島根大農研報 (Bull. Fac. Agr. Shimane Univ.) **23**：146−155, 1989

積分型 Endochronic 理論の熱力学的基礎

藤　居　良　夫*

Thermodynamic Foundations of Endochronic Theory with Kernels

Yoshio Fujii

Recently the endochronic theory in plasticity has been proposed, which seems to rationally describe the general behavior of concrete or soils under complicated multi-axial loading states. It is based on sound thermodynamic arguments, and does not require the notion of yield surface nor specification of unloading-reloading criteria. This unique features make the theory particularly attractive for describing the behavior of concrete or soils.

The endochronic theory was originally developed by Valanis and has been applied with remarkable success to various problem of metal plasticity, which is called the integral endochronic theory (the endochronic theory with kernels).

On the other hand, the other endochronic theory was developed by Bazant et al. to describe the behavior of concrete, which is called the incremental endochronic theory. It is derived from the integral endochronic theory by replacing the kernel function with a single exponential term, and it is requires a large number of functions and material parameters.

In this paper, thermodynamic foundations for the integral endochronic theory are considered, and mechanical explanations of the theory are given by means of physical models. Moreover, the features in plasicity which were derived from the theory are examined thoroughly.

I. まえがき

従来の塑性論においては，散逸材料の非弾性的挙動を説明するために，載荷と除荷を示す載荷関数や応力空間における降伏曲面という概念を導入しなければならない．現実的には，材料の降伏という現象は線形から非線形へと徐々に推移していき，降伏の明確な定義はない．さらに，一般的には，材料の構成式を求めるための基礎として，塑性論の増分流れ理論が用いられるが，増分流れ理論では後続降伏曲面の定義に硬化則と結合した降伏規準を仮定する．また，この後続降伏曲面は降伏の定義に大きく影響される．このような従来の塑性論によると，材料応答を載荷・除荷・再載荷の各過程で別々に考えることからくる不連続性が問題となる．実際の材料挙動は一般に連続して起こり，また複雑な連成効果も含んでいる．そして，どのような変形過程においても，初期の段階から非弾性的性質を示し，回復されない永久ひずみを発生することが観測される．このため，Valanis は従来の塑性論における降伏の概念が一般的散逸材料に対して適さないとして，1971年に内部状態変数を用いた非可逆熱力学理論に基づいて Endochronic 理論と呼ばれる構成関係を示した[2]．この Endochronic 理論は降伏曲面の仮定を必要とせず，したがって煩わしい硬化則も必要とせずに，ひずみの連続的な蓄積を考慮した連続的モデルである．このような特徴をもつ理論はとくに，載荷の初期段階から塑性変形が観測されるコンクリートや土などの粒状材料に対して適するものと考えられる．

* 農村工学講座

Endochronic 理論は，最初 Valanis により金属材料に対して示された積分型と呼んでいる理論[2)8)10)]と，後に Bazant 等によりコンクリートの挙動を表現するために示された増分型と呼んでいる理論[5)6)7)]に大別できる．積分型理論は，核関数をもつひずみの記憶積分によって応力応答を表すものである．増分型理論は，積分型理論の核関数を単一指数関数で表示したときに導かれる関係式に，材料の非弾性的な特徴をうまく説明できる半経験式を用いて表したパラメータを組み合わせて応力応答を表現するものである．したがって，両理論は全く異った理論であるが，両者とも共通の intrinsic time measure と呼ばれるパラメータを用いて挙動を表現している．この intrinsic time measure は，材料の過去の変形履歴を表す測度であり，その増分はひずみ速度を考えない場合，計量テンソル P_{ijkl} をもつひずみ空間における2つのひずみ状態のあいだの距離を示す．すなわち，

$$d\zeta^2 = P_{ijkl}\, d\varepsilon_{ij}\, d\varepsilon_{kl} \tag{1}$$

ここで，P_{ijkl} は4階正定値計量テンソル，ε_{ij} はひずみテンソルである．ただし，ここでは微小変形について扱うことにする．また，この intrinsic time measure を用いて，もう一つのパラメータである intrinsic time scale の増分 dz を次式で表す．

$$dz = \frac{d\zeta}{f(\zeta)},\ f(0) = 1 \tag{2}$$

ここで，f は硬化関数と呼ばれる正関数である．材料の応力応答が実時間 (clock time) でなく，この intrinsic time についての関数で表されるという理論が Endochronic 理論である．その理論的基礎は，粘弾性材料に対する内部状態変数を用いた非可逆熱力学理論にある．ここでは，積分型 Endochronic 理論の理論的基礎の考察と，力学的モデルによるその理論の解釈を示した．さらに，その理論から導かれる塑性論的特徴について，従来の塑性論と対比して検討した．

II. 粘弾性材料の熱力学理論[1)9)]

材料に力学的な作用が加わると，力学的な現象だけでなく熱的現象が生じる．自然界の変化は一般に非可逆的であり，熱力学的な考察から材料の非可逆的挙動を理解することができる．

材料の非弾性的挙動を表すため，散逸パラメータとしての役割をする内部変数 q_r の導入を考える．内部変数 q_r の一般的な関数関係は，移行方程式として次のように表現できる．

$$\dot{q}_r = f_r(\varepsilon_{ij},\ \theta,\ q_r) \tag{3}$$

ここに，θ は絶対温度，上付記号 (・) は時間に関する物質導関数を示す．Helmholtz の自由エネルギ密度 Ψ を用いると，非可逆エントロピ生成率は次のように書ける．

$$\theta\dot{\gamma} = \left(\sigma_{ij} - \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)\dot{\varepsilon}_{ij} - \left(\eta + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\dot{\theta} - \frac{\partial\Psi}{\partial q_r}\dot{q}_r - \frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{,i}}\dot{\theta}_{,i} - \frac{1}{\theta}h^i\theta_{,i} \geq 0 \tag{4}$$

ここに，σ_{ij} は応力テンソル，h^i は熱流束ベクトル，γ は単位体積当りの非可逆エントロピ生成，η は単位体積当りのエントロピ (エントロピ密度)，コンマの次の下付記号 $(,i)$ は物質座標系の共変微分を示す．ε_{ij}, θ, $\theta_{,i}$, q_r を時間 t において一定に保つと，(3)式から $\dot{q}_r$ は固定されるが，$\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\theta}_{,i}$ は任意に選ぶことができる．このような選択に対して，(4)式は次の条件のとき満足される．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Psi}{\partial\theta_{,i}} = 0\\
&\sigma_{ij} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{ij}}\\
&\eta = -\frac{\partial\Psi}{\theta\partial}\\
&\theta\dot{\gamma} = -\frac{\partial\Psi}{\partial q_r}\dot{q}_r - \frac{1}{\theta}h^i\theta_{,i} \geq 0
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

