

## 積分型 Endochronic 理論のコンクリートの挙動表現への応用

藤 居 良 夫\*

---

Application of Endochronic Theory with  
Kernels to Modeling Concrete Behavior  
Yoshio FUJII

---

The endochronic theory has been applied to various problem of metal plasticity without the notion of yield surface and specification of loading conditions. However, the formalization of this theory is not appropriate in modeling the behavior of concrete or soils, since it was assumed in this theory that the hydrostatic response is elastic and the coupling effect between shear and hydrostatic behavior (shear-hydrostatic interaction, dilatancy) does not take place.

In this paper, a way to consider the coupling effect between shear and hydrostatic behavior is explained by virtue of the coupling constant. Also, the method of determination of material functions and constants is examined, and two numerical methods in three dimensional state are shown to obtain the stress-strain relation. Moreover, the numerical procedure of finite element analysis of structures using this theory is shown.

### I. ま え が き

先の報告で示した<sup>2)</sup>積分型 Endochronic 理論は、金属材料に対して提案され、降伏曲面や載荷規準の仮定を必要とせずに、金属の種々の挙動表現にうまく適用されてきた。しかし、せん断挙動と静水圧挙動は連成せずに独立に起るとして定式化された(とくに、金属材料では、一般的に静水圧挙動は弾性的であると仮定される)ことから、このままの形では、コンクリートの力学的挙動を表現する上で適切な構成式とはなり難い。そこで、ここでは、せん断と静水圧挙動のあいだの連成効果を考慮する最も簡単な方法として、カップリング定数と呼ばれる一つのパラメータを intrinsic time に導入する場合を考える。そして、このときの材料関数と材料定数の決定方法と構成関係を求める二つの三次元的数値計算法について述べる。さらに、構造物の有限要素解析にこの理論を適用する場合について、増分荷重に対する繰返し反復計算の方法を示す。

\* 農村工学講座

### II. コンクリートの挙動表現

最初、金属材料に対して提案された Endochronic 理論をコンクリートの挙動の表現に適用するためには、とくにコンクリートに対する次の特性を考慮する必要がある。

(a) 静水圧挙動は金属材料と異なり非弾性的であり、応力-ひずみ曲線は Fig. 1 に示すように、初期の載荷過程において上に凸で、その後において下に凸となってくる。そして、最終的には線形な漸近線に近づく。また、除荷過程により塑性(残留)ひずみが生じ、載荷・除荷・再載荷過程に影響を与える硬化が起る。

(b) せん断応答は静水圧応力の大きさに影響される。コンクリートの場合、Fig. 2 に示すように、一般に静水圧応力が大きくなるほどせん断応力-ひずみ曲線は上方へくる。

(c) 一定の静水圧応力下でのせん断は体積ひずみの変化をひき起こす。すなわち、せん断と静水圧の相互作用(連成効果、ダイレイタンス)がある。

以下では、上述の特性を表現できる構成式について考

察し、そこに含まれる材料関数と定数の決定方法についても説明する。

1) **1. Intrinsic time**

変形履歴に依存し、その速度に独立である材料において、実時間 (clock time) は移行方程式の定式化に対して適切な時間尺度とならない。そこで、このような材料の移行方程式を定式化するため、先の報告で述べたように intrinsic time と呼ばれる時間尺度が導入された。そこでは、偏差挙動と静水圧挙動を支配する別々の intrinsic time measure が定義された。しかし、この定義では、せん断と静水圧挙動のあいだの連成効果を考慮することが困難である。したがって、intrinsic time measure のより一般的な定義として、塑性ひずみ空間における一つのひずみ経路を考える。その経路増分から、intrinsic time measure の増分  $d\zeta$  を次のように定義する。

$$d\zeta^2 = P_{ijkl} de_{ij}^p de_{kl}^p \quad (1)$$

ここで、 $P_{ijkl}$  は 4 階正定値テンソル、 $e_{ij}^p$  は塑性ひずみテンソルである。等方性材料の場合に限って考えてみると、 $P_{ijkl}$  は次のように表される。

$$P_{ijkl} = k_1^2 \delta_{ij} \delta_{kl} + k_2^2 \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2)$$

ここに、 $k_1, k_2$  は正定数である。このとき、(1)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} d\zeta^2 &= k_1^2 de_{ij}^p de_{kk}^p + k_2^2 de_{ij}^p de_{ij}^p \\ &= k_2^2 \|de_{ij}^p\|^2 + (k_1^2 + \frac{1}{3}k_2^2) |de_{kk}^p|^2 \end{aligned}$$

ここで、 $e_{ij}^p$  は偏差ひずみテンソル  $e_{ij}$  の塑性成分、 $e_{kk}^p$  は体積ひずみ  $\epsilon_{kk}$  の塑性成分、 $\|\dots\|$  はテンソルのノルム、 $|\dots|$  は絶対値である。ここで、一般性を失わないで  $k_2^2=1, (k_1^2 + \frac{1}{3}k_2^2)=k^2$  と表すと、 $d\zeta$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} d\zeta^2 &= \|de_{ij}^p\|^2 + k^2 |de_{kk}^p|^2 \\ &= d\zeta_D^2 + k^2 d\zeta_H^2 \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $k$  は正の材料定数である。このようにすると、せん断と静水圧挙動のあいだの連成効果を表現することができ、材料定数  $k$  の値がその連成効果の程度を支配するという意味から、 $k$  をカップリング定数と呼ぶ。さらに、偏差と静水圧に対する intrinsic time scala  $z_D$  と  $z_H$  をそれぞれ次のように定義する。

$$dz_D = \frac{d\zeta}{F_D}, \quad dz_H = \frac{d\zeta}{kF_H} \quad (4)$$

ただし、上式の  $k$  は(3)式で用いられるカップリング定数と同じである。この  $k$  を用いることは、誘導される純静水圧応答が  $k$  に依存しないことを表すためである。すなわち、 $k$  の値はせん断応答に対して効果をもち、連

成効果を表現するためのパラメータとなる。

2. 構成式

先の報告で示したように、Helmholtz の自由エネルギー密度  $\Psi$  は次のような 2 次形式で表現できる。ただし、等温条件下で微小変形をする等方性材料を対象とする。

$$\begin{aligned} \Psi_D &= \Psi_D^e + \Psi_D^p \\ &= \mu_0 \|e_{ij}^e\|^2 + \sum_r \mu_r \|e_{ij}^p - p_{ij}^r\|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_H &= \Psi_H^e + \Psi_H^p \\ &= \frac{1}{2} K_0 (\epsilon_{kk}^e)^2 + \frac{1}{2} \sum_r K_r (\epsilon_{kk}^p - q^r)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、下付添字  $D$  と  $H$  はそれぞれ偏差成分と静水圧成分、上付添字  $e$  と  $p$  はそれぞれ弾性成分と塑性成分、 $p_{ij}^r$  と  $q^r$  はそれぞれ内部変数  $q_{ij}^r$  の偏差成分およ

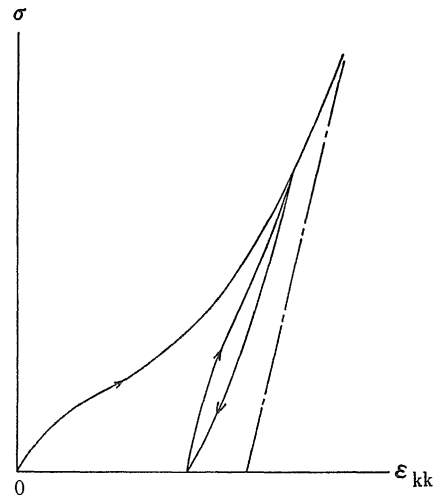


Fig. 1 静水圧応力-体積ひずみ曲線

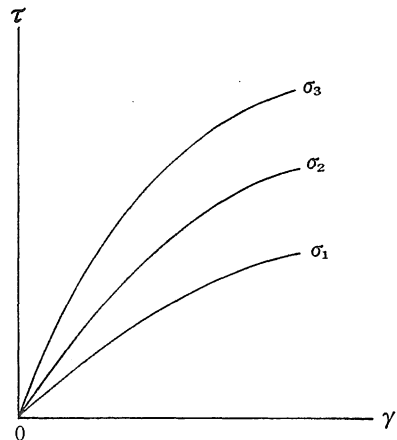


Fig. 2 一定静水圧応力下 ( $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ ) のせん断応力-ひずみ曲線

