即座に下左図が表示される。

図の視点は容易に操作が可能で，次にグラフィック・ウィンドウの右上にあるdocumentを開くと，座標，目盛り，図の色，メッシュサイズなどに関するデータが表示されるので，ここで変数の定義域を指定すれば下右図のような3次元グラフィックが得られる（この辺の操作がすべてマウスを使ったポップ・アップ・メニューの選択で可能なので，Mathematicaに比べて操作が格段に容易である）。