一方，非可逆エントロピ生成率は次のような基底形式で表すことができる．

$$\theta\dot{\gamma} = \sum_r \eta_r(\dot{q}_r)^2 + b_{ri}\dot{q}_r\theta_{,i} + a_{ij}\,\theta_{,i}\,\theta_{,j} \tag{6}$$

ここに，係数 η_r, b_{ri}, a_{ij} はε_{ij} と θ に依存する．自由エネルギ密度 Ψ は(5)の第4式を満たすように決定されるが，この Ψ は $\theta_{,i}$ に依存しないから，$(5)_4$ および(6)式より次式が得られる．

$$-\frac{\partial\Psi}{\partial q_r} = \eta_r\dot{q}_r \ (r \text{ について総和をとらない})$$

$$-\frac{1}{\theta}h^i = b_{ri}\dot{q}_r + a_{ij}\theta_{,j}$$

$\theta_{,i} = 0$ のとき $h^i = 0$ である必要があるから，上式において $b_{ri} = 0$ でなければならない．したがって，上の二式は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Psi}{\partial q_r} + \eta_r\dot{q}_r = 0 \ (r \text{ について総和をとらない})\\
&-\frac{1}{\theta}h^i = a_{ij}\theta_{,j}
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ここで，自由エネルギ密度 Ψ を次のように ε_{ij}, q_r, θ の2次形式で与える．

$$\Psi = \frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + a_{ijr}\varepsilon_{ij}q_r + a'\varepsilon_{ij}\theta + \sum_r \frac{1}{2}a_r q_r q_r + a_r' q_r\theta + \frac{1}{2}b'\theta^2 \tag{8}$$

(8)式を(5)$_2$ 式と(7)$_1$ 式に代入すると次式が得られる.

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl} + a_{ijr}q_r + a'\theta\\&a_{ijr}\varepsilon_{ij} + a_r q_r + a_r'\theta + \eta_r \dot{q}_r = 0\\&\qquad (r \text{ について総和をとらない})\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(9)$_2$ 式の微分方程式を解くと次が得られる.

$$q_r = -\frac{a_{ijr}}{\eta_r}\int_{-\infty}^{t} e^{-\rho_r(t-\tau)}\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau - \frac{a_r'}{\eta_r}\int_{-\infty}^{t} e^{-\rho_r(t-\tau)}\theta(\tau)d\tau,\ \rho_r = \frac{a_r}{\eta_r} \tag{10}$$

上式を部分積分することにより次式が得られる.

$$\begin{aligned}q_r =& -\frac{a_{klr}}{a_r}\left\{\varepsilon_{kl}(t) - \int_{-\infty}^{t} e^{-\rho_r(t-\tau)}\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial\tau}d\tau\right\}\\&-\frac{a_r'}{a_r}\left\{\theta(t) - \int_{-\infty}^{t} e^{-\rho_r(t-\tau)}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}d\tau\right\}\\&\qquad (r \text{ について総和をとらない})\end{aligned} \tag{11}$$

これを(9)$_1$ 式へ代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} =& \left(a_{ijkl} - \sum_r \frac{a_{ijr}a_{klr}}{a_r}\right)\varepsilon_{kl}(t)\\&+\sum_r \frac{a_{ijr}a_{klr}}{a_r}\int_{-\infty}^{t} e^{-\rho_r(t-\tau)}\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial\tau}d\tau\\&+\left(a' - \sum_r \frac{a_{ijr}a_r'}{a_r}\right)\theta(t)\\&+\sum_r \frac{a_{ijr}a_r'}{a_r}\int_{-\infty}^{t} e^{-\rho_r(t-\tau)}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}d\tau\end{aligned} \tag{12}$$

この式は次のように簡潔な形にできる.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} =& C^0_{ijkl}\varepsilon_{kl}(t) + \int_{-\infty}^{t} C^1_{ijkl}(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial\tau}d\tau\\&+D^0_{ij}\theta(t) + \int_{-\infty}^{t} D^1_{ij}(t-\tau)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}d\tau\end{aligned} \tag{13}$$

ここに,

$$C^0_{ijkl} = a_{ijkl} - \sum_r \frac{a_{ijr}a_{klr}}{a_r},\quad C^1_{ijkl}(t) = \sum_r \frac{a_{ijr}a_{klr}}{a_r}e^{-\rho_r t}$$

$$D^0_{ij} = a' - \sum_r \frac{a_{ijr}a_r'}{a_r},\quad D^1_{ij}(t) = \sum_r \frac{a_{ijr}a_r'}{a_r}e^{-\rho_r t}$$

もし材料が等方性であるならば,次のようにおける.

$$\left.\begin{aligned}&C^0_{ijkl} = \lambda^0\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu^0(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\\&C^1_{ijkl}(t) = \lambda^1(t)\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu^1(t)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\\&\mathrm{D}^0_{ij} = \alpha^0\delta_{ij}\\&D^1_{ij}(t) = \alpha^1(t)\delta_{ij},\\&\qquad \delta_{ij} = \text{クロネッカーのデルタ}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(14)式を(13)式へ代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} =& \lambda^0\varepsilon_{kk}(t)\delta_{ij} + \delta_{ij}\int_{-\infty}^{t}\lambda^1(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial\tau}d\tau\\&+2\mu^0\varepsilon_{ij}(t) + 2\int_{-\infty}^{t}\mu^1(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\tau}d\tau\\&+\alpha^0\theta(t)\delta_{ij} + \delta_{ij}\int_{-\infty}^{t}\alpha^1(t-\tau)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}d\tau\end{aligned} \tag{15}$$

さらに次のようにおく.

$$\lambda(t) = \lambda^0 H(t) + \lambda^1(t)$$
$$\mu(t) = \mu^0 H(t) + \mu^1(t)$$
$$\alpha(t) = \alpha^0 H(t) + \alpha^1(t)$$

ここに,$H(t)$ は Heaviside のステップ関数である.したがって,(15)式は次のようになる.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} =& \delta_{ij}\int_{-\infty}^{t}\lambda(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial\tau}d\tau + 2\int_{-\infty}^{t}\mu(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial\tau}d\tau\\&+\delta_{ij}\int_{-\infty}^{t}\alpha(t-\tau)\frac{\partial\theta}{\partial\tau}d\tau\end{aligned} \tag{16}$$

上式から,もし $\varepsilon_{ij} = 0$ かつ $\theta(t) = H(t)$ であるならば,$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\alpha(t)$ となる.すなわち,ひずみが抑制され,初期に温度が単位ステップとして与えられ,以降は一定に保たれるとき,$\alpha(t)$ は等方粘弾性材料において静水圧を意味することになる.