び体積分を表す。また、 $\mu_0, \mu_r, K_0, K_r$  は正定数であり、 $r$  は内部変数の数を表す。そして、いわゆる内部力は偏差成分と静水圧成分について次式で与えられる。

$$Q_{ij}^r = -\frac{\partial \Psi_D^p}{\partial p_{ij}^r}, P^r = -\frac{\partial \Psi_H^p}{\partial q^r} \quad (7)$$

したがって、Clausius-Duhem の不等式は次のようになる。

$$Q_{ij}^r \frac{d p_{ij}^r}{d \zeta} \geq 0, P^r \frac{d q^r}{d \zeta} \geq 0 \quad (8)$$

上式を満たす線形の intrinsic time measure 依存系を考えると、次のように表すことができる。

$$Q_{ij}^r = b_2^r \frac{d p_{ij}^r}{d \zeta}, P^r = b_0^r \frac{d q^r}{d \zeta} \quad (9)$$

ここで、 $b_2^r$  と  $b_0^r$  はそれぞれ、先の報告で示した抵抗テンソル  $b_{ijkl}^r$  の偏差成分と静水圧成分の係数である。上式は内部力を内部変数の変化量と線形に関係づけている内部構成式である。一般の熱力学においては、この式は散逸力（内部力）を流速と線形に関係づけることになり、いわゆる Onsager の関係といえる。すべての  $r$  について次の条件が成立つとき、上式は(8)式を満足する。

$$b_2^r > 0, b_0^r > 0 \quad (10)$$

(7), (9)式から、次の移行方程式が得られる。

$$\frac{\partial \Psi_D^p}{\partial p_{ij}^r} + b_2^r \frac{d p_{ij}^r}{d \zeta} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Psi_H^p}{\partial q^r} + b_0^r \frac{d q^r}{d \zeta} = 0 \quad (12)$$

(5), (6), (9)式を用いると、上式から内部力  $Q_{ij}^r$  と  $P^r$  に関する次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\mu_r}{b_2^r} Q_{ij}^r + \frac{d Q_{ij}^r}{d \zeta} &= 2\mu_r \frac{d e_{ij}^p}{d \zeta} \\ \frac{K_r}{b_0^r} P^r + \frac{d P^r}{d \zeta} &= K_r \frac{d \epsilon_{kk}^p}{d \zeta} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

先の報告で示した次の関係から、

$$S_{ij} = \frac{\partial \Psi_D}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial \Psi_D^p}{\partial e_{ij}^p}, \sigma = \frac{\partial \Psi_H}{\partial \epsilon_{kk}} = \frac{\partial \Psi_H^p}{\partial \epsilon_{kk}^p}$$

(5), (6), (7)式を用いると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= \sum_r Q_{ij}^r \\ \sigma &= \sum_r P^r \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここで、 $S_{ij}$  は偏差応力テンソル、 $\sigma = \sigma_{kk}/3$  は静水圧応力である。一般的に、 $b_{ijkl}^r$  は材料の変形状態に関連する変数に依存する。したがって、先の報告の場合と同様に次のようにおく。

$$b_2^r = b_{20}^r F_D, b_0^r = b_{00}^r F_H \quad (15)$$

ここに、 $b_{20}^r, b_{00}^r$  は定数であり、 $F_D, F_H$  は(4)式で与え

られる材料関数である。そして、いま次のようにおく。

$$\alpha_r = \frac{2\mu_r}{b_{20}^r}, \lambda_r = \frac{k K_r}{b_{00}^r} \quad (16)$$

すると、(13)式は(4)式を用いて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r Q_{ij}^r + \frac{d Q_{ij}^r}{d z_D} &= 2\mu_r \frac{d e_{ij}^p}{d z_D} \\ \lambda_r P^r + \frac{d P^r}{d z_H} &= K_r \frac{d \epsilon_{kk}^p}{d z_H} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

基準状態  $z_D = z_H = 0$  において  $S_{ij} = 0, \sigma = 0$  という初期条件と、自然状態において  $Q_{ij}^r(0) = 0, P^r(0) = 0$  であると定義して、基準状態を自然状態とすると、(17)式から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{ij}^r &= 2\mu_r \int_0^{z_D} e^{-\alpha_r(z_D - z')} \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z'} dz' \\ P^r &= K_r \int_0^{z_H} e^{-\lambda_r(z_H - z')} \frac{\partial \epsilon_{kk}^p}{\partial z'} dz' \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(14)式から、応力は塑性ひずみの履歴の畳込み積分（記憶積分）として得られる。

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= 2 \int_0^{z_D} \mu(z_D - z') \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z'} dz' \\ \sigma &= \int_0^{z_H} K(z_H - z') \frac{\partial \epsilon_{kk}^p}{\partial z'} dz' \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \mu(z) &= \sum_r \mu_r e^{-\alpha_r z} \\ K(z) &= \sum_r K_r e^{-\lambda_r z} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ただし、先の報告の議論から、核関数は  $\mu(0) = K(0) = \infty$  という条件を満たし、さらに次の条件が満足される必要がある。

$$\int_0^{z_D} \mu(z') dz' < \infty, \int_0^{z_H} K(z') dz' < \infty, (z_D, z_H < \infty) \quad (21)$$

ここで、(20)式の  $r$  は内部変数の数を表す。

### 3. 静水圧応答

コンクリートの静水圧挙動における硬化は圧縮化によると考えられ、ここでは、抵抗係数である  $b_0^r$  がこの現象を支配するものとする。したがって、(15)<sub>2</sub>式を次のように表す。

$$b_{00}^r = b_{00}^r F_H(\epsilon_{kk}^p) \quad (22)$$

ここに、 $b_{00}^r$  は定数、 $F_H$  は  $\epsilon_{kk}^p$  の単調増加関数である。基準状態が自然状態であるとして、構成式は(19)<sub>2</sub>式で与えられた。いま単調载荷の静水圧挙動を考えると、(3), (4)式から、

$$d\zeta^2 = k^2 |d\varepsilon_{kk}^p|^2, \quad dz_H = \frac{d\zeta}{kF_H} = \frac{d\varepsilon_{kk}^p}{F_H} \quad (23)$$

となる。だから、(19)式は次のようになる。

$$\sigma = \int_0^{z_H} K(z_H - z') F_H(\varepsilon_{kk}^p) dz' \quad (24)$$

そこで、静水圧応力—塑性ひずみ曲線 ( $\sigma - \varepsilon_{kk}^p$  曲線) を Fig. 3 のように与える。同図において、曲線 ON は  $F_H = 1$  に対する応力応答を表している。 $\varepsilon_{kk}^p \leq OA$  の範囲において、 $F_H$  は線形であるとする。一方、 $OA < \varepsilon_{kk}^p \leq OB$  の範囲において、 $F_H$  は双曲線であるとする。そこで、 $F_H$  を次のようにおく。

$$F_H = e^{\beta \varepsilon_{kk}^p} \quad (25)$$

$\varepsilon_{kk}^p \leq OA$  の範囲においては、上式を Taylor 展開して

$$F_H = 1 + \beta \varepsilon_{kk}^p + ((\varepsilon_{kk}^p)^2 \text{ 以上の項})$$

そして、 $(\varepsilon_{kk}^p)^2$  以上の項を無視すると、次の線形表示が得られる。

$$F_H = 1 + \beta \varepsilon_{kk}^p, (\varepsilon_{kk}^p \leq OA) \quad (26)$$

このとき、(23)式から次式が得られる。

$$\varepsilon_{kk}^p = \frac{1}{\beta} (e^{\beta z_H} - 1) \quad (27)$$

したがって、(26)式から次のようになる。

$$F_H = e^{\beta z_H} \quad (28)$$

単調荷荷条件の場合、(24)式へ(20)式、(28)式を代入すると次式が得られる。

$$\sigma = \int_0^{z_H} K_r e^{-\lambda_r(z_H - z')} e^{\beta z'} dz'$$

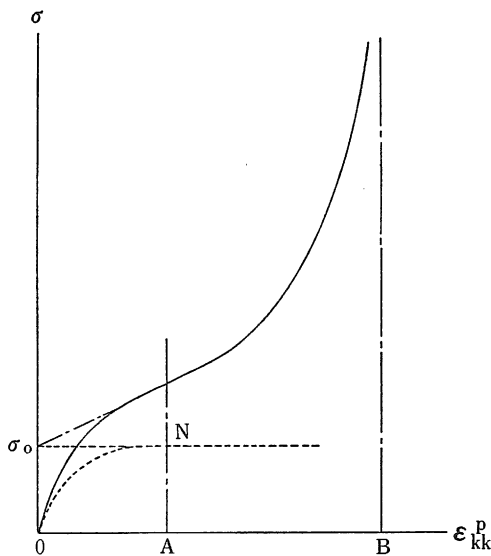


Fig. 3 静水圧応力—塑性体積ひずみ曲線

$$= \sum_r \frac{K_r}{\lambda_r + \beta} e^{-\lambda_r z_H} (e^{(\lambda_r + \beta) z_H} - 1) \quad (29)$$

