

松くい虫被害量推移モデルの誘導とその適合性

稲田 充男

The Simulation Model for the Dynamics of Wood Volume Damaged by the Pine Wilt Disease

Mitsuo INADA

Abstract This paper is intended to present a model for describing the dynamics of actual wood volume damaged by the pine wilt disease. Applying the KERMACK-MCKENDRICK epidemic curve (1927), the author derived the simulation model which can be written as follows;

$$f(t) = M \operatorname{sech}^2 \{k(t - \tau)\}$$

where M , maximum of wood volume damaged by the pine wilt disease (m^3); k , intrinsic rate (year^{-1}); τ , time of maximum damaged volume (year); t , time (year), and $f(t)$, damaged volume at time t (m^3). The simulation model was fitted to observed data of wood volume damaged by the pine wilt disease from 1973 to 1990 in Shimane Prefecture and Hikawa-cho respectively, and was tested its applicability.

Key words: Epidemic curve; pine wilt disease; curve fitting.

はじめに

松くい虫被害は、島根県はもとより北海道、青森県を除く日本全土でマツに被害を与えている重大な樹木被害である。本論では、森林経営、計画の立場からこのマツくい虫被害の発生量の推移を表現するモデルを誘導し、その有効性について検討した。

松くい虫被害量推移モデルとして、カーマックとマッケンドリックが1905年12月17日から1906年7月21日の約7カ月、インドのボンベイで流行したペストによる死者数のデータにあてはめたカーマック・マッケンドリックの流行病モデルを参考に、同種の曲線式を導いた(稲田, 1993)。本論では、森林資源の適切な管理・経営という観点から、この推移モデルにより、松くい虫被害量の見積もりがどの程度正確にできるか、モデルに含まれるパラメータの値から考察した。資料としては、島根県全域ならびに島根県斐川町の1973年~1990年の松くい虫被害量調査結果(島根県農林水産部, 1991)を用いた。

なお、本研究の一部は平成5年度島根大学学内特定研究「山陰地域人工林における森林環境の保全に関する基礎的研究」によった。

カーマック・マッケンドリックの流行病モデル

本節では、カーマック・マッケンドリックの流行病モデルについて佐藤(1991)より引用して紹介する。ただし、式の番号は本文に合わせて変更してある。

「ある地域に住む n 人の集団を考える。その地域の住民は他の地域の住民と全く交流せず、その地域のなかだけで、お互いが均等に交流しているものとする。また、住民の出生、自然死、他地域への移住などもいっさい考えないことにする。したがって、全住民数 n は一定であるとしてよい。

つぎに、住民は感染者、感受性者からなる二つのグループの他に、除去者からなる第三のグループに分けられているものとしよう。ただし、除去者とは、病気に感染して死亡したもの、回復して免疫をもつ者、免疫をもつまでその地域から隔離されている者などをいう。

さらに、その病気に感染すると、感受性者はただちに感染者に変わるものと仮定しよう。これは潜時をまったく無視するということである。ここで潜時とは、感染後、病原菌が宿主の体内で増殖し、やがて体外へ排出されるまでの期間をいう。これは、いわゆる潜伏期とはちがう

ので、区別したほうがよい。

さて、ある時期 t の感受性者を $x(t)$ 、感染者を $y(t)$ 、除去者数を $z(t)$ であらわし、これらの関数はいずれも t について微分可能であると仮定する。このとき

(1) $x + y + z = n$
である。

いま、感受性者数の変化率は x と y の積に比例すること、除去者数の変化率は y に比例すること、および除去者は y に比例して一定の割合で感染者のグループから除かれること、などを仮定する。すると、これらの仮定より、次の一組の微分方程式をえる。

