

信頼性設計法による監査廊の安全性の評価

野 中 資 博*

Evaluation of Gallery Safety with Reliability-Based Design
Tsuguhiro NONAKA

Safety of fill-dam gallery is evaluated with AFOSM and PEM. The design sections based on serviceability limit state of thermal stress and allowable stress method are checked. As a result, the both sections have safety indices over 4 in ultimate limit state, then show enough safety. Especially, the amount of reinforcement in serviceability limit state of thermal stress is over-estimated. It is found that the proper amount of reinforcement is about 0.2% at arch crown. Moreover, the partial safety factors on limit state design in Japan are reasonable values, if allowable safety index $\beta_d = 4$ and coefficient of variation with external load is 10%.

1. 序 論

近年、無駄の少ない低コストの設計、すなわち経済性を追求した設計が求められるようになってきた。従来の許容応力度設計法は一つの材料安全率に基づくものであり、この安全率に対する理論的裏付けは非常に乏しい。よって、安全性にかなりの余裕を取ることになり、経済的にみれば効率の良い設計とは決してならない。そこで新しく導入されたのが限界状態設計法である。許容応力度法で構造系に関係なく一つの安全率で代表して処理していたものを、この方法では荷重、強度ごとの安全係数など、いくつかの部分安全係数により合理的に安全性を評価し、できるだけ安全過ぎりに設計しようとするものである。ところが、この部分安全係数に対する論理的な裏付けもそれほど十分なものではなく、限界状態設計法のレベルで設計されたものが、はたして安全過ぎりであるかどうか疑問がある。そこで、本報告では鉄筋コンクリート構造物としてのフィルダム監査廊を例にとり、温度応力の使用限界状態と許容応力度法により設計した断面に対して、安全性指標に基づく信頼性設計法を適用し、安全性を評価、検討することにした。次に、信頼性理論に基づいて部分安全係数の逆同定を試みた。

ところで、星谷ら¹⁾によれば、信頼性設計法には次の三

つの段階がある。すなわち、設計変数の総ての確率特性を必要とするレベル3の信頼性設計法、確率特性のうち平均値と標準偏差のみを用いて安全性指標を求めるレベル2の信頼性設計法、さらに、許容破壊確率あるいは許容安全性指標に基づく部分安全係数を用いるレベル1の信頼性設計法である。よって、限界状態設計法というのはとりもなおさずレベル1の信頼性設計法であるが、確率理論を直接に扱うことはないので、ここでいう信頼性設計法とは安全性指標を用いるレベル2の設計法を指すものとする。ちなみに、破壊確率を求めるのに確率理論を厳密に適用するレベル3の設計法は、その実際の利用には未だに問題点が多く、その簡略的な代替案としてレベル2の設計法が各国で用いられようとしている。

また、信頼性設計法を構造物はいかに壊れるかに基づいた確率論的手法による設計法と考えれば、その破壊確率を一定値以内に抑えることを究極の目標とすることになるが、構造物が壊れるということにはたくさんの意味がある。構造物が耐用期間中において、設計で意図した機能を果たせなくなったことを壊れたと考えれば、限界状態設計法でいう断面破壊の終局限界状態、使用性に関する使用限界状態、疲労破壊に関する疲労限界状態などがある。ここでは、そのうちの終局限界状態のみを取り扱うことにした。

* 農村工学講座

2. 一次ガウス近似法

信頼性解析では、まず、幾つかの破壊モードを設定しなければならない。この破壊モードは一般に作用荷重、材料強度、その他種々の不確定要因の関数で表わされる。この関数を性能関数と呼び、次式で定義する。

$$Z_i = g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

ここで、 X_1, \dots, X_n は破壊モード i に関する不確定要因である。性能関数が正の値ならば破壊モード i は発生せず、性能関数がゼロ以下になれば破壊モード i が発生し、構造物は破壊する。性能関数により破壊モード i の生起確率 P_{fi} を示せば次のようになる。

$$P_{fi} = P(Z_i \leq 0) \quad (2)$$

この破壊確率を厳密に計算するためには、確率変数 X_1, \dots, X_n の結合確率密度関数を $Z_i \leq 0$ で積分すればよいが、これがレベル3の方法にはかならない。ここで、この結合確率密度関数は簡単には定義できず、性能関数も線形関数とはかぎらない。よって、前述したようにレベル3の信頼性解析は困難なのである。そこで、破壊モードの生起確率を算定するために近似解析が工夫され、その最も有効な方法が一次ガウス近似法¹⁾²⁾である。