また、(27)式を用いて上式から  $z_H$  を消去すると

$$\sigma = \sum_r \frac{K_r}{\lambda_r + \beta} \left\{ 1 + \beta \varepsilon_{kk}^p - (1 + \beta \varepsilon_{kk}^p)^{-\frac{\lambda_r}{\beta}} \right\}$$

となり、これを  $\varepsilon_{kk}^p$  で微分すると

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_{kk}^p} = \sum_r \frac{K_r}{\lambda_r + \beta} \left\{ \beta + \lambda_r (1 + \beta \varepsilon_{kk}^p)^{-\frac{\lambda_r + \beta}{\beta}} \right\}$$

したがって、 $\varepsilon_{kk}^p \rightarrow \infty$  のとき、

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_{kk}^p} \rightarrow \sum_r \frac{K_r}{\lambda_r + \beta} \beta \quad (30)$$

一方、Fig. 3 の  $\varepsilon_{kk}^p \leq OA$  の範囲において、 $\sigma$  軸との切片  $\sigma_0$  をもつ線形表示を考えると、(26)式から

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \beta \varepsilon_{kk}^p) \quad (31)$$

だから、(30)、(31)式から  $\sigma_0$  は次のように書ける。

$$\sigma_0 = \sum_r \frac{K_r}{\lambda_r + \beta} \quad (32)$$

また、Fig. 3 の曲線 ON に対して  $F_H = 1$  であったから、(26)式においては  $\beta = 0$  とすることができる。

したがって、 $\beta = 0$  のとき(32)式から

$$\sigma_0 = \sum_r \frac{K_r}{\lambda_r} \quad (33)$$

となる。一方、 $F_H = 1$  であるとき(23)式から  $dz_H = d\varepsilon_{kk}^p$  であるから、(24)式より

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{z_H} K(z_H - z') dz' = \int_0^{z_H} K(z') dz' \\ &= \sum_r \frac{K_r}{\lambda_r} (1 - e^{-\lambda_r + \varepsilon_{kk}^p}) \end{aligned}$$

となる。上式において、 $\varepsilon_{kk}^p \rightarrow \infty$  とすると  $\sigma \rightarrow \sum_r \frac{K_r}{\lambda_r} = \sigma_0$  となり、これは(33)式と一致する。

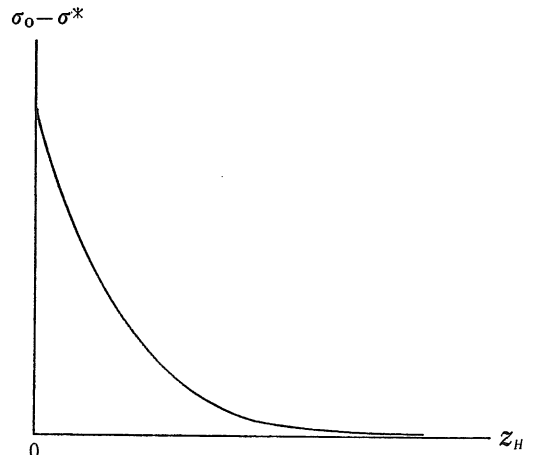


Fig. 4 ( $\sigma_0 - \sigma^*$ ) と  $z_H$  の一般的関係

ここで、Fig. 3 の  $e_{kk}^p \leq OA$  の範囲において、 $\sigma^*$  を次のように定義する。すなわち、(28), (29)式から

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{F_H} = \sum_r \frac{K_r}{\lambda_r + \beta} (1 - e^{-(\lambda_r + \beta)z_H}) \quad (34)$$

そして、(32), (34)式から  $(\sigma_0 - \sigma^*)$  と  $z_H$  の関係を求めると次のようになる。

$$\sigma_0 - \sigma^* = \sum_r \frac{K_r}{\lambda_r + \beta} e^{-(\lambda_r + \beta)z_H} \quad (35)$$

この曲線は一般に Fig. 4 に示す形となる。この曲線は、実験データから得られる  $\sigma - e_{kk}^p$  曲線と(27)式を用いて求まる  $\sigma - z_H$  関係と、(34)式とを利用して求めることができる。この曲線から、等間隔の  $z_H$  に対する  $\sigma$  の値を求め、Prony の方法を用いて(35)式の右辺の係数  $\frac{K_r}{\lambda_r + \beta}$  とべき乗  $(\lambda_r + \beta)$  の値が決定できる。したがって(31)式から  $\beta$  の値が求まっているとき、核関数(20)<sub>2</sub>式の  $K_r$  と  $\lambda_r$  の値が得られる。ただし、核関数(20)式の項数  $r$  は必要な精度で多くとることができるけれど、コンクリートや土などの粒状材料に対しては数項程度(2~3項)で十分な精度が得られると考えられる。

#### 4. せん断応答<sup>1)</sup>

基準状態が自然状態であるとして、せん断応答は(19)<sub>1</sub>式で与えられた。せん断応答を求めるためには、核関数  $\mu(z)$ 、硬化関数  $F_D$ 、カップリング定数  $k$  が必要である。コンクリートに対して、一般に偏差平面上における破壊応力はその静水圧応力  $\sigma$  と偏差平面での載荷方向(Lode 角  $\theta$ ) に依存すると考えられる。したがって、 $F_D$  を次のように表す。

$$F_D = F_D(\sigma, \theta) \quad (36)$$

ただし、静水圧応力  $\sigma$  がある基準応力  $\sigma_R$  に等しいとき、

$$F_D = F_D(\sigma_R, 0) = 1 \quad (36)'$$

とする。

硬化関数  $F_D$  とカップリング定数  $k$  の決定は、せん断と静水圧挙動のあいだの連成効果のため複雑になる。いま、一定の静水圧応力下で行うせん断応力場を考える。静水圧応力が  $\sigma = \sigma_1$  に至るまで静水圧載荷を行い、続いて  $\sigma_1$  を一定に保ってせん断応力  $\tau$  が荷せられる状態を想定すると、全応力場は次の形で表せる。

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

また、静水圧挙動を表す構成式(19)<sub>1</sub>式の逆をとり、 $e_{kk}^p$  を  $\sigma$  の履歴で表すと次のような形で書ける。

$$e_{kk}^p = \int_0^{z_H} L(z_H - z') \frac{\partial \sigma}{\partial z'} dz' \quad (38)$$

そして、ラプラス変換を用いると、核関数  $K(z)$  と  $L(z)$  の関係として、(19)<sub>1</sub>式と(38)式から次式が得られる。

$$H(z_H) = \int_0^{z_H} K(z_H - z') \frac{\partial L}{\partial z'} dz' \quad (39)$$

ここに、 $H(z_H)$  は Heaviside のステップ関数である。また、静水圧載荷の終了時 ( $\sigma = \sigma_1$ ) において、 $z_H = z_0^H$  とすると、(38)式から

$$e_{kk}^p = \int_0^{z_0^H} L(z_H - z') \frac{\partial \sigma}{\partial z'} dz' + \int_{z_0^H}^{z_H} L(z_H - z') \frac{\partial \sigma}{\partial z'} dz' = \int_0^{z_0^H} L(z_H - z') \frac{\partial \sigma}{\partial z'} dz' \quad (40)$$