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy$$

$$(2) \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma y$$

ただし、 β は感染率 (または接触率)、 γ は除去率とよばれ、いずれも正の定数である。

微分方程式系(2)はカーマック・マッケンドリックの流行病のモデルとよばれている。」

流行病モデルの近似解

本節についても前節同様、佐藤(1991)より引用して紹介する。ただし、不要部分の一部省略し、式の番号は本文に合わせて変更してある。

〔(2)の第一式を第三式でわれば

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\beta}{\gamma} x = -\frac{x}{\rho}, \quad \rho = \frac{\gamma}{\beta}$$

をえる、 x を z の関数とみてこの微分方程式を解けば

$$(3) x(z) = x_0 \exp(-z/\rho)$$

をえる。一方、(1)より

$$y = n - z - x$$

これを(2)の第三式の右辺に代入し、この x にさきほど求めた $x(z)$ を代入すれば、

$$(4) \frac{dz}{dt} = \gamma [n - z - x_0 \exp(-z/\rho)]$$

をえる。ところが、この微分方程式の解を具体的にあらわすことはむずかしい。そこで近似解を求める。

伝染病の流行がそれほど激しくないとき、住民の交流から除去される者の数 z は小さい数であるとみてよい。また、 $1/\rho$ は一般にかなり小さな数になるから、 z/ρ は相対的に小さな数であると考えられる。したがって、テイラーの公式により $\exp(-z/\rho)$ を展開し、(4)の右

辺に代入し、整理し定数をまとめると、

$$(5) \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma x_0}{2\rho^2} \{A^2 - (z-B)^2\}$$

となる。この微分方程式は、これは変数分離型であり、未定係数法を用い、部分分数に分解し解くことができ、

$$(6) z(t) = \frac{\rho^2}{x_0} \left\{ \left(\frac{x_0}{\rho} - 1 \right) + \lambda \tanh\left(\frac{\gamma\lambda}{2} t - \mu\right) \right\}$$

をえる。ただし、

$$\mu = \tanh^{-1} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x_0}{\rho} - 1 \right)$$

この $z(t)$ がモデル(2)の近似解である。」

松くい虫被害量推移モデル

公衆衛生統計では(6)の近似解をそのまま用いず、増加率の形で用いる。すなわち、 z の導関数 dz/dt として定義される流行曲線を用いる。(6)の近似解より流行曲線を求めると、

$$(7) \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma\rho^2\lambda^2}{2x_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma\lambda}{2} t - \mu\right)$$

をえる。実際には、(7)を整理して、

$$(8) f(t) = \frac{dz}{dt} = M \operatorname{sech}^2(k(t - \tau))$$

として用いる。

上記の流行曲線が導かれた過程はそのまま松くい虫被害量推移モデルに応用できる。 $x(t)$ を健全木量、 $y(t)$ を松くい虫被害木量、 $z(t)$ を被害木の中から枯死・伐採除去等により確認された被害量と解釈すれば、(8)は松くい虫被害量推移モデルそのものである。(8)のパラメータ μ の性格を明確にするために、 $\mu = k\tau$ とおくと、

$$(9) f(t) = M \operatorname{sech}^2\{k(t - \tau)\}$$

となる。ここで、 $f(t)$ は被害量、 M は被害量の最大値、 τ は被害量が最大になる時刻、 k は被害量の増加速度にかかわるパラメータである。本論では、それぞれの単位を、 $f(t)$ 、 M : m^3 、 τ : 年、 k : $(\text{年})^{-1}$ とした。

図 1 a にこのモデルの一般的形状を示す。 τ を中心に左右対称である。また、それぞれのパラメータを変化させると、図 1 b-d のようになる。 M を変化させると、それに応じピーク時の高さが変わる。 τ を変化させると、ピーク時期が移動する。また、 k については、この値が大きくなるにつれ曲線の形状が尖鋭化する。