III. Endochronic 理論の熱力学的基礎[2~4)]

前章における粘弾性材料の熱力学的考察を用いて,等温場において微小変形をする材料を対象に,Endochronic 理論の基礎概念を検討する.また,ひずみ速度に依存しない変形状態を考えて,(1),(2)式で定義される intrinsic time を導入する.温度勾配がないとき $\theta_{,i} = 0$ であるから,(5)$_4$ 式から

$$\theta\dot{\gamma} = -\frac{\partial\Psi}{\partial q_r}\dot{q}_r \geq 0$$

また,intrinsic time measure の定義から $d\zeta/dt > 0$ であるから,

$$\theta\frac{d\gamma}{d\zeta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial q_r}\frac{dq_r}{d\zeta} \geq 0 \tag{17}$$

となる.一方,前章での議論と同様にして,$\theta(d\gamma/d\zeta)$ の展開に対して次式が得られる.

$$\theta\frac{d\gamma}{d\zeta} = b_{rs}\frac{dq_r}{d\zeta}\frac{dq_s}{d\zeta} \tag{18}$$

したがって,(17),(18)式が同時に成り立つためには,次式が必要である.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial q_r} + b_{rs}\frac{dq_s}{d\zeta} = 0 \tag{19}$$

ここで,内部変数 q_r に対して2階テンソルの特性を与え,4階テンソルの取扱いに一般性をもたせることにする.つまり,内部変数 q^r_{ij} は物質座標系の2階対称テンソルで,自由エネルギ密度 Ψ と他の熱力学的諸量は ε_{ij}, θ, q^r_{ij} $(r = 1, 2, \cdots, n)$ の関数であるとする.このとき,

(19)式は次のように書ける.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial q_{ij}^r}+b_{ijkl}^r\frac{dq_{kl}^r}{d\zeta}=0 \quad (r \text{ について総和をとらない}) \tag{20}$$

ただし，次の熱力学的関係は成立する.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ \eta &= -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

一般に(20)式は q_{ij}^r についての n 個の非線形常微分方程式系を構成し，その解はひずみ履歴としての q_{ij}^r を与える．ここで，4階テンソル b_{ijkl}^r は材料の散逸特性を支配する抵抗テンソルである．そして，$b_{ijkl}^r=b_{jikl}^r(\zeta)$ とおく．等方性材料の場合，次のように表すことができる.

$$b_{ijkl}^r=b_1^r\delta_{ij}\delta_{kl}+b_2^r\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{22}$$

さらに，(2)式の関数 $f(\zeta)$ を用いて次のようにおく.

$$b_1^r=b_1^r(\zeta)=b_{10}^r f(\zeta),\ b_2^r=b_2^r(\zeta)=b_{20}^r f(\zeta) \tag{23}$$

ここに，b_{10}^r と b_{20}^r は定数である.

いま，等方性材料に対して，自由エネルギ密度 Ψ を ε_{ij}, θ, q_{ij}^r の2次形式で与えると，次式が得られる.

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2}A_1\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}+\frac{1}{2}A_2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}+B_1^r\varepsilon_{ii}q_{jj}^r \\ &\quad +B_2^r\varepsilon_{ij}q_{ij}^r+\frac{1}{2}\sum_r(C_1^r q_{ii}^r q_{jj}^r+C_2^r q_{ij}^r q_{ij}^r) \\ &\quad +D\theta\varepsilon_{ii}+E^r\theta q_{ii}^r+\frac{1}{2}F\theta^2 \end{aligned} \tag{24}$$

これを(21)式へ代入すると

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{ij} &= A_1\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+A_2\varepsilon_{ij}+B_1^r\delta_{ij}q_{kk}^r+B_2^r q_{ij}^r \\ &\quad +D\theta\delta_{ij} \\ -\eta &= D\varepsilon_{kk}+E^r q_{kk}^r+F\theta \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

(2)，(23)式を用いると，(20)式は次のようになる.

$$\begin{aligned} &B_1^r\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+B_2^r\varepsilon_{ij}+C_1^r\delta_{ij}q_{kk}^r+C_2^r q_{ij}^r \\ &\quad +E^r\delta_{ij}\theta+b_{10}^r\,\delta_{ij}\frac{dq_{kk}^r}{dz}+b_{20}^r\frac{dq_{ij}^r}{dz}=0 \end{aligned} \tag{26}$$

(r について総和をとらない)

上の微分方程式を解き，得られた q_{kk}^r および q_{ij}^r を(25)式へ代入すると次の関係が得られる．ただし，初期の基準状態は $z=0$ であるとする.

$$\left.\begin{aligned} S_{ij} &= \left(A_2-\sum_r\frac{B_2^r B_2^r}{C_2^r}\right)e_{ij} \\ &\quad +\sum_r\frac{B_2^r B_2^r}{C_2^r}\int_0^z e^{-\rho_r(z-z')}\frac{\partial e_{ij}}{\partial z'}dz' \\ \sigma &= \frac{\sigma_{kk}}{3}=\left(A_0-\sum_r\frac{B_0^r B_0^r}{C_0^r}\right)\varepsilon_{kk} \\ &\quad +\sum_r\frac{B_0^r B_0^r}{C_0^r}\int_0^z e^{-\lambda_r(z-z')}\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z'}dz' \\ &\quad +\left(D-\sum_r\frac{B_0^r E^r}{C_0^r}\right)\theta \\ &\quad +\sum_r\frac{B_0^r E^r}{C_0^r}\int_0^z e^{-\lambda_r(z-z')}\frac{\partial \theta}{\partial z'}dz' \\ -\eta &= \left(D-\sum_r\frac{B_0^r E^r}{C_0^r}\right)\varepsilon_{kk} \\ &\quad +\sum_r\frac{B_0^r E^r}{C_0^r}\int_0^z e^{-\lambda_r(z-z')}\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z'}dz' \\ &\quad +\left(F-\sum_r\frac{E^r E^r}{C_0^r}\right)\theta \\ &\quad +\sum_r\frac{E^r E^r}{C_0^r}\int_0^z e^{-\lambda_r(z-z')}\frac{\partial \theta}{\partial z'}dz' \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} &A_0=A_1+\frac{1}{3}A_2,\ B_0^r=B_1^r+\frac{1}{3}B_2^r \\ &C_0^r=C_1^r+\frac{1}{3}C_2^r,\ b_{00}^r=b_{10}^r+\frac{1}{3}b_{20}^r \\ &\lambda_r=\frac{C_0^r}{b_{00}^r},\ \rho_r=\frac{C_2^r}{b_{20}^r} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