したがって、せん断応力の作用によりせん断ひずみの変化が起ると、(3)式から  $k$  が変化し、その結果として  $z_H$  が変化する。だから、(40)式の右辺の積分は変化して、 $e_{kk}^p$  の変化が生じる。つまり、一定の静水圧応力下においてせん断を行うと、 $dz$  は(3)式から与えられ、その値は  $k$  により影響される。

そこで、まず  $k$  の値を決定するため、静水圧挙動を表す構成式の単純化を考えてみる。(19)<sub>2</sub>式において、核関数  $K(z)$  は十分な速さで減衰して Dirac のデルタ関数  $\delta(z)$  で近似できるとする。すなわち、一つの内部変数のみを考えて、次のようにおく。

$$K(z) = k_0 \delta(z) \quad (41)$$

このとき、(19)<sub>2</sub>式は次のようになる。

$$\sigma = \int_0^{z_H} k_0 \delta(z_H - z') \frac{\partial e_{kk}^p}{\partial z'} dz' = k_0 \frac{de_{kk}^p}{dz_H} \quad (42)$$

ただし、 $k_0$  は定数である。とくに、Fig. 3 における  $e_{kk}^p \leq OA$  の範囲の単調載荷状態に対して、(23), (26), (42)式から

$$\sigma = k_0(1 + \beta e_{kk}^p) \quad (43)$$

となり、この式は塑性線形硬化を表す(31)式と同一である。つまり、核関数  $K(z)$  を Dirac のデルタ関数  $\delta(z)$  で表した場合、前節で示した塑性線形硬化を考えた場合に相当する。そして、 $k_0$  は(31)式の  $\sigma_0$  と等しい。また、(37)式の  $\sigma_1$  の値が、静水圧挙動における塑性線形硬化を示す(43)式を満足するとき、(42)式から次式が成り立つ。

$$\sigma_1 = k_0 \frac{de_{kk}^p}{dz_H} \quad (44)$$

ただし、この  $\sigma_1$  は、せん断のあいだ一定値をとる静水圧応力である。一般に圧縮において  $\sigma$  と  $\varepsilon_{kk}^p$  を正にとると、(44)式から  $d\varepsilon_{kk}^p$  は正となり、せん断のあいだ圧縮体積ひずみが増大することになる。したがって、(26)、(4)式を用いると(44)式は次のようになる。

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= k_0 \frac{d\varepsilon_{kk}^p}{dz_H} = k_0 \frac{d\zeta_H}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz_H} = k_0 \frac{d\zeta_H}{d\zeta} kF_H \\ &= k k_0 (1 + \beta\zeta_H) \frac{d\zeta_H}{d\zeta}\end{aligned}\quad (45)$$

ただし、(3)式において、せん断過程で  $d\varepsilon_{kk}^p > 0$  であることを用いた。(45)式へ(3)式を代入すると次式が得られる。

$$d\zeta \left\{ 1 - \left( \frac{\sigma_1}{k_0(1 + \beta\zeta_H)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = d\zeta_D \quad (46)$$

静水圧載荷の終了時における  $\zeta$  と  $\zeta_H$  の値をそれぞれ  $\zeta'$  および  $\zeta_H'$  とおき、また、その後のせん断過程により生じる  $\zeta$  と  $\zeta_H$  の値をそれぞれ  $\zeta^s$  および  $\zeta_H^s$  とする。すなわち、

$$\zeta = \zeta' + \zeta^s \quad (47)$$

$$\zeta_H = \zeta_H' + \zeta_H^s \quad (48)$$

(48)式を用いると

$$k_0(1 + \beta\zeta_H) = k_0(1 + \beta\zeta_H') + k_0\beta\zeta_H^s \quad (49)$$

であり、静水圧載荷の終了時において  $\varepsilon_{kk}^p = \zeta_H = \zeta_H'$  および  $\sigma = \sigma_1$  であるから、(43)式より

$$\sigma_1 = k_0 (1 + \beta\zeta_H')$$

が成立つ。上式を(49)式へ代入すると

$$k_0(1 + \beta\zeta_H) = \sigma_1 + k_0\beta\zeta_H^s \quad (50)$$

となり、この式を(46)式へ代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta_D}{d\zeta} &= \left\{ 1 - \left( \frac{1}{1 + \frac{k_0\beta\zeta_H^s}{\sigma_1}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ 1 - \left( \frac{1}{x} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (51)$$

$$x = 1 + \frac{k_0\beta\zeta_H^s}{\sigma_1} \quad (52)$$

$\sigma = \sigma_1$  において(48)式より  $\frac{d\zeta_H}{d\zeta} = \frac{d\zeta_H^s}{d\zeta}$  であるから、(50)式を用いると(45)式は次のようになる。

$$\sigma_1 = k(\sigma_1 + k_0\beta\zeta_H^s) \frac{d\zeta_H^s}{d\zeta}$$

したがって、上式を変形して次式が得られる。

$$d\zeta = k \left( 1 + \frac{k_0\beta\zeta_H^s}{\sigma_1} \right) d\zeta_H^s = kx \cdot d\zeta_H^s \quad (53)$$

(52)式から  $d\zeta_H^s = \frac{\sigma_1}{k_0\beta} dx$  であり、また、せん断過程に

おいて(47)式より  $d\zeta = d\zeta^s$  であるから、(53)式は次のようになる。

$$d\zeta^s = \frac{k\sigma_1}{k_0\beta} x \cdot dx = \frac{1}{a} x \cdot dx \quad (54)$$

$$a = \frac{k_0\beta}{k\sigma_1} \quad (55)$$

静水圧載荷の終了時において  $\zeta_H^s = 0$  であるから、(52)式より  $x = 1$  となる。また、このとき、(47)式から  $\zeta^s = 0$  であるという初期条件で(54)式を積分すると

$$\zeta^s = \frac{1}{2a}(x^2 - 1) \quad (56)$$

となる。したがって、せん断過程において(51)式へ(56)式を代入すると

$$\frac{d\zeta_D}{d\zeta^s} = \left( \frac{2a\zeta^s}{1 + 2a\zeta^s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (57)$$

そして、(51)式へ(54)式を代入すると

$$\begin{aligned}d\zeta_D &= \left\{ 1 - \left( \frac{1}{x} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} x \cdot dx \\ &= \frac{1}{a}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dx\end{aligned}\quad (58)$$

となる。上式を積分すると次式が得られる。

$$\zeta_D = \frac{1}{2a} \left\{ x \sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right\} \quad (59)$$

ただし、(52)、(55)式から次が得られる。

$$\zeta_H^s = \frac{x - 1}{ak} \quad (60)$$

さらに、(56)式を(59)式へ代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}\zeta_D &= \frac{1}{2a} \left\{ \sqrt{2a\zeta^s} \sqrt{1 + 2a\zeta^s} - \ln(\sqrt{2a\zeta^s} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1 + 2a\zeta^s}) \right\}\end{aligned}\quad (61)$$

以上の(57)、(59)、(60)式から、カップリング定数  $k$  と核関数  $\mu(z)$  および硬化関数  $F_D$  の形を求めることができる。

一般に、三軸圧縮試験結果から得られる情報は、八面体せん断応力-ひずみ関係で表される場合が考えられるため、以下では、八面体せん断応力  $\tau_{oct}$  とテンソル表示の八面体せん断ひずみ  $\gamma_{oct}$  の関係を用いて、材料関数と定数の決定方法について考察する。ただし、一定の静水圧応力下におけるせん断により起る体積変化は弾性成分と塑性成分に分離することが困難であるため、ここでは、その体積変化は完全に非可逆的であると考え、すると、 $\zeta_H^s = \varepsilon_{kk}^p$  であるから、(60)式は次のようになる。

$$\varepsilon_{kk}^p = \frac{x - 1}{ak} \quad (62)$$

また、 $\gamma_{oct}$  の弾性成分と塑性成分をそれぞれ  $\gamma_{oct}^e$  および  $\gamma_{oct}^p$  とすると、次式が得られる。

$$\gamma_{oct}^e = \gamma_{oct} - \gamma_{oct}^p = \frac{1}{2\mu_0} \tau_{oct} \quad (63)$$

ここに、 $\mu_0$  はせん断弾性係数である。このとき、(3)式より

$$\gamma_{oct}^p = -\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_D \quad (64)$$