資料へのあてはめ

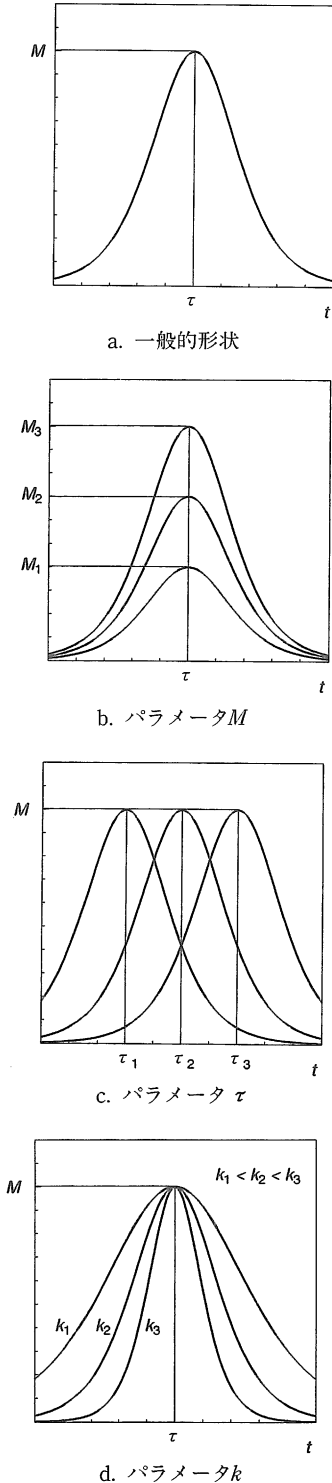


図1 松くい虫被害量推移モデルの一般的形状とパラメータによる変化

上記の松くい虫被害量推移モデルを、実測資料にあてはめる。資料としては、島根県農林水産部造林課が各市町村の松くい虫被害量を取りまとめたものから、島根県全域ならびに島根県斐川町の1973年から1990年の被害量調査結果を用いた。なお、斐川町については、1976年までは目立った被害はなく、1977年から1990年の被害量について検討した。また、モデルのあてはめ計算には、非線形最小二乗法の中で収束までの計算速度は遅いが、比較的安定した結果が得られるシンプレックス法を用いた。

島根県全域の調査結果に対するあてはめた結果は、

$$f(t) = 106.3 \operatorname{sech}^2 [0.1896(t-1985)]$$

である。ただし、被害量 $f(t)$ の単位は [千 m^2] である。これを図示すると図2のようになる。図中、○は調査結果、曲線はあてはめたモデルである。次に、島根県斐川町の調査結果に対するあてはめ結果は、

$$f(t) = 1.641 \operatorname{sech}^2 [0.2747(t-1984)]$$

である。これもまた、被害量 $f(t)$ の単位は [千 m^2] である。これを図示すると図3のようになる。図中、○は調査結果、曲線はあてはめたモデルである。

図2, 3をみてわかるように、どちらも実測資料によくあてはまっており、各調査結果が示す被害の推移状況をよく表現している。このように、このモデルは実測資料に対する適合度という観点からは問題ないであろう。ただ、森林資源の適切な管理・経営という観点からは、モデルの予測性能が問題になる。この点についてみる。

モデルの予測性能を調べる方法として、モデルに含まれるパラメータの安定性という観点から検討した。すなわち、あてはめに用いる資料を徐々に少なくし、それによって得られる各パラメータの値がどのように変化するか、さらに、あてはめに用いなかった部分の資料に対しどのような予測をしているかを調べた。すなわち、1973年(斐川町の場合は1977年から)からある年の資料まで用い、その後の資料に対しどの程度の予測が行えるか調べた。