(27)式は次のような簡潔な形で表現できる.

$$\left.\begin{aligned} S_{ij} &= 2\int_0^z \mu(z-z')\frac{\partial e_{ij}}{\partial z'}dz' \\ \sigma &= \frac{\sigma_{kk}}{3}=\int_0^z K(z-z')\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z'}dz' \\ &\quad +\int_0^z D(z-z')\frac{\partial \theta}{\partial z'}dz' \\ -\eta &= \int_0^z D(z-z')\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z'}dz' \\ &\quad +\int_0^z F(z-z')\frac{\partial \theta}{\partial z'}dz' \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} 2\mu(z) &= \left(A_2-\sum_r\frac{B_2^r B_2^r}{C_2^r}\right)H(z) \\ &\quad +\sum_r\frac{B_2^r B_2^r}{C_2^r}e^{-\rho_r z} \\ K(z) &= \left(A_0-\sum_r\frac{B_0^r B_0^r}{C_0^r}\right)H(z) \\ &\quad +\sum_r\frac{B_0^r B_0^r}{C_0^r}e^{-\lambda_r z} \\ D(z) &= \left(D-\sum_r\frac{B_0^r E^r}{C_0^r}\right)H(z) \\ &\quad +\sum_r\frac{B_0^r E^r}{C_0^r}e^{-\lambda_r z} \\ F(z) &= \left(F-\sum_r\frac{E^r E^r}{C_0^r}\right)H(z) \\ &\quad +\sum_r\frac{E^r E^r}{C_0^r}e^{-\lambda_r z} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

ただし，$H(z)$ は Heaviside のステップ関数，S_{ij} は偏差応力テンソル，e_{ij} は偏差ひずみテンソル，σ は静水圧応力，ε_{kk} は体積ひずみである.

変形が等温である場合を考えると，$\frac{\partial \theta}{\partial z}=0$ として(29)式から次式が得られる.

$$\left.\begin{aligned} S_{ij} &= 2\int_0^z \mu(z-z')\frac{\partial e_{ij}}{\partial z'}dz' \\ \sigma &= \frac{\sigma_{kk}}{3} = \int_0^z K(z-z')\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z'}dz' \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

核関数 $\mu(z)$ が単一指数項のみで表わされるとき，$(31)_1$ 式は古典的塑性論においてよく知られる Prandtl-Reuss の関係を表すことが示されている.[11] したがって，Endochronic 理論は Prandtl-Reuss の関係を特別の場合として含んでいるといえる．従来の塑性論では，パラメータ z を降伏曲面と見なすことになるが，Endochronic 理論では降伏曲面とは関係なく，材料が変形状態にあるときは常に $dz>0$ であり，変形がおこらないときのみ $dz=0$ である．

IV. 新しい Endochronic 理論

(1)式で定義される intrinsic time measure を用いた場合，載荷—除荷—再載荷に対する応力—ひずみ曲線のヒステリシスループが閉じないことになる．つまり，いわゆる Drucker の安定仮説が満足されない．例えば，一次元の純せん断の状態を考えると，応力—ひずみ曲線の傾向は Fig. 1 のようになる．そこで，τ はせん断応力，γ はせん断ひずみである．一般的な材料（コンクリート，土，金属など）においては，このヒステリシスループは閉じることが観測されている．

このような Endochronic 理論の欠点を除くため，材料の散逸特性を合理的に表現できる intrinsic time が導入された.[10] すなわち，偏差挙動と静水圧挙動を支配する別々の intrinsic time measure ζ_D と ζ_H が次のように定義された．

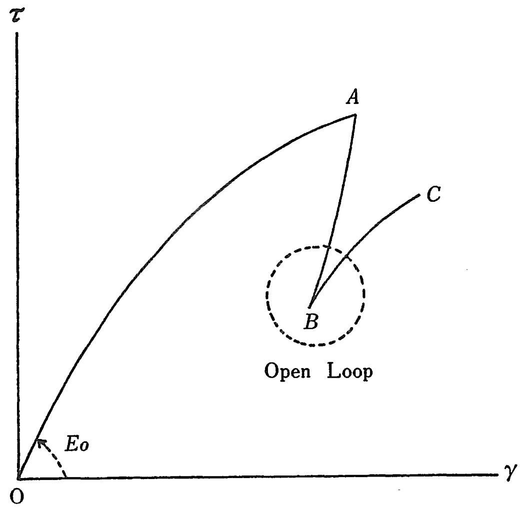


Fig.1　せん断応力—ひずみ曲線

$$\left.\begin{aligned} d\zeta_D &= \|de_{ij}^p\|,\ de_{ij}^p = de_{ij} - \frac{1}{2\mu_0}dS_{ij} \\ d\zeta_H &= |d\varepsilon_{kk}^p|,\ d\varepsilon_{kk}^p = d\varepsilon_{kk} - \frac{1}{K_0}d\sigma \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

ここで，e_{ij}^p は偏差ひずみテンソルの塑性成分，ε_{kk}^p は体積ひずみの塑性成分，$\|\cdots\|$ はテンソルのノルム，$|\cdots|$ は絶対値，μ_0 と K_0 はそれぞれせん断弾性係数と体積弾性係数である．そして，偏差挙動と静水圧挙動に対する別々の intrinsic time scale z_D と z_H が次で定義される．

$$\left.\begin{aligned} dz_D &= \frac{d\zeta_D}{f_D(\zeta_D)},\ f_D(0) = 1 \\ dz_H &= \frac{d\zeta_H}{f_H(\zeta_H)},\ f_H(0) = 1 \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