となる。したがって、 $x$  の値を与えると、(59)式から  $\zeta_D$  の値が求まり、(62)、(64)式から  $\epsilon_{kk}^p - \gamma_{oct}^p$  関係が求められる。また、(61)、(64)式から  $\gamma_{oct}^p - \zeta^s$  関係が得られる。

(1)  $k$  の値の決定

$k$  の値を任意に与えるとき、(55)式から  $a$  の値が得られ、上述のように(59)、(62)、(64)式から  $\epsilon_{kk}^p - \gamma_{oct}^p$  関係が計算できる。一方、実験データから得られる  $\tau_{0oct} - \gamma_{oct}$  関係と(63)式を用いて  $\tau_{oct} - \gamma_{oct}^p$  関係が得られる。また、実験データから得られる  $\tau_{oct} - \epsilon_{kk}$  関係を前述のように  $\tau_{oct} - \epsilon_{kk}^p$  関係であると考え、そして、この二つの関係から、 $\epsilon_{kk}^p - \gamma_{oct}^p$  関係が得られる。したがって、任意に与えた  $k$  の値を用いて計算した  $\epsilon_{kk}^p - \gamma_{oct}^p$  関係と、上の実験から得られた  $\epsilon_{kk}^p - \gamma_{oct}^p$  関係とを比較して、実験データからの結果に対して最良の計算結果を与える  $k$  の値を選択することができる。

(2)  $F_D$  の形の決定

一定の静水圧応力下におけるせん断に対し、(37)式で与えられる応力場を考えるとき、(19)式は次のようになる。

$$\tau = 2 \int_0^{z_D} \mu(z_D - z') \frac{\partial \gamma^p}{\partial z'} dz' \quad (65)$$

ただし、 $\tau$  はせん断応力、 $\gamma^p$  はせん断ひずみの塑性成分である。ここで、静水圧载荷の終了時における  $z_D$  の値を  $z_D'$ 、その後のせん断過程により生じる  $z_D$  の値を  $z_D^s$  とすると、

$$z_D = z_D' + z_D^s \quad (66)$$

このとき、 $0 \leq z_D \leq z_D'$  の範囲において  $\gamma^p = 0$  であるから、(65)式から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \tau &= 2 \int_0^{z_D} \mu(z_D - z') \frac{\partial \gamma^p}{\partial z'} dz' \\ &= 2 \int_0^{z_D'} \mu(z_D - z') \frac{\partial \gamma^p}{\partial z'} dz' \\ &\quad + 2 \int_{z_D'}^{z_D} \mu(z_D - z') \frac{\partial \gamma^p}{\partial z'} dz' \\ &= 2 \int_{z_D'}^{z_D} \mu(z_D - z') \frac{\partial \gamma^p}{\partial z'} dz' \end{aligned} \quad (67)$$

ここで、 $y = z' - z_D'$  による積分変換を行うと、上式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau &= 2 \int_0^{z_D^s} \mu(z_D^s - y) \frac{\partial \gamma^p}{\partial y} dy \\ &= 2 \int_0^{z_D^s} \mu(z_D^s - z') \frac{\partial \gamma^p}{\partial z'} dz' \end{aligned} \quad (68)$$

また、(4)、(47)、(66)式から  $d\zeta^s = d\zeta = F_D dz_D = F_D dz_D^s$  であるから、(57)式は次のようになる。

$$\frac{d\zeta_D}{dz_D^s} = F_D \left( \frac{2aF_D z_D^s}{1 + 2aF_D z_D^s} \right)^{1/2} \quad (69)$$

ここでの応力場(37)式において、(36)式から  $F_D = F_D(\sigma_1, 0)$  であるため、せん断のあいだ  $F_D$  は一定となる。この応力場において  $d\zeta_D = \sqrt{2} d\gamma^p$  であるから、(68)、(69)式より次式が得られる。

$$\tau = \frac{F_D}{\sqrt{2}} 2 \int_0^{z_D^s} \mu(z_D^s - z') \left( \frac{2aF_D z'}{1 + 2aF_D z'} \right)^{1/2} dz' \quad (70)$$

せん断応力の漸近値を  $\tau_\infty(\sigma_1)$  で表すと、(70)式から次式が得られる。

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tau = \tau_\infty(\sigma_1) = \frac{F_D}{\sqrt{2}} M(\infty) \quad (71)$$

ただし、

$$M(z) = 2 \int_0^z \mu(z') dz', \quad M(\infty) < \infty \quad (72)$$

また、(36)'式を用いると

$$\tau_\infty(\sigma_R) = \frac{1}{\sqrt{2}} M(\infty) \quad (73)$$

である。ただし、基準応力  $\sigma_R$  は静水圧挙動の塑性線形硬化を表す(31)式あるいは(43)式を満たすものとする。そこで、(71)、(73)式から次式が得られる。

$$\frac{\tau_\infty(\sigma_1)}{\tau_\infty(\sigma_R)} = F_D \quad (74)$$

上式から、一定の Lode 角  $\theta$  における  $F_D$  の形を求めることができる。具体的に、八面体応力で表された破壊実験データを用いる場合、データから得られる破壊規準を示す曲線 ( $\tau_{oct} - \sigma_{oct}$  関係) の式を(74)式の左辺に代入して  $F_D$  を求めることになる。

(3)  $\mu(z)$  の形の決定

(70)式が適用できるように、上述と同じく基準応力  $\sigma_R$  が静水圧挙動の塑性線形硬化を表す(43)式を満たすものとする。とくに、いま  $\sigma_R = \sigma_1$  であるとする、(36)'式から  $F_D(\sigma_1, 0) = F_D(\sigma_R, 0) = 1$  となるから、(4)式から  $dz_D = d\zeta$  であり、その結果(47)、(66)式より  $d\zeta^s = dz_D^s$  となる。したがって、(70)式は次のようになる。

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \int_0^{\zeta^s} \mu(\zeta^s - \zeta^{s'}) \left( \frac{2a\zeta^{s'}}{1+2a\zeta^{s'}} \right)^{1/2} d\zeta^{s'} \quad (75)$$

$$a = \frac{k_0\beta}{k\sigma_1} = \frac{k_0\beta}{k\sigma_R} \quad (76)$$

(37)式の応力場において、(3)式から  $d\zeta_D = \sqrt{2} \, dr^p$  であり、せん断過程の始まりにおいて  $\zeta_D = 0$  であるから、

$$\zeta_D = \sqrt{2} \gamma^p \quad (77)$$

したがって、(57)式から  $\zeta_D$  は  $\zeta^s$  の関数として表され、(75)式の左辺は  $\zeta^s$  の関数となる。つまり、実験データから  $\tau$ - $\gamma$  関係が与えられると、それを  $\tau$ - $\gamma^p$  関係に変換し、(77)式から  $\tau$ - $\zeta_D$  関係が求まる。そして、(57)式の  $\zeta_D$ - $\zeta^s$  関係を用いて  $\tau$ - $\zeta^s$  関係が得られる。ここで、核関数  $\mu(z)$  を決定するために、(75)式を次のように表現する。すなわち、この式はボルテラ型第一種積分方程式となる。

$$\tau(\zeta^s) = 2 \int_0^{\zeta^s} \mu(\zeta^s - \zeta^{s'}) g(\zeta^{s'}) d\zeta^{s'} \quad (78)$$

ここに、

$$g(\zeta^s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2a\zeta^s}{1+2a\zeta^s} \right)^{1/2} \quad (79)$$

このとき、 $\tau(\zeta^s)$  と  $g(\zeta^s)$  が与えられる場合に、 $\mu(z)$  の形を求める問題に帰着する。そこで、 $\zeta^s = \zeta_n^s$  と書いて、積分区間  $[0, \zeta^s]$  を微小区間  $\Delta$  に  $n$  等分すると、

$$\zeta_n^s = n\Delta \quad (80)$$

したがって、(78)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau(\zeta_n^s) &= \tau_n = 2 \int_0^{\zeta_n^s} \mu(\zeta_n^s - \zeta^{s'}) g(\zeta^{s'}) d\zeta^{s'} + \dots \\ &\dots + 2 \int_{(n-1)\Delta}^{\zeta_n^s} \mu(\zeta_n^s - \zeta^{s'}) g(\zeta^{s'}) d\zeta^{s'} \quad (81) \\ &= \sum_{r=1}^n g(\zeta_{r0}^s) \cdot 2 \int_{(n-r)\Delta}^{(n-r+1)\Delta} \mu(\zeta^{s'}) d\zeta^{s'} \\ &= \sum_{r=1}^n g_r \{M[(n-r+1)\Delta] - M[(n-r)\Delta]\} \quad (82) \end{aligned}$$