この方法は HASOFER と LIND により呈示され、RA-CKWITZ により拡張された。その特徴は以前の報告³⁾で使用した二次モーメント法にくらべ、性能関数の形にかかわらず不変の安全性指標が得られることである。その理論を簡単に述べると、まず破壊モード i に対する性能関数である(1)式を破壊点まわりでテーラー展開して、一次の項で打ち切り線形近似する。

$$Z_i \doteq g_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{j=1}^n (X_j - x_j^*) \partial g_i / \partial x_j | x^* \quad (3)$$

ただし、 x^* は破壊点であるから、

$$g_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad (4)$$

である。ここで、各確率変数は互いに独立な正規確率変数と仮定されている。さらに、式(3)により期待値と標準偏差を求めれば以下のようなようである。

$$\mu_{zi} \doteq \sum_{j=1}^n (\partial g_i / \partial x_j | x^*) (\mu_{xj} - x_j^*) \quad (5)$$

$$\sigma_{zi} \doteq \sum_{j=1}^n \alpha_j (\partial g_i / \partial x_j | x^*) \sigma_{xj} \quad (6)$$

ただし α_j は次式であり、スケールファクタと呼ばれる。

$$\alpha_j = \frac{(\partial g_i / \partial x_j | x^*) \sigma_{xj}}{\left\{ \sum_{j=1}^n (\partial g_i / \partial x_j | x^*)^2 \sigma_{xj}^2 \right\}^{1/2}} \quad (7)$$

ここで、 μ_{xj} および σ_{xj} は確率変数 X_j の平均値と標準偏差である。また、次の式も条件式として成立する。

$$x_j^* = \mu_{xj} - \alpha_j \beta_i \sigma_{xj} \quad (8)$$

ただし、

$$\beta_i = \mu_{zi} / \sigma_{zi} \quad (9)$$

は破壊モード i に対する安全性指標である。また、破壊確率との関係は近似的に次のようになる。

$$P_{fi} = 1 - \Phi(\beta_i) \quad (10)$$

ここで、 Φ は標準正規確率分布関数を意味している。

安全性指標 β_i を計算する手順は以下のようなものである。まず、 β_i の出発値を設定し、 $x_j^* = \mu_{xj}$ とする。これらを用いて式(7)により α_j を計算する。さらに、式(8)から新しい x_j^* をもとめる。安定した x_j^* が得られるまでこれらのステップを繰り返す。つづいて、(1)式から Z_i の値を求め、式(5)、(6)、(9)で β_i を修正し、式(4)の条件を満たすまで、これらの計算を繰り返せばよい。以上の計算のプログラムには星谷らの公開したものを改良して利用した。

3. PEM

PEM とは Point Estimate Method の略であり ROSENBLUETH により提案されたものである⁴⁾。この方法は本来は図表または有限要素解のような関数関係の明確でないものから、ある変数の関数の確率特性を得るために考案された。ここでは後の限界状態設計法に前述の一次ガウス近似法を適用するために用いることにした。まず、一変数の PEM について簡単に解説をする。

確率分布を水平なほりに分布した垂直荷重と考えると、期待値は単位大きさの平衡力の作用点の近似である。そして、標準偏差は期待値の旋回半径である。概念的には、期待値と標準偏差は変数中央の傾向とばらつきに関する情報を提供している。確率分布 $f(x)$ の2点推定では、この情報は $x = x_-$ に作用する p_- と $x = x_+$ に作用する p_+ の二つの反力によって支持されたほりに関する情報を提供している。確率論的に考えれば、モーメントなるものは次の四つの式で表わされる。

$$p_+ + p_- = 1 \quad (11)$$

$$p_+ x_+ + p_- x_- = E[x] = \bar{x} \quad (12)$$

$$p_+ (x_+ - \bar{x})^2 + p_- (x_- - \bar{x})^2 = \sigma^2[x] \quad (13)$$

$$p_+ (x_+ - \bar{x})^3 + p_- (x_- - \bar{x})^3 = \beta(1) \sigma^3[x] \quad (14)$$