ここで，f_D と f_H は硬化関数と呼ばれる正関数である．

いま，微小変形と等温過程の条件下で，等方性材料の内部散逸機構を偏差と静水圧の成分に分け，各成分の連成効果はないものとする．それぞれの散逸機構は内部変数 p_{ij}^r 及び q^r によって表されるとする．ただし，p_{ij}^r と q^r はそれぞれ内部変数 q_{ij}^r の偏差成分及び体積成分である．つまり，q_{ij}^r は次のように表される．

$$q_{ij}^r = p_{ij}^r + \frac{1}{3}\delta_{ij}q^r \quad (34)$$

このとき，自由エネルギ密度 Ψ は次のように偏差と静水圧の各成分に分けることができる．

$$\Psi = \Psi_D(e_{ij}, p_{ij}^r) + \Psi_H(\varepsilon_{kk}, q^r) \quad (35)$$

この Ψ_D と Ψ_H はさらに弾性と塑性の各成分に分けられる．すなわち，

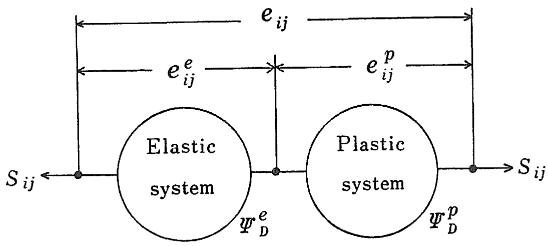
$$\left.\begin{aligned} \Psi_D &= \Psi_D^e(e_{ij}^e) + \Psi_D^p(e_{ij}^p, p_{ij}^r) \\ \Psi_H &= \Psi_H^e(\varepsilon_{kk}^e) + \Psi_H^p(\varepsilon_{kk}^p, q^r) \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

ここに，上付添字 e と p はそれぞれ弾性成分と塑性成分を意味する．この偏差成分と静水圧成分の力学的機構について，弾性部分と塑性部分との分割を幾何学的に表示すると Fig. 2 のようになる．そして，(20)式と$(21)_1$ 式に対応する偏差と静水圧の各成分の関係式は次のようになる．

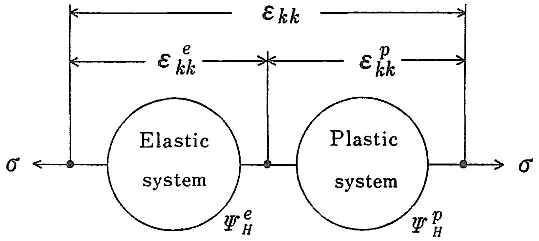
$$\left.\begin{aligned} & S_{ij} = \frac{\partial \Psi_D}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial \Psi_D^e}{\partial e_{ij}^e} = \frac{\partial \Psi_D^p}{\partial e_{ij}^p} \\ & \frac{\partial \Psi_D^p}{\partial p_{ij}^r} + b_{20}^r \frac{dp_{ij}^r}{dz_D} = 0 \\ & \qquad (r\text{ について総和をとらない}) \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

$$\left.\begin{aligned} & \sigma = \frac{\partial \Psi_H}{\partial \varepsilon_{kk}} = \frac{\partial \Psi_H^e}{\partial \varepsilon_{kk}^e} = \frac{\partial \Psi_H^p}{\partial \varepsilon_{kk}^p} \\ & \frac{\partial \Psi_H^p}{\partial q^r} + b_{00}^r \frac{dq^r}{dz_H} = 0 \\ & \qquad (r\text{ について総和をとらない}) \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

ただし，(22)式及び(33)式を用いて次のようにおいた．



(a)偏差成分



(b)静水圧成分

Fig.2　力学的機構の幾何学的表示

$$b^r_0 = b^r_1 + \frac{1}{3}b^r_2$$
$$b^r_2 = b^r_{20}f_D(\zeta_D),\ b^r_0 = b^r_{00}f_H(\zeta_H)$$

ここで，b^r_{20} と b^r_{00} は定数である．

1. 降伏曲面をもつ構成式

(1)　構成式の誘導とその特徴[10)11)]

(33)式で示される intrinsic time scale を用いたとき，(37)，(38)式から前章と同様にして，等温下の等方性材料に対して次のような構成式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} S_{ij} &= 2\int_0^{z_D}\mu(z_D-z')\frac{\partial e_{ij}}{\partial z'}dz' \\ \sigma &= \frac{\sigma_{kk}}{3} = \int_0^{z_H}K(z_H-z')\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z'}dz' \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

まず偏差成分について検討する．(32)$_1$ の第2式を用いると，応力を偏差ひずみの塑性成分に関して表現することができる．すなわち，

$$S_{ij} = 2\int_0^{z_D}\rho(z_D-z')\frac{\partial e^p_{ij}}{\partial z'}dz' \quad (40)$$

ただし，$\rho(z)$ と $\mu(z)$ のあいだの関係は，ラプラス変換を用いると次のようになる．

$$\mu(z) = \rho(z) - \frac{1}{\mu_0}\int_0^z \rho(z-z')\frac{d\mu}{dz'}dz' \quad (41)$$

$$\rho(0) = \infty \quad (42)$$

ここで，核関数 $\mu(z)$ が次のような有限指数級数で表されるとする．ただし，μ_r と α_r は正定数である．

$$\mu(z) = \sum_{r=1}^{n}\mu_r e^{-\alpha_r z} \quad (43)$$

このとき，Heaviside 展開定理を用いて，核関数 $\rho(z)$ は次のように表すことができる．

$$\rho(z) = \rho_0\delta(z) + \rho_1(z),\ \rho_1(z) = \sum_{r=1}^{n-1}\rho_r e^{-\beta_r z} \quad (44)$$

ただし，$\delta(z)$ は Dirac のデルタ関数，ρ_0 及び ρ_r，β_r はすべて正定数である．すると，(44)式から(40)式の偏差成分の構成式は次のようになる．

$$S_{ij} = 2\rho_0\frac{de^p_{ij}}{dz_D} + 2\int_0^{z_D}\rho_1(z_D-z')\frac{\partial e^p_{ij}}{\partial z'}dz' \quad (45)$$

ここで，次のようにおく．

$$S^0_Y = 2\rho_0,\ S_Y = S^0_Y f_D(\zeta_D) \quad (46)$$

$$r_{ij} = 2\int_0^{z_D}\rho_1(z_D-z')\frac{\partial e^p_{ij}}{\partial z'}dz' \quad (47)$$

すると，単調載荷過程において，$\|S_{ij}\| \leq S_Y$ のとき $z_D = 0$ となり，応答は弾性的である．しかし，$\|S_{ij}\| > S_Y$ のとき，応答は非弾性的となり(45)式が適用できる．(46)，(47)式を用いると，(45)式は次のように書ける．

$$\left.\begin{aligned} \|S_{ij}-r_{ij}\| &= S^0_Y f_D(\zeta_D) = S_Y \\ de^p_{ij} &= \frac{1}{S^0_Y f_D(\zeta_D)}(S_{ij}-r_{ij})d\zeta_D \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