ただし、上式において積分の平均値の定理を用い、さらに、(72)式の定義を用いた。ここに、 $\zeta_{r0}^s$  と  $g_r$  は次式で定義される値である。

$$(r-1)\Delta \leq \zeta_{r0}^s < r\Delta \quad (83)$$

$$g_r = g(\zeta_{r0}^s) \quad (84)$$

$$M(z) = 2 \int_0^z \mu(z') dz' \quad (85)$$

この場合、 $\Delta$  を十分に小さくすることにより、必要な精度で  $g_r$  を求めることができる。(82)式をマトリックス表示すると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta g_1 & & & 0 \\ \Delta g_2 & \Delta g_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \Delta g_n & \dots & \dots & \Delta g_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M(\Delta) \\ M(2\Delta) \\ \vdots \\ M(n\Delta) \end{pmatrix} \quad (86)$$

ただし、

$$\Delta g_r = g_r - g_{r-1}, \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (87)$$

この連立方程式から、 $\tau_r$  および  $\Delta g_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) が与えられるとき、 $M(r\Delta)$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) を求めることができる。したがって、(85)式から  $2\mu(z)$  は次式として求まる。

$$2\mu(z) = \frac{dM(z)}{dz} \quad (88)$$

具体的に八面体せん断応力-せん断ひずみ関係 ( $\tau_{oct}$ - $\gamma_{oct}$  関係) で表された実験データを用いる場合、以上で述べたのと同様の方法が考えられる。先の(1)節で得られた  $k$  の値を用いて、(61)、(64)式から  $\gamma_{oct}^p$ - $\zeta^s$  関係が得られる。実験データから与えられる  $\tau_{oct}$ - $\gamma_{oct}$  関係と(63)式を用いて、 $\tau_{oct}$ - $\gamma_{oct}^p$  関係が得られる。そして、この  $\tau_{oct}$ - $\gamma_{oct}^p$  関係と先の  $\gamma_{oct}^p$ - $\zeta^s$  関係から、 $\tau_{oct}$ - $\zeta^s$  関係が求められる。したがって、 $\tau_{oct}$ - $\zeta^s$  関係の曲線から  $\zeta^s$  の等間隔点に対する  $\tau_{oct}$  の値を求めると、上述の計算方法と同様の方法を用いて  $M(r\Delta)$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ) の値が得られる。これから、一本のスプライン曲線を求め、その曲線を微分して、得られた微係数から単調減少曲線を求めることができる。Prony の方法を用いて、この単調減少曲線を指数級数で近似することにより核関数(20)式の係数  $\mu_r$  とべき乗  $\alpha_r$  の値が得られる。ただし、核関数(20)式の項数  $r$  は必要な精度で多くとることができるが、コンクリートや土質材料等に対しては数項(2~3項)で十分であると考えられる。<sup>3)</sup>

### III. 数値計算の方法

II章で得られた記憶積分型の構成式を用いて三次元的挙動を表現する場合、数値計算を行なう上で何等かの工夫が必要である。以下では、まず、(19)式を intrinsic time scale で微分して、結果として導かれる非弾性応力増分と見なせる式に含まれる積分項を漸化式で評価し、増分型の数値計算に変換する方法と、次に、(19)式の核関数を有限指数級数で表現して、線形微分方程式に変換する方法について検討する。計算に必要とする支配方程式は次のとおりである。

$$S_{ij} = 2 \int_0^{z_D} \mu(z_D - z') \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z'} dz' \quad \Bigg|$$



$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \int_0^{z_H} K(z_H - z') \frac{\partial \varepsilon_{kk}^p}{\partial z'} dz' \\ dS_{ij} &= 2\mu_0 (de_{ij} - de_{ij}^p) \\ d\sigma &= K_0 (d\varepsilon_{kk} - d\varepsilon_{kk}^p) \\ d\zeta^2 &= \|de_{ij}^p\|^2 + k^2 |d\varepsilon_{kk}^p|^2 \\ dz_D &= \frac{d\zeta}{F_D}, \quad dz_H = \frac{d\zeta}{kF_H} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (89) \\ (90) \\ (91) \end{aligned}$$

ただし、核関数は(20)式で表されるが、ここでは、近似に次のように有限指数級数で表す。つまり、考える内部変数の数を  $n$  とする。また、 $\mu_0$  と  $K_0$  はそれぞれせん断弾性係数および体積弾性係数である。

$$\left. \begin{aligned} \mu(z) &= \sum_{r=1}^n \mu_r e^{-\alpha_r z} \\ K(z) &= \sum_{r=1}^n K_r e^{-\lambda_r z} \end{aligned} \right\} (92)$$

1. 積分項を含む方法<sup>5)6)</sup>

まず、偏差成分について、(89)<sub>1</sub>式を  $z_D$  で微分すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} dS_{ij} &= 2\mu(0) de_{ij} + h_{ij}(z_D) dz_D \\ h_{ij}(z_D) &= 2 \int_0^{z_D} \mu'(z_D - z') \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z'} dz', \\ \mu'(z) &= \frac{d\mu(z)}{dz} \end{aligned} \right\} (93)$$

(90)<sub>1</sub>, (93)式から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} dS_{ij} &= 2\mu_p \left( (de_{ij} + \frac{1}{2\mu(0)} h_{ij}(z_D) dz_D) \right) \\ 2\mu_p &= \frac{2\mu(0)}{1 + \frac{2\mu(0)}{2\mu_0}} \end{aligned} \right\} (94)$$

同様に、静水圧成分についても、(89)<sub>2</sub>, (90)<sub>2</sub>式から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= K_p \left( d\varepsilon_{kk} + \frac{1}{K(0)} k(z_H) dz_H \right) \\ K_p &= \frac{K(0)}{1 + \frac{K(0)}{K_0}} \\ k(z_H) &= \int_0^{z_H} K'(z_H - z') \frac{\partial \varepsilon_{kk}^p}{\partial z'} dz', \\ K'(z) &= \frac{dK(z)}{dz} \end{aligned} \right\} (95)$$

したがって、具体的に二次元での応力-ひずみ関係を表すと、(94)<sub>1</sub>, (95)<sub>1</sub>式から次のようになる。

$$\{d\sigma\} = [D_p] \{d\varepsilon\} + \{dH_p\} \quad (96)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} [D_p] &= \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_p \end{pmatrix}, \quad \{dH_p\} = \begin{pmatrix} dH_{px} \\ dH_{py} \\ dH_{pxy} \end{pmatrix} \\ \{d\sigma\} &= \begin{pmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix}, \quad \{d\varepsilon\} = \begin{pmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} (97)$$

ただし、 $\{dH_p\}$  は非弾性応力増分ベクトル、 $\{d\sigma\}$  は応力増分ベクトル、 $\{d\varepsilon\}$  はひずみ増分ベクトル、 $\gamma_{xy}$  は工学的せん断ひずみを表す。また、 $[D_p]$  と  $\{dH_p\}$  の成分について、平面ひずみ条件のとき、

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{3K_p + 4\mu_p}{3}, \quad D_2 = \frac{3K_p - 2\mu_p}{3} \\ dH_{px} &= \frac{2\mu_p}{2\mu(0)} h_x(z_D) dz_D + \frac{K_p}{K(0)} k(z_H) dz_H \\ dH_{py} &= \frac{2\mu_p}{2\mu(0)} h_y(z_D) dz_D + \frac{K_p}{K(0)} k(z_H) dz_H \\ dH_{pxy} &= \frac{2\mu_p}{2\mu(0)} h_{xy}(z_D) dz_D \end{aligned} \right\} (98)$$