ここで、 $E[x]$ と $\sigma[x]$ は確率変数 x の期待値と標準偏差である。さらに、 $\beta(1)$ は skewness である。もし、 $\beta(1) = 0$ 、すなわち変数 x が正規分布として上式を逆に解くと、

$$p_+ = p_- = 1/2 \quad (15)$$

$$x_+ = \bar{x} + \sigma[x] \quad (16)$$

$$x_- = \bar{x} - \sigma[x] \quad (17)$$

次に、 $y = y(x)$ なる関数関係を持つ y のモーメントは、

この p_- と p_+ の二つの重みを用いて、一般的に次のように書ける。

$$E[y] = \bar{y} = p_- y_- + p_+ y_+ \quad (18)$$

$$E[y^2] = p_- y_-^2 + p_+ y_+^2 \quad (19)$$

最大エントロピーの原理から、確率変数 x が期待値と変動係数（あるいは標準偏差）に関する情報しか持っていないとすれば、分布は正規分布を指定し、そのとき確率関数 y の期待値と標準偏差は式(15)～(17)を(18)と(19)に代入することにより次のように簡単になる。

$$E[y] = \bar{y} = (y_+ + y_-)/2 \quad (20)$$

$$\sigma[y] = |y_+ - y_-|/2 \quad (21)$$

2変数の PEM については、二つの確率変数に関して、確率分布を剛な板上に作用する垂直分布荷重と近似する。そのとき、その板は4点 p_{++} , p_{+-} , p_{-+} , p_{--} によって支持される。この場合、関数関係 $y = y(x_1, x_2)$ の M 次モーメントは次式で定義される。

$$E[y^M] = p_{++} y_{++}^M + p_{+-} y_{+-}^M + p_{-+} y_{-+}^M + p_{--} y_{--}^M \quad (22)$$

ただし、 M は知られているモーメントの次数より大きくなってはならない。このとき、

$$y_{\pm\pm} = y(\bar{x}_1 \pm \sigma[x_1], \bar{x}_2 \pm \sigma[x_2]) \quad (23)$$

$$p_{++} = p_{--} = (1+\rho)/4 \quad (24)$$

$$p_{+-} = p_{-+} = (1-\rho)/4 \quad (25)$$

ここで、 ρ は x_1 と x_2 との間の相関係数であり、また、 \bar{x}_1 と \bar{x}_2 は変数 x_1, x_2 の期待値である。 y の1, 2次のモーメントが得られれば、その標準偏差は次のようになる。

$$\sigma[y] = \sqrt{E[y^2] - (E[y])^2} \quad (26)$$

4. 終局限界状態に基づく性能関数

ここで採用した性能関数は最も簡単な次の形である。

$$Z_1 = M_{ud} - M \quad (27)$$

$$Z_2 = N_{ud}' - N' \quad (28)$$

最終的な確率変数は M_{ud} , N_{ud}' , M , N' の四つであるが、 M_{ud} , N_{ud}' は限界状態設計法により、いくつかの確率変数の確率関数であり、その特性値を求めるのに前述の PEM を用いている。また、外荷重 M , N' の期待値は構造解析より求めた値とし、変動係数がある仮定値に固定して用いた。次に、以下で扱う式にてでくる主な記号を説明しておく。

b : 長方形断面の幅 h : 長方形断面の高さ

d : 長方形断面の圧縮側縁維より引張鉄筋までの距離

A_s : 引張鉄筋の総断面積

x : 中立軸より圧縮側縁維にいたる距離

e : 偏心距離

f_{cd}' : コンクリートの設計圧縮強度

f_{yd} : 鉄筋の設計降伏強度

T : 鉄筋の引張合力 ($T = A_s f_{yd}$)

C_c' : コンクリートの圧縮合力 ($C_c' = 0.68 f_{cd}' b x$)