そこで，$S^0_Y \neq 0$（すなわち $\rho_0 \neq 0$）の場合について以下のことがいえる．

(i)　$f_D(S_D) = 1$ のとき

このとき(48)式は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned} \|S_{ij}-r_{ij}\| &= S^0_Y \\ de^p_{ij} &= \frac{1}{S^0_Y}(S_{ij}-r_{ij})d\zeta_D \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

そして，$\rho_1(z) = 0$ のとき，つまり $r_{ij} = 0$ であるならば，(49)$_2$ 式は次のようになる．

$$de^p_{ij} = \frac{1}{S^0_Y}S_{ij}\,d\zeta_D \quad (50)$$

これは，従来の塑性論における von Mises の降伏規準をもつ弾完全塑性体の構成関係を示すことになる．

一方，$\rho_1(z) \neq 0$ のとき，つまり $r_{ij} \neq 0$ であるならば，上の(49)式は従来の塑性論における移動硬化を示すことになる．この関係は，偏差応力空間における超球を示す．S^0_Y はその半径を表し，r_{ij} は超球の中心と応力空間の原点を結ぶ動径テンソルである．この超球面は降伏曲面と考えることができ，(49)$_2$ 式は塑性ひずみ増分が降伏曲面に垂直であることを示す．これらの結果は Fig. 3 のように図示できる．したがって，ここでは移動硬化の概念が仮定ではなく導かれた結果となる．核関数 $\rho_1(z)$ が単一指数項からなるとすると，すなわち

$$\rho_1(z) = \rho_1 e^{-\alpha z} \quad (51)$$

のとき，(47)式から次式が得られる．

$$dr_{ij} = -\alpha\cdot dz_D\cdot r_{ij} + 2\rho_1\cdot de^p_{ij}$$

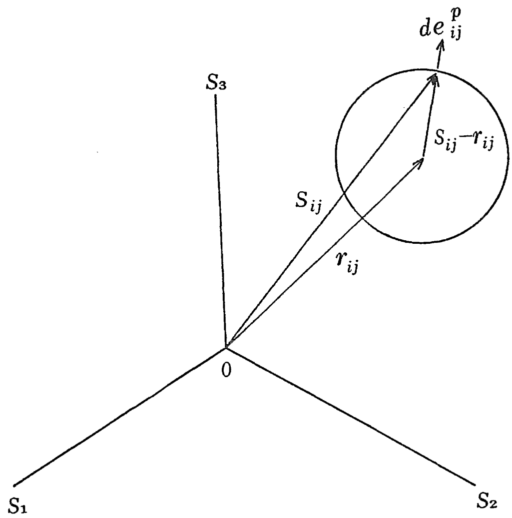


Fig.3　降伏曲面の幾何学的表示

上式に(49)式を代入すると次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned} dr_{ij} &= \frac{2\rho_1}{S_Y^0} dz_D (S_{ij}-\beta r_{ij}) \\ \beta &= 1+\frac{\alpha S_Y^0}{2\rho_1} \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

上式は移動硬化に対する別の考え方を示しており，r_{ij} の移動は S_{ij} における降伏曲面の法線方向（$S_{ij}-r_{ij}$ の方向）ではなく，β の値に依存して法線方向から傾斜した方向である．これは特別な場合で，一般には r_{ij} の移動方向は核関数 $\rho_1(z)$ を含んだ(47)式から決定される．

(ii)　$f_D(\zeta_D)$ が単調増加のとき

$\rho_1(z)=0$，つまり $r_{ij}=0$ であるならば，(48)式は従来の塑性論における等方硬化と von Mises の降伏規準を示すことになる．一方，$\rho_1(z)\neq 0$，つまり $r_{ij}\neq 0$ であるならば，(48)式から降伏曲面は移動と拡大をする．また，上記のいずれの場合も，塑性ひずみ増分は降伏曲面に垂直となる．

(iii)　$f_D(\zeta_D)$ が単調減少のとき

前の場合と同様に，(48)式から，$\rho_1(z)=0$ のとき降伏曲面は縮小し，$\rho_1(z)\neq 0$ のとき降伏曲面は移動と縮小をする．また，いずれの場合も，塑性ひずみ増分は降伏曲面に垂直となる．

以上の検討は静水圧成分についても同様に行える．したがって，ここでは静水圧成分の場合を省略する．

(2)　塑性および弾性（除荷）経路

まず，偏差応答についての増分過程は次の二つの場合が考えられる．

(i)　$\|S_{ij}-r_{ij}\|<S_Y$ のとき

このときの応力 S_{ij} は降伏曲面内にあり，この応力状態からの増分過程は弾性的である．

(ii)　$\|S_{ij}-r_{ij}\|=S_Y$ のとき

この状態からの増分過程には二つの可能性が考えられる．(45)，(46)，(47)式に対して，Dirac のデルタ関数の漸近表示を用いると，intrinsic time measure 増分 $d\zeta_D$ は次の二通りになる．

$$d\zeta_D=\begin{cases} \dfrac{(S_{ij}-r_{ij})de_{ij}}{\dfrac{1}{\mu_0}\left\{S_Y\ (\mu_0+\rho_1(0))+\dfrac{(S_{ij}-r_{ij})h_{ij}}{f_D(\zeta_D)}\right\}} \\ 0 \end{cases} \quad (53)$$

ここで，

$$h_{ij}=\int_0^{z_D}\rho_1'(z_D-z')\frac{\partial e^p_{ij}}{\partial z'}dz',\ \rho_1'(z)=\frac{d\rho_1(z)}{dz} \quad (54)$$

(a)　$(S_{ij}-r_{ij})de_{ij}>0$ のとき

このとき $d\zeta_D>0$ であり，$d\zeta_D$ は(53)の第1式により与えられる．この過程は塑性応答が適用される載荷である．

(b)　$(S_{ij}-r_{ij})de_{ij}<0$ のとき

このとき，$d\zeta_D$ は(53)の第2式により与えられる．この過程の応答は弾性的である．したがって，この場合の条件 $(S_{ij}-r_{ij})de_{ij}<0$ は，その増分過程が除荷であることを定義する．つまり，降伏曲面上にある応力状態において，ひずみ増分 de_{ij} が応力点を通る動径テンソル $(S_{ij}-r_{ij})$ と鋭角をなすとき，その増分過程は散逸的で $d\zeta_D>0$ となるが，この角度が直角以上のとき，その増分過程は弾性的で $d\zeta_D=0$ となる．

(c) $\dfrac{1}{\mu_0}\left\{S_Y(\mu_0+\rho_1(0))+\dfrac{(S_{ij}-r_{ij})h_{ij}}{f_D(\zeta_D)}\right\}\to 0$ のとき