一方、平面応力条件のとき、

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{2\mu_p(6K_p + 2\mu_p)}{3K_p + 4\mu_p}, \quad D_2 = \frac{2\mu_p(3K_p - 2\mu_p)}{3K_p + 4\mu_p} \\ dH_{px} &= \frac{2\mu_p}{2\mu(0)} \left\{ h_x(z_D) - \frac{3K_p - 2\mu_p}{3K_p + 4\mu_p} h_x(z_D) \right\} dz_D \\ &\quad + \frac{K_p}{K(0)} \frac{6\mu_p}{3K_p + 4\mu_p} k(z_H) dz_H \\ dH_{py} &= \frac{2\mu_p}{2\mu(0)} \left\{ h_y(z_D) - \frac{3K_p - 2\mu_p}{3K_p + 4\mu_p} h_x(z_D) \right\} dz_D \\ &\quad + \frac{K_p}{K(0)} \frac{6\mu_p}{3K_p + 4\mu_p} k(z_H) dz_H \\ dH_{pxy} &= \frac{2\mu_p}{2\mu(0)} h_{xy}(z_D) dz_D \end{aligned} \right\} (99)$$

(1)  $h_{ij}(z_D)$  と  $k(z_H)$  の計算方法

この場合、(96)式 of 非弾性応力増分  $\{dH_p\}$  を構成する  $h_{ij}(z_D)$  と  $k(z_H)$  の評価が重要な意味をもつ。いま、これらの関数を漸化式で表現することを考える。まず、関数  $h_{ij}(z_D)$  について、荷重増分ステップ(i)に対応した intrinsic time scale  $z_D$  の範囲を  $z_{i-1} \leq z_D \leq z_i$  とし、積分範囲  $[0, z_D]$  を  $m$  分割する。ただし、以下では、 $z_D$  の下添字  $D$  を省略する。つまり、積分範囲を  $0 = z_0, z_1, z_2, \dots, z_m = z_D$  に分割する。このとき、(93)<sub>2</sub>式の  $h_{ij}(z)$  は次のようになる。

$$h_{ij}(z) = h_{ij}(z_m) = 2 \int_0^{z_1} \mu'(z_m - z') \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z'} dz' + \dots$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu'(z_m - z') \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z'} dz' + \dots \\
 & + 2 \int_{z_{m-1}}^{z_m} \mu'(z_m - z') \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z'} dz'
 \end{aligned}$$

ここで、積分の平均値の定理を用いると、上式の右辺の一般項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 2 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu'(z_m - z') \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z'} dz' & \doteq \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z} \Big|_{z=z_i} \\
 & 2 \int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu'(z_m - z') dz'
 \end{aligned}$$

したがって、核関数を(92)<sub>1</sub>式で表すとき、 $h_{ij}(z)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 h_{ij}(z) = h_{ij}(z_m) & = \sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^m 2\mu_r \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z} \Big|_{z=z_i} \\
 & e^{-\alpha i(z_m - z_{i-1})} (1 - e^{\alpha r dz_i}) \quad (100)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$$

そして、上式から  $h_{ij}(z_m)$  と  $h_{ij}(z_{m-1})$  を比較することにより、次の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned}
 h_{ij}(z_i) & = \sum_{r=1}^n h_{ij}(z_{i-1}) e^{-\alpha r dz_i} + \sum_{r=1}^n 2\mu_r \frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z} \Big|_{z=z_i} \\
 & (e^{-\alpha r dz_i} - 1) \quad (101) \\
 & (i = 1, 2, \dots, m)
 \end{aligned}$$

ただし、 $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ 、 $h_{ij}(0) = 0$  である。

次に、関数  $k(z_H)$  についても同様に、(92)<sub>2</sub>式の核関数を用いるとき、次のような漸化式が得られる。

$$\begin{aligned}
 k(z_i) & = \sum_{r=1}^n k(z_{i-1}) e^{-\lambda r dz_i} + \sum_{r=1}^n K_r \frac{\partial \varepsilon_{kk}^p}{\partial z} \Big|_{z=z_i} \\
 & (e^{-\lambda r dz_i} - 1) \quad (102) \\
 & (i = 1, 2, \dots, m)
 \end{aligned}$$

ただし、この場合も、積分範囲  $[0, z_H]$  を  $m$  分割し、 $z_H$  の下添字  $H$  は省略した。また、 $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ 、 $k(0) = 0$  である。

以上のように、intrinsic time scale  $z_i$  における応答の履歴依存性は、 $h_{ij}(z_{i-1})$ 、 $k(z_{i-1})$  および次の増分ステップに影響する  $\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z} \Big|_{z=z_i}$ 、 $\frac{\partial \varepsilon_{kk}^p}{\partial z} \Big|_{z=z_i}$ 、 $\Delta z_i$  によって決定される。つまり、 $z_i$  に及ぼす  $z_{i-1}$  以前の履歴効果は、 $h_{ij}(z_{i-1})$  および  $k(z_{i-1})$  により表される。

## (2) 有限要素法定式化と計算手順

一つの要素に対して、節点に荷重  $\{F_{ex}\}$  が作用し、物体力  $\{P\}$  も同時に働くと、節点変位ベクトルを  $\{U_e\}$ 、つり合い状態での要素内の変位ベクトルを  $\{U\}$ 、ひずみベクトルを  $\{\varepsilon\}$ 、応力ベクトルを  $\{\sigma\}$  とする。このとき、内挿関数のマトリックスを  $[N]$ 、節点変位ひずみマトリックスを  $[B]$  とすると、次式が成立つ。

$$\{U\} = [N]\{U_e\} \quad (103)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U_e\} \quad (104)$$

要素の仮想変位が任意の節点の仮想変位  $\{U_e^*\}$  で与えられ、要素の内部で適合変位  $\{U^*\}$  およびひずみ  $\{\varepsilon^*\}$  を生じるものとする、仮想仕事の原理より次式が得られる。

$$\{U_e^*\}^T \{F_{ex}\} + \int_V \{U^*\}^T \{P\} dV = \int_V \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dV$$

ここで、積分範囲は要素の内部である。(103)、(104)式を代入すると

$$\begin{aligned}
 \{U_e^*\}^T [\{F_{ex}\} + \int_V [N]^T \{P\} dV] \\
 = \{U_e^*\}^T \int_V [B]^T \{\sigma\} dV
 \end{aligned}$$

ここで、節点変位を任意にとったのであるから、上式はすべての  $\{U_e^*\}$  に対して成立しなければならない。したがって、

$$\{F_{ex}\} + \int_V [N]^T \{P\} dV = \int_V [B]^T \{\sigma\} dV$$

上式の増分を考えると、次式が得られる。

$$\{dF_{ex}\} + \int_V [N]^T \{dP\} dV = \int_V [B]^T \{d\sigma\} dV \quad (105)$$

ここへ(96)式を代入して、(104)式を用いると、次のような定式化が得られる。

$$[K_e] \{dU_e\} = \{dF_{ex}\} + \{dF_g\} + \{dF_p\} \quad (106)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 [K_e] & = \int_V [B]^T [D_p] [B] dV \\
 \{dF_g\} & = \int_V [N]^T \{dP\} dV, \\
 \{dF_p\} & = - \int_V [B]^T \{dH_p\} dV
 \end{aligned} \right\} (107)$$

さらに、この場合、計算の手順は次のように考えることができる。

- (i) 現荷重増分ステップに対して、初期 intrinsic time measure 増分  $d\zeta$  を与えて、(91)<sub>2</sub>式から  $dz_D$ 、 $dz_H$  の初期値を仮定する。そして、(106)式を解いて変位増分  $\{dU_e\}$  を求める。
- (ii) これから、全ひずみ増分  $\{d\varepsilon\}$  が得られる。そして、(94)、(95)式から応力増分  $\{d\sigma\}$  が、(90)式から塑性ひずみ増分  $\{d\varepsilon^p\}$  が得られる。
- (iii) (91)式および(101)、(102)式から、 $dz_D$ 、 $dz_H$ 、 $\frac{\partial e_{ij}^p}{\partial z_D}$ 、 $\frac{\partial \varepsilon_{kk}^p}{\partial z_H}$  および  $h_{ij}(z_D)$ 、 $k(z_H)$  が得られる。したがって、(98)式あるいは(99)式から  $\{dH_p\}$  が求まり、(107)<sub>3</sub>式から非弾性力増分  $\{dF_p\}$  が得られる。