島根県全域について、全資料を用いて計算した結果は上で示したように、

$$f(t) = 106.3 \operatorname{sech}^2 [0.1896(t-1985)]$$

である。これに対し、1年分ずつ資料を減らした場合の結果は次のようになった。それぞれ用いた資料の最終年とそれによるあてはめ結果が示してある。

1989年 $f(t) = 106.6 \operatorname{sech}^2 [0.1950(t-1985)]$

1988年 $f(t) = 106.5 \operatorname{sech}^2 [0.1963(t-1985)]$

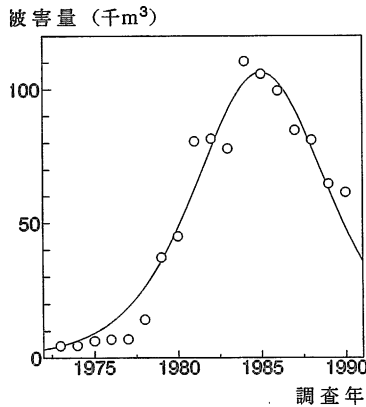


図2 島根県全域に対するあてはめ結果

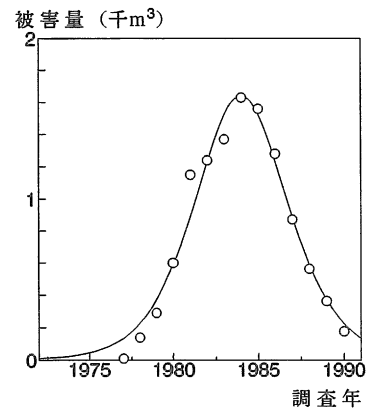


図3 斐川町に対するあてはめ結果

1987年	$f(t) = 106.2 \operatorname{sech}^2 [0.1972(t-1985)]$
1986年	$f(t) = 107.4 \operatorname{sech}^2 [0.1976(t-1985)]$
1985年	$f(t) = 108.7 \operatorname{sech}^2 [0.1991(t-1985)]$
1984年	$f(t) = 100.9 \operatorname{sech}^2 [0.2319(t-1984)]$
1983年	$f(t) = 85.3 \operatorname{sech}^2 [0.3588(t-1982)]$
1982年	$f(t) = 84.1 \operatorname{sech}^2 [0.3569(t-1982)]$
1981年	$f(t) = 487.1 \operatorname{sech}^2 [0.2591(t-1987)]$
1980年	$f(t) = 45.4 \operatorname{sech}^2 [0.5173(t-1981)]$

また、斐川町については、全資料が、

$$f(t) = 1.641 \operatorname{sech}^2 [0.2747(t-1984)]$$

であるのに対し、次のようになった。

1989年	$f(t) = 1.638 \operatorname{sech}^2 [0.2731(t-1984)]$
1988年	$f(t) = 1.637 \operatorname{sech}^2 [0.2726(t-1984)]$
1987年	$f(t) = 1.635 \operatorname{sech}^2 [0.2707(t-1984)]$
1986年	$f(t) = 1.636 \operatorname{sech}^2 [0.2692(t-1984)]$
1985年	$f(t) = 1.629 \operatorname{sech}^2 [0.2700(t-1984)]$
1984年	$f(t) = 1.544 \operatorname{sech}^2 [0.3015(t-1983)]$
1983年	$f(t) = 1.428 \operatorname{sech}^2 [0.3298(t-1983)]$
1982年	$f(t) = 1.296 \operatorname{sech}^2 [0.4529(t-1982)]$
1981年	$f(t) = 2.174 \operatorname{sech}^2 [0.4198(t-1983)]$
1980年	$f(t) = 0.790 \operatorname{sech}^2 [0.5374(t-1981)]$

これらから打ち切り資料に対する各パラメータの変化を図示すると図4、5のようになる。図4、5ともaはパラメータM、bはパラメータc、cはパラメータkのそれぞれの変化が示してある。なお、横軸には用いた資料の最終年がとってある。また、図中の各数字はあてはめ計算に用いた資料数を示す。次に、ここで求めた各曲線について、全資料に対する残差平方和、1資料あたりの残差平均、および全資料を用いてあてはめた場合の1資料あたりの残差平均と各曲線の1資料あたりの残差平均