M : 外力による曲げモーメント

N' : 外力による軸方向力、ダッシュは圧縮を示す

M_{ud} : 設計曲げ耐力

N_{ud}' : 設計軸方向耐力、ダッシュは圧縮を示す

ところで、偏心距離 e と荷重 M , N との間には、 $M = Ne$ なる関係がある。

終局限界状態を考えたのは図1のフィルダム監査廊である。図の a-a で切り取られる単位長さあたりの断面を示せば図2のようになる。この単鉄筋断面についてのつりあいの式は以下のようである。

$$M_{ud} = C_c'(h/2 - 0.4x) + T(d - h/2) \quad (29)$$

$$N_{ud} = T - C_c' \quad (30)$$

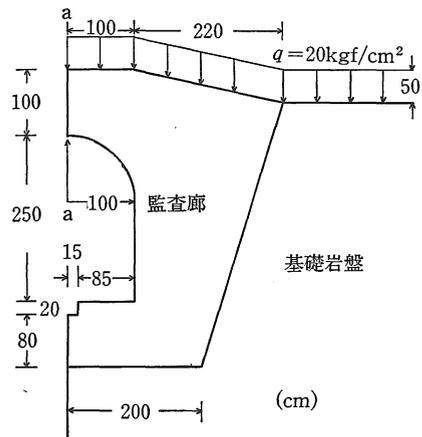


図1 監査廊半断面と堤体荷重

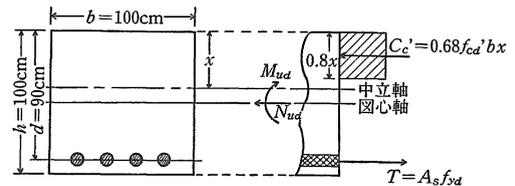


図2 アーチクラウン単鉄筋断面終局限界状態モデル

$$M_{ud} = N_{ud} \cdot e \quad (31)$$

式(29), (30)を(31)に代入し、整理すると、次の中立軸の位置 x に関する二次方程式が得られる。

$$x^2 - (2.5e + 1.25h)x + 62.5(e - d + 0.5h)A_s f_{yd} / 17b f_{cd}' = 0 \quad (32)$$

ここで、 $b = 100$ cm, $h = 100$ cm, $d = 90$ cm, $f_{yd} = 3500$ kgf/cm² である。また、荷重 M , N は図3から $M = 17.5$ tfm, $N = 25.0$ tf となり、よって、 $e = 70$ cm となる。以上の値を代入し、 x について解くと、

$$x = 150 - 25(36 - 6.1765 A_s/f_{cd}')^{1/2} \quad (33)$$

ここで、 f_{cd}' を正規確率変数とし、期待値 $E[f_{cd}'] = 210$ kgf/cm²、標準偏差はリッシュの提案式を用いて、 $\sigma[f_{cd}'] = 72$ kgf/cm² として PEM を用いて、 x の期待値 $E[x]$ と標準偏差 $\sigma[x]$ を求める。ただし、鉄筋量は温度応力の使用限界状態の結果からの $A_s = 40.0$ cm²/m と許容応力度法の結果からの $A_s = 19.6$ cm²/m の2種類を用いた。その結果は

$A_s = 40.0$ cm²/m のとき：

$$(E[x], \sigma[x]) = (2.8, 1.0) \text{cm}$$

$A_s = 19.6$ cm²/m のとき：

$$(E[x], \sigma[x]) = (1.4, 0.5) \text{cm}$$

中立軸の位置 x が得られたら、式(29)、(30)にかえり、各耐力を計算する。すなわち、

節点No.	109	102	90	85	76
応力	-7.9	-3.2	1.7	5.6	12.6

(kgf/cm²)

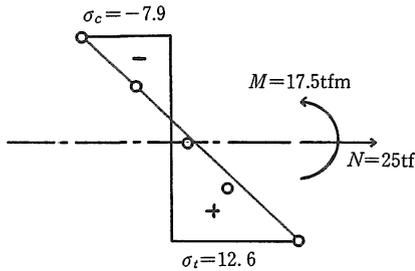


図3 堤体荷重の弾性解析による応力分布

$$M_{ud} = 68 f_{cd}' x(50 - 0.4x) + 140000 A_s \quad (\text{kgf cm}) \quad (34)$$

$$N_{ud} = 3500 A_s - 68 f_{cd}' x \quad (\text{kgf}) \quad (35)$$

この式(34)、(35)に2変数の PEM を適用し、 M_{ud} 、 N_{ud} の期待値と標準偏差を求める。この時、 x は f_{cd}' の関数であり、 f_{cd}' の増加に対し、 x は減少を示すので、負の相関があるとして $\rho = -3/4$ を用いた。その結果は以下である。