この状態は $d\zeta_D$ が限りなく大きくなり，材料は限りなく流動することになる．

(3)　増分応答の決定

材料の構成特性が決まると，変形履歴のある過程において S_{ij} と h_{ij} がわかる．ひずみ増分 de_{ij} が与えられると，$(S_{ij}-r_{ij})de_{ij}$ の符号に応じて(53)式より $d\zeta_D$ が決まる．その符号が負か零のとき $d\zeta_D=0$ で，dS_{ij} は弾性関係から求められる．もし符号が正のとき，$d\zeta_D$ は(53)の第1式で与えられ，(45)式から de^p_{ij} が決まり，$dS_{ij}=2\mu_0(de_{ij}-de^p_{ij})$ の関係から dS_{ij} がわかる．

2.　降伏曲面をもたない構成式

前述のように，応力応答はひずみの塑性成分に関して表現することができた．すなわち，

$$\left.\begin{aligned} S_{ij} &= 2\int_0^{z_D}\rho(z_D-z')\frac{\partial e^p_{ij}}{\partial z'}dz' \\ \sigma &= \int_0^{z_H}\phi(z_H-z')\frac{\partial \varepsilon^p_{kk}}{\partial z'}dz' \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

ただし，次の条件を満たす必要がある．

$$\rho(0)=\phi(0)=\infty \tag{56}$$

また，S_{ij} と σ が有界であることから，任意の有限領域において $\rho(z_D)$ 及び $\phi(z_H)$ は積分可能である必要がある．

まず偏差成分について，その核関数の形を検討する．一般的に，核関数 $\rho(z_D)$ は次のように減衰指数級数で表現できる．ただし，項数 r は有限あるいは無限である．

$$\rho(z_D)=\sum_r \rho_r e^{-\beta_r z_D} \tag{57}$$

(56)式の条件を考慮すると，$\rho(z_D)$ の一項（あるいはそれ以上の項）を Dirac のデルタ関数とすることができる．したがって，次のように書ける．

$$\rho(z_D)=\rho_0\delta(z_D)+\rho_1(z_D) \tag{58}$$

ここに，ρ_0 は定数，$\delta(z_D)$ は Dirac のデルタ関数である．そして，核関数の形について次のようにまとめることができる．

(i) $\rho_0\neq 0$, $\rho_1(0)<\infty$ のとき

この場合，降伏応力が存在して，塑性ひずみの始まりにおいて応力—ひずみ曲線の勾配は有限となる．したがって，このとき降伏曲面をもつことになる．

(ii) $\rho_0\neq 0$, $\rho_1(0)=\infty$ のとき

この場合，降伏応力が存在して，塑性ひずみの始まりにおいて応力—ひずみ曲線の勾配は無限大となる．そして，降伏点において応力—ひずみ曲線は連続である．このとき降伏曲面をもつことになる．

(iii) $\rho_0=0$, $\rho_1(0)=\infty$ のとき

この場合，降伏応力は存在せず，載荷の始まりから徐々に塑性変形が進行する．このとき降伏曲面をもたないことになる．我々が扱うコンクリートや土に対しては，この場合の構成式が重要になる．

以上のことは静水圧成分の核関数に対してもいえる．したがって，上の(iii)の場合に(55)式は次のように書ける．ただし，ここで改めて $\mu(z)=\rho_1(z)$, $K(z)=\phi_1(z)$ とした．

$$\left.\begin{aligned} S_{ij}&=2\int_0^{z_D}\mu(z_D-z')\frac{\partial e^p_{ij}}{\partial z'}dz' \\ \sigma&=\int_0^{z_H}K(z_H-z')\frac{\partial \varepsilon^p_{kk}}{\partial z'}dz' \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

また，$\rho_1(0)=\phi_1(0)=\infty$ の条件は次のようになる．

$$\mu(0)=K(0)=\infty \tag{60}$$

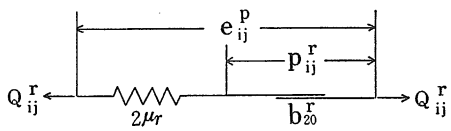
さらに(57)式を考慮すると，上式の条件から核関数は次のように表せる．

$$\left.\begin{aligned} \mu(z)&=\sum_{r=1}^{\infty}\mu_r e^{-\alpha_r z} \\ K(z)&=\sum_{r=1}^{\infty}K_r e^{-\lambda_r z} \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

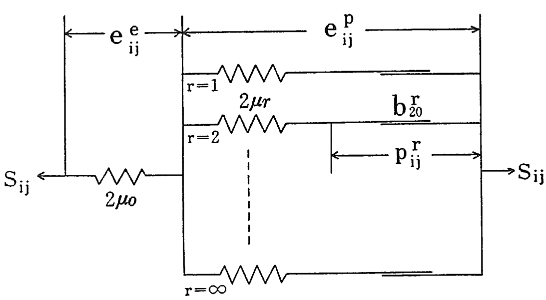
ここに，μ_r, α_r, K_r, λ_r は正定数である．この級数は $z=0$ において発散し，それ以外のすべての z に対して収束する必要がある．

次に，この降伏曲面をもたない構成式を力学的モデルにより考察して解釈することができる．まず偏差成分について，Fig. 2(a) の複合系に対応した力学的モデルを Fig. 4(b) に示す．自由エネルギ密度 Ψ_D は実際に蓄積されたエネルギであるから，$(36)_1$ 式は次のようになる．

$$\begin{aligned} \Psi_D&=\Psi^e_D+\Psi^p_D \\ &=\mu_0\|e^e_{ij}\|^2+\sum_r\mu_r\|e^p_{ij}-p^r_{ij}\|^2 \\ &=\mu_0\|e_{ij}-e^p_{ij}\|^2+\sum_r\mu_r\|e^p_{ij}-p^r_{ij}\|^2 \end{aligned} \tag{62}$$

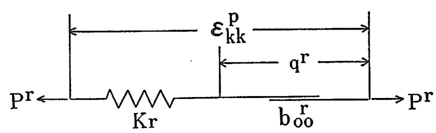


(a)単純 endochronic 要素

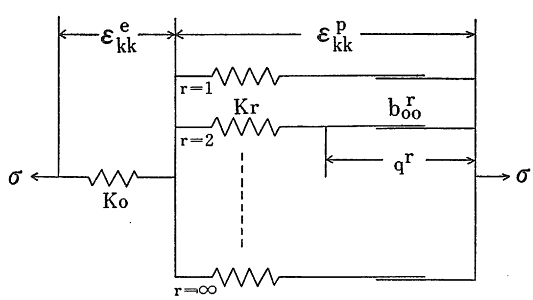


(b)単純 endochronic 要素の並列結合

Fig.4 偏差成分の力学的モデル



(a)単純 endochronic 要素



(b)単純 endochronic 要素の並列結合

Fig.5 静水圧成分の力学的モデル

$(37)_1$ 式から

$$S_{ij}=\frac{\partial \Psi_D}{\partial e_{ij}}=2\mu_0(e_{ij}-e^p_{ij})=2\mu_0 e^e_{ij} \tag{63}$$