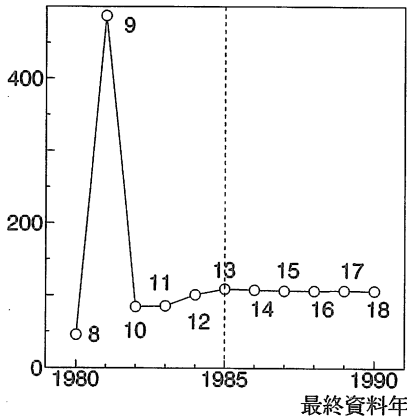
の比率を求め、これらをまとめると表1、2のようになる。ここで、この比率の値が1に近ければ、全資料を用いたあてはめ結果と大差ないあてはめが行えたことを意味する。

島根県全域の場合は1985年、斐川町については1984年、それぞれのピーク時の資料を、あてはめ計算を行う際、含めるか否かで、その予測性能が異なる。すなわち、ピーク時以降の資料を含む場合は、上記のあてはめ結果および図4、5からわかるように、そのパラメータの値はほぼ一定である。それゆえ、それより計算される予測値もほぼ安定している。このことは、表1、2の比率の値からも理解できる。このようにピーク時の資料を含む場合は、比較的長期にわたる予測も十分可能で、その予測値も現実のものに近い値を示すことがわかる。これに対し、ピーク時以前の資料だけで計算した場合は、パラメータの値はその都度大きく変化し、予測値も安定しない。このような場合には、被害量の長期予測は無理である。

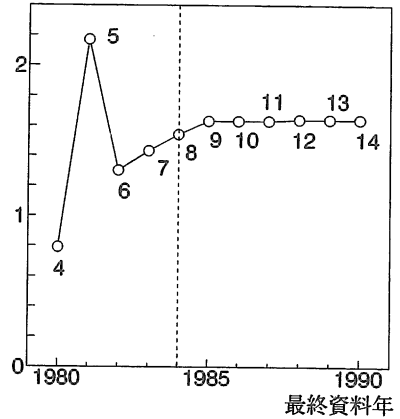
おわりに

松くい虫の被害量推移はカーマック・マッケンドリックの流行曲線モデルを応用することにより、その傾向をうまく表現できることをわかった。また、被害量の予測については、用いる資料の範囲にもよるが、ある程度正確に見積もることが可能であることを認めた。被害量を正確に見積もることができれば、森林資源の適切な管理・経営という観点からの確かな判断を下す材料となろう。また、森林保護の立場から、薬剤散布などの効果を評価する重要な基礎資料となろう。