$A_s = 40.0$ cm²/m のとき：

$$(E[M_{ud}], \sigma[M_{ud}]) = (73.7, 5.0) \text{tfm}$$

$$(E[N_{ud}], \sigma[N_{ud}]) = (103.7, 10.5) \text{tf}$$

$A_s = 19.6$ cm²/m のとき：

$$(E[M_{ud}], \sigma[M_{ud}]) = (36.4, 2.2) \text{tfm}$$

$$(E[N_{ud}], \sigma[N_{ud}]) = (50.5, 4.8) \text{tf}$$

5. 安全性の評価

式(27)、(28)の性能関数と前節で求めた単鉄筋断面の M_{ud} 、 N_{ud} の特性値を用いて、一次ガウス近似法により

解析を行った。ただし、荷重 M 、 N の期待値は前述のように $E[M] = 17.5$ tfm、 $E[N] = 25$ tf とし、変動係数は仮定値の10%とした。表1にその結果を示す。ノル

表1 監査廊の安全性の評価

	鉄筋量 $A_s = 40 \text{ cm}^2/\text{m}$		鉄筋量 $A_s = 19.6 \text{ cm}^2/\text{m}$	
	モーメント	軸力	モーメント	軸力
安全性指標 β	10.61	7.29	6.72	4.71

ウェイの建築構造物設計示方書はこのような構造物に対して、許容安全性指標 β_a を4程度としている。土圧の変動係数、すなわち、それに従属する荷重の変動係数が10%とすれば許容応力度法で求められた単鉄筋の $A_s = 19.6$ cm²/m の鉄筋量は十分安全であることが判り、温度応力の使用限界状態からの鉄筋量では終局限界状態は安全に過ぎることが明白である。必要最小鉄筋量を0.2%とすれば、この断面では $A_s = 18$ cm²/m となるが、この程度で安全性は確保できよう。

6. 部分安全係数の逆同定

一次ガウス近似法に基づく部分安全係数の逆同定の方法は、安全性指標 β_i の算出に対する逆問題を解くことによって与えられる。すなわち、この場合にも性能関数 Z_i が定められ、それに含まれる各確率変数の特性は既知であるとして、許容安全性指標 β_a に対する $Z_i = 0$ 上の破壊点 $x^*(\beta_a)$ を求めるのである。求められた $x^*(\beta_a)$ は当然次式を満足する。

$$Z_i = g_i\{x_1^*(\beta_a), x_2^*(\beta_a), \dots, x_n^*(\beta_a)\} = 0 \quad (36)$$

さらに、 $x_j^*(\beta_a)$ を確率変数 X_j の公称値 $X_{j,n}$ で表わせば、式(36)は次のようになる。

$$Z_i = g_i(X_{1,n}/\phi_1, X_{2,n}/\phi_2, \dots, X_{n_1,n}/\phi_{n_1}, \gamma_1 X_{n_1+1,n}, \gamma_2 X_{n_1+2,n}, \dots, \gamma_{n_2} X_{n_1+n_2,n}) = 0 \quad (37)$$

ここで、性能関数に含まれる確率変数の数を n 、強度に関する確率変数の数を n_1 、荷重に関する確率変数の数を n_2 とする ($n_1 + n_2 = n$)。また、部分安全係数は、強度に関する割引係数を ϕ 、荷重に関する割増係数を γ とし、それぞれに付して表わす。式(36)と(37)を比較すると、

$$\phi_j = X_{j,n}/x_j^*(\beta_a) \quad (j = 1, 2, \dots, n_1) \quad (38)$$

$$\gamma_j = x_{j+n_1}^*(\beta_a)/X_{j+n_1,n} \quad (j = 1, 2, \dots, n_2) \quad (39)$$

さらに、確率変数 X_j が正規確率変数であれば、式(8)より、次のように表わせる。

$$\phi_j = X_{j,n}/(\mu_{xj} - \alpha_j \beta_a \sigma_{xj}) \quad (j = 1, 2, \dots, n_1) \quad (40)$$

$$\gamma_j = (\mu_{x_{j+n_1}} - \alpha_{j+n_1} \beta_a \sigma_{x_{j+n_1}}) / X_{j+n_1, n} \quad (41)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n_2)$$