一方，Fig. 4(a) に示す1本の単純 endochronic 要素は，線形スプリングと endochronic スライダーの結合からなる．このスプリングとスライダーの応答を次式で与える．

$(37)_2$式より

$$\left.\begin{aligned} Q^r_{ij} &= -\frac{\partial \Psi^p_D}{\partial p^r_{ij}}=2\mu_r(e^p_{ij}-p^r_{ij}) \\ Q^r_{ij} &= b^r_{20}\frac{dp^r_{ij}}{dz_D} \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

ここに，$2\mu_r$ はスプリング定数，b^r_{20} はスライダー抵抗である．上式から

$$\frac{dQ^r_{ij}}{dz_D}+\alpha_r Q^r_{ij}=2\mu_r\frac{de^p_{ij}}{dz_D},\ \ \alpha_r=\frac{2\mu_r}{b^r_{20}} \tag{65}$$

これを解くと

$$Q^r_{ij}=2\mu_r\int_0^{z_D} e^{-\alpha_r(z_D-z')}\frac{\partial e^p_{ij}}{\partial z'}dz' \tag{66}$$

ただし，基準状態で $Q^r_{ij}=0$ とする．そして，Fig. 4(b) のモデルで示される単純 endochronic 要素の無限並列結合を考えると，応力 S_{ij} は次のようになる．

$$S_{ij}=\sum_{r=1}^{\infty}Q^r_{ij}=\sum_{r=1}^{\infty}2\mu_r\int_0^{z_D} e^{-\alpha_r(z_D-z')}\frac{\partial e^p_{ij}}{\partial z'}dz' \tag{67}$$

上式は，核関数として$(61)_1$ 式を用いたときの偏差成分の構成式$(59)_1$ 式を表している．また，この関係は塑性ひずみ e^p_{ij} についてであるから，全偏差ひずみ e_{ij} に関しては，(63)，(67)式から，Fig. 4(b) に示すように，さらに弾性スプリング（定数 $2\mu_0$）を加えて完全な形の力学的モデルができる．次に，静水圧成分についても同様に，Fig. 5 に示す力学的モデルが考えられる．この場合については省略する．以上のように，降伏曲面をもたない構成式は力学的モデルにより解釈することができる．

V. あとがき

内部状態変数を用いた非可逆熱力学理論を基に，積分型 Endochronic 理論の展開を述べた．降伏曲面の仮定を必要としない Endochronic 理論は，最初金属材料に対して提案された．しかし，閉じたヒステリシスループが得られないこと，すなわち，Drucker の安定仮説が満たされないことや，金属材料に対する静水圧挙動は弾性的であるとして定式化されたことなどから，コンクリート材料等の挙動を表現する上では適切な構成式とはなり難い．そこで，新しい intrinsic time の定義を行い，偏差挙動と静水圧挙動に対する別々の変数を考慮した理論へと発展してきた．ここでの定式化は材料の等方性と等温条件下での微小変形を仮定しているが，降伏曲面や載荷条件などの仮定は設けずに三軸挙動を扱っている．また，ここでは Helmholtz の自由エネルギ密度を用いた定式化について述べたが，同様にして Gibbs の自由エネルギ密度を用いた定式化も可能である．そして，従来の塑性論における降伏曲面や載荷条件は，この Endochronic 理論から導かれる特徴から解釈することができた．

一方，Bazant 等による増分型 Endochronic 理論があるが，これは積分型 Endochronic 理論における核関数を一項の指数級数（単一指数関数）で表示した場合に導かれる．つまり，一つの内部変数のみを考えている．そして，その構成式に含まれるパラメータは，多数の材料関数と材料定数によってデータ曲線に合うように選ばれる．この材料関数および定数の決定は経験的な要素が多く，かなり複雑でもある．したがって，増分型 Endochronic 理論は，コンクリート等の三軸挙動をうまく表現することが可能であるが，一般的に利用しにくい理論でもある．

以上のように，積分型 Endochronic 理論は intrinsic time を用いた畳込み積分（記憶積分）の形式で応答を表現する理論であるが，一般に材料の応答は体積成分（静水圧成分）とせん断成分（偏差成分）が同時に関与すると考えられるため，その連成効果をいかに表現するかの問題が今後の大きな課題である．そして，従来の粘弾性理論における実時間 (clock time) を用いた積分型構成式と異なり，この Endochronic 理論はひずみ履歴をパラメータとした積分型構成式であるから，その三次元的な数値計算法が非常に難しく，合理的な計算法の開発が望まれる．

最後に，本研究をすすめるに当り，御指導を賜った京都大学農学部長谷川高士教授，および本報告をまとめる機会を下さった本学農学部鳥山教授，野中助教授に深甚なる感謝の意を表します．

引 用 文 献

1. Valanis, K. C.: J. of Math. and Phys. **47**: 262–275, 1968.
2. Valanis, K. C.: Arch. Mech. **23**(4) : 517–551, 1971.
3. Valanis, K. C.: Arch. Mech. **27**(5–6) : 857–868, 1975.
4. Wu, H. C., Valanis, K. C. and Yao, R. F.: Letters in Applied and Engng. Science 4(2) : 127–136, 1975.

5. BAZANT, Z. P. and BHAT, P. D.: J. of Engng. Mech. **102**(4): 701–722, 1976.
6. BAZANT, Z. P. and SHIEH, C. L.: Nuclear Engng. and Design **47**: 305–315, 1978.
7. BAZANT, Z. P. and SHIEH, C. L.: J. of Engng. Mech. **106**(5): 929–950, 1980.
8. VALANIS, K. C. and READ, H. E.: Computers and Structures **8**: 503–510, 1978.
9. VALANIS, K. C. and KOMKOV, V.: Arch. Mech. **32**(1): 33–58, 1980.
10. VALANIS, K. C.: Arch. Mech. **32**(2): 171–191, 1980.
11. 長谷川高士・藤居良夫：農土学会誌　**53**(8): 19–26 1985.