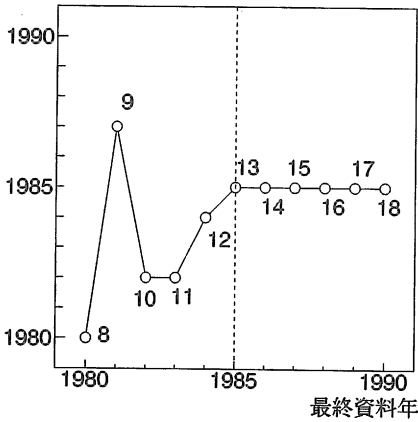
モデルの予測性能については、この種のいわゆる「ピー



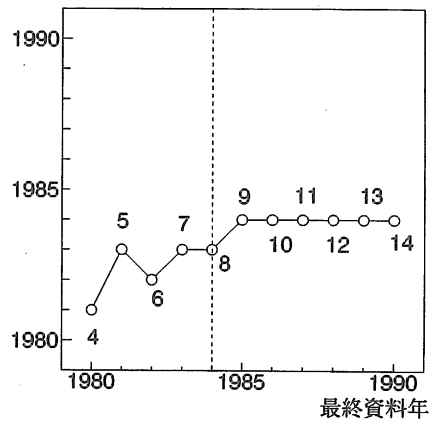
a. パラメータ M



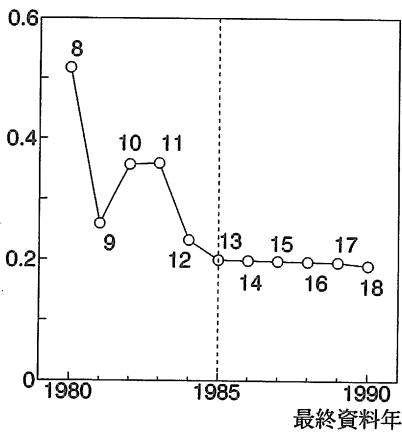
a. パラメータ M



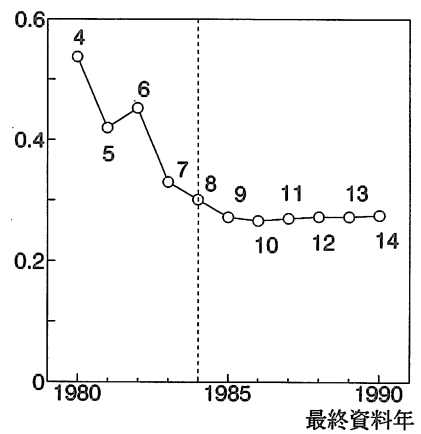
b. パラメータ τ



b. パラメータ τ



c. パラメータ k



c. パラメータ k

図4 打ち切り資料によるパラメータの変化(島根県全域)

図5 打ち切り資料によるパラメータの変化(斐川町)

表 1 打ち切り資料に対するあてはめ結果による
残差評価(資料:島根県全域)

最終資料年	資料数	残差平方和	残差平均	比率
1990	18	1.1938×10^3	1.9195	1.00
1989	17	1.2204×10^3	1.9408	1.01
1988	16	1.2374×10^3	1.9542	1.02
1987	15	1.2570×10^3	1.9697	1.03
1986	14	1.2417×10^3	1.9576	1.02
1985	13	1.2551×10^3	1.9682	1.03
1984	12	5.3330×10^3	4.0571	2.11
1983	11	3.4842×10^4	10.3700	5.40
1982	10	3.4913×10^4	10.3806	5.41
1981	9	6.9254×10^5	46.2328	24.09
1980	8	6.0085×10^4	13.6179	7.09

表 2 打ち切り資料に対するあてはめ結果による
残差評価(資料:斐川町)

最終資料年	資料数	残差平方和	残差平均	比率
1990	14	0.1290	0.0257	1.00
1989	13	0.1292	0.0257	1.00
1988	12	0.1293	0.0257	1.00
1987	11	0.1303	0.0257	1.00
1986	10	0.1318	0.0259	1.01
1985	9	0.1306	0.0258	1.00
1984	8	1.0007	0.0715	2.78
1983	7	1.4847	0.0780	3.04
1982	6	5.1352	0.1619	6.30
1981	5	2.3237	0.1089	4.24
1980	4	9.1228	0.2157	8.39

ク曲線」の場合、あてはめ計算に用いる資料そのものがピークを示すようなものであれば、それより計算される曲線式は、数年におよぶ比較的長期予測が可能であることを認めた。松くい虫被害でいえば、被害の初期段階では、このモデルを用いても十分な予測はできないであろう。中・後期段階になれば、すなわちピーク時を過ぎていけば、長期におよぶ予測が可能で、終期段階の被害量もある程度の確に押さえられることを認めた。ただ、このモデルで表現できる被害は、連立微分方程式を導いた仮定からもわかることであるが、ある一定のメカニズムで起こる被害を予測するにとどまり、被害を起こすメ

カニズムそのものが異なれば、当然このモデルから遊離することが考えられる。この点について、さらに検討する必要がある。

引用文献

- 稲田充男, 松くい虫被害量推移モデルの誘導. 日林関西支論, 2: 45-46, 1993.
- 島根県農林水産部, 島根県の林業. 島根県農林水産部林政課, 松江, 154 pp., 1991.
- 佐藤總夫, 自然の数理と社会の数理II 微分方程式で解析する. 日本評論社, 東京, 271 pp., 1991.