また、設計では、設計基準式は式(37)と同じ性能関数の形となり、 $Z_i > 0$ であれば良い。ところで、本報告では、前節において、性能関数の最終的な形を、 R ：強度、 S ：荷重として、 $Z = R - S$ としているから、設計基準式は、

$$Z = R_n / \phi - \gamma S_n > 0 \quad (42)$$

となる。ここで、 R_n は強度に関する公称値、 S_n は荷重に関する公称値である。また、部分安全係数は次のとおりである。

$$\phi = R_n / (\mu_R - \alpha_R \beta_a \sigma_R) \quad (43)$$

$$\gamma = (\mu_S - \alpha_S \beta_a \sigma_S) / S_n \quad (44)$$

ここで、 μ_R 、 μ_S は強度、荷重の平均値、 σ_R 、 σ_S は強度、荷重の標準偏差であり、 α_R 、 α_S は一次ガウス近似法の解析過程で得られるスケールファクタである。

ところで、日本の限界状態設計法の設計基準式は、

$$R(f_k / \gamma_m) / \gamma_b - \gamma_d \alpha S(\gamma_f F_k) \geq 0 \quad (45)$$

ただし、 f_k ：材料強度の特性値、 F_k ：荷重の特性値

γ_m ：材料係数、 γ_b ：部材係数

γ_a ：構造解析係数、 γ_f ：荷重係数

γ_i ：構造物係数

となっており、各部分安全係数毎の同定は不可能である。よって、強度係数、荷重係数としてまとめて評価することにした。許容安全性指標 $\beta_a = 4$ として、単鉄筋断面で強度係数、荷重係数の逆同定の結果を表 2 に示

表 2 監査廊の強度係数と荷重係数

	鉄筋量 $A_s = 40 \text{ cm}^2/\text{m}$		鉄筋量 $A_s = 19.6 \text{ cm}^2/\text{m}$	
	モーメント	軸力	モーメント	軸力
強度係数 ϕ	1.34	1.65	1.23	1.51
荷重係数 γ	1.13	1.09	1.25	1.18

す。鉄筋量が増加すれば強度係数は増大し、荷重係数は減少する傾向が見られるが、これらの値は妥当な範囲にある。コンクリートの材料係数を 1.3 とし、部材係数を 1.15 とすれば、まとめた強度係数は約 1.5 であり、構造解析係数、荷重係数、構造物係数を総て 1.1 とすれば、まとめた荷重係数は約 1.3 である。その意味で、許容安全性指標 4 と外力の変動係数 10% というのは妥当な仮定

である。

7. 結 論

第 5 節で得られた結果から、許容応力度法でもまだまだ安全性に余裕があり、温度応力の使用限界状態からはもっと危険側での設計も考えられる。また、第 6 節の結果に関しては、そのみでは何とも言い難いが、このような方法によって、限界状態設計法の設計基準式の、それぞれの部分安全係数に対する直接的な逆同定が可能であるならば、必要とされる信頼度をもつ設計を簡略に行える限界状態設計法の評価はより一層高まるだろう。

また、この報告では、一次ガウス近似法解析において、そのままでは解析不可能な複雑な性能関数に対して、PEM を用いることで解析可能な簡単な性能関数に変換できることも併せて示した。しかし、その性能関数を導くにあたっては、ここでは若干 PEM を多用しているきらいがあり、計算誤差の蓄積を少なくするためには、一次ガウス近似法に、より効果的な範囲で PEM を使うよう再考しなければならない。

最後に、本報告では限界状態を終局限界状態に限定している。ところが、フィルダム監査廊のような水密性を要求することの多い構造物では、限界状態設計法のレベルで、使用限界状態が支配的になることが判っている。そこで、この使用限界状態を信頼性の見地から検討してみる必要はないのだろうか。今のところ著者にも明確な解答のもちあわせはないが、いずれ検討結果を読者に聞きたいと思っている。

引用ならびに参考文献

- 1) 星谷・石井：構造物の信頼性設計法 鹿島出版会 東京 1986, pp. 172-175.
- 2) SMITH, G. N.: Probability and Statistics in Civil Engineering Collins London 1986, pp. 106-109.
- 3) 野中資博：農土誌 57(5)：45-50, 1989.
- 4) HARR, M. E.: Reliability-Based Design in Civil Engineering McGraw-Hill New York 1987, pp. 205-217.
- 5) CHRISTENSEN, P. T. and M. J. BAKER: Structural Reliability Theory and Its Applications Springer-Verlag Berlin 1982, pp. 188-196.