(iv) この  $\{dF_D\}$  を(106)式に代入して、新しい変位増分  $\{dU_e\}$  を求める。

(v) この繰返し過程において、連続する繰返しでの  $dz_D$  および  $dz_H$  の差がある収束条件値以下になるまで反復する。収束条件が満たされたなら、結果を蓄積して、次の増分ステップへすすむ。

## 2. 微分方程式に変換する方法<sup>4)</sup>

(92)式の核関数を用いるとき、(89)式から  $S_{ij}$  と  $\sigma$  は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= \sum_{r=1}^n Q_{ij}^r \\ \sigma &= \sum_{r=1}^n P^r \end{aligned} \right\} (108)$$

ただし、(17)式に示したように、 $Q_{ij}^r$  と  $P^r$  は次の微分方程式を満たす。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_{ij}^r}{dz_D} + \alpha_r Q_{ij}^r &= 2\mu_r \frac{de_{ij}^p}{dz_D} \\ \frac{dP^r}{dz_H} + \lambda_r P^r &= K_r \frac{de_{kk}^p}{dz_H} \end{aligned} \right\} (109)$$

上の(108)、(109)式から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} dS_{ij} &= A de_{ij}^p - Q_{ij} dz_D \\ d\sigma &= B de_{kk}^p - P dz_H \end{aligned} \right\} (110)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum_{r=1}^n 2\mu_r, \quad B = \sum_{r=1}^n K_r \\ Q_{ij} &= \sum_{r=1}^n \alpha_r Q_{ij}^r, \quad P = \sum_{r=1}^n \lambda_r P^r \end{aligned} \right\} (111)$$

### (1) 応力制御の場合

先の報告に示したように、(91)<sub>1</sub>式の形を利用して、次のような  $d\zeta$  についての二次方程式が得られる。

$$a(d\zeta)^2 + b \cdot d\zeta + C = 0 \quad (112)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 - \frac{Q_{ij} Q_{ij}}{(AF_D)^2} - \frac{P^2}{(BF_H)^2} \\ b &= -2 \left\{ \frac{Q_{ij} dS_{ij}}{A^2 F_D} + \frac{kP d\sigma}{B^2 F_H} \right\} \\ C &= - \left\{ \frac{dS_{ij} dS_{ij}}{A^2} + \frac{k^2 (d\sigma)^2}{B^2} \right\} \end{aligned} \right\} (113)$$

(112)式の正解から  $d\zeta$  の値が求まる。そして、 $de_{ij}^p$  と  $de_{kk}^p$  の値が次式から得られる。

$$\left. \begin{aligned} de_{ij}^p &= \frac{1}{A} \left\{ dS_{ij} + \frac{Q_{ij}}{F_D} d\zeta \right\} \\ de_{kk}^p &= \frac{1}{B} \left\{ d\sigma + \frac{P}{kF_H} d\zeta \right\} \end{aligned} \right\} (114)$$

また、(90)式から  $de_{ij}$  と  $de_{kk}$  が得られる。また、(109)式から  $dQ_{ij}^r$  と  $dP^r$  を求めることができる。この場合の繰返し計算の方法は、先の報告のとおりである<sup>4)</sup>。

### (2) ひずみ制御の場合<sup>4)</sup>

先の報告に示したように、(91)<sub>1</sub>式の  $d\zeta$  の形を利用して、次のような  $d\zeta$  についての二次方程式が得られる。

$$a(d\zeta)^2 + b \cdot d\zeta + C = 0 \quad (115)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a &= 1 - \frac{Q_{ij} Q_{ij}}{(A+2\mu_0)^2 F_D^2} - \frac{P^2}{(B+K_0)^2 F_H^2} \\ b &= -2 \left\{ \frac{2\mu_0(Q_{ij} de_{ij})}{(A+2\mu_0)^2 F_D} + \frac{kK_0 P de_{kk}}{(B+K_0)^2 F_H} \right\} \\ C &= - \left\{ \left( \frac{2\mu_0}{A+2\mu_0} \right)^2 de_{ij} de_{ij} + \left( \frac{kK_0}{B+K_0} \right)^2 (de_{kk})^2 \right\} \end{aligned} \right\} (116)$$

(115)式の正解から  $d\zeta$  の値が得られる。したがって、 $de_{ij}^p$  と  $de_{kk}^p$  が次式から求まる。

$$\left. \begin{aligned} de_{ij}^p &= \frac{2\mu_0}{A+2\mu_0} de_{ij} + \frac{Q_{ij}}{(A+2\mu_0)F_D} d\zeta \\ de_{kk}^p &= \frac{K_0}{B+K_0} de_{kk} + \frac{P}{(B+K_0)kF_H} d\zeta \end{aligned} \right\} (117)$$

また、(90)式から  $dS_{ij}$  と  $d\sigma$  が得られる。そして、応力制御の場合と同様に、(109)式から  $dQ_{ij}^r$  と  $dP^r$  を求めることができる。この場合の繰返し計算の方法は、先の報告のとおりである<sup>4)</sup>。

### (3) 有限要素法定式化と計算手順

前述のひずみ制御の場合の方法を利用して、有限要素法定式化を考えることができる。この場合、ひずみ増分ベクトル  $\{d\epsilon\}$  を与えて、塑性ひずみ増分ベクトル  $\{d\epsilon^p\}$  および応力増分ベクトル  $\{d\sigma\}$  を求めることになるから、次の応力-ひずみ関係を用いる。

$$\{d\sigma\} = [D] (\{d\epsilon\} - \{d\epsilon^p\}) \quad (118)$$

したがって、上式を前述の仮想仕事の原理から導かれる(105)式に代入して、(104)式を用いると次式が得られる。

$$[K_e] \{dU_e\} = \{dF_{ex}\} + \{dF_g\} + \{dQ_p\} \quad (119)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} [K_e] &= \int_V [B]^T [D] [B] dV \\ \{dF_g\} &= \int_V [N]^T \{dP\} dV, \\ \{dQ_p\} &= \int_V [B]^T [D] \{d\epsilon^p\} dV \end{aligned} \right\} (120)$$

この場合の計算手順は、次のように考えることができ

る。

- (i) 現荷重増分ステップに対して、 $\{dQ_p\}$  の初期値を仮定して、(119)式を解いて変位増分  $\{dU_e\}$  を求める。
- (ii) これから、全ひずみ増分  $\{d\varepsilon\}$  が得られる。さらに、この  $\{d\varepsilon\}$  を細分割して、(115)式から  $d\zeta$  の値が求まり、(117)式から塑性ひずみ増分  $\{d\varepsilon^p\}$  が求まる。そして、(90)式から応力増分  $\{d\sigma\}$  が得られる。先の報告で示したように、収束条件が満足されるまで<sup>4)</sup> 繰り返し、全ひずみ増分  $\{d\varepsilon\}$  の細分割全体にわたり繰返す。
- (iii) (120)式から非弾性力増分  $\{dQ_p\}$  を求め、(119)式へ代入して、新しい変位増分  $\{dU_e\}$  を求める。
- (iv) この繰返し過程において、連続する繰返して  $\{dU_e\}$  の差がある収束条件値以下になるまで反復する。収束条件が満たされたなら、結果を蓄積して、次の増分ステップへすすむ。

#### IV. あとがき

<sup>4)</sup> 先の報告では、この理論を用いて具体的な計算を行っている。そこでは、III章2節で述べた計算方法を用いた。その結果から、せん断と静水圧挙動のあいだの連成効果を含めて、この理論はコンクリートの力学的挙動を降伏曲面や載荷規準を設けずに定性的にうまく表現することができる。しかし、II章で示した核関数のパラメータの決定において、かなりのばらつきがでてくる。とくに、せん断挙動を表す構成式の核関数の形の決定には、ばらつきが大きくでる。つまり、その核関数のパラメータの組は一通りではなく、幾つかの組合せが可能である。したがって、核関数の有限指数級数表示は、(21)式の条件を考慮して慎重に行う必要がある。

また、ここで述べた理論では、せん断と静水圧挙動のあいだの連成効果をせん断によりひき起こされる収縮と

して、intrinsic time measure の定義により表現している。しかし、実際の材料においては、収縮から膨張への連成効果が考えられるため、この効果を表現する項を静水圧挙動の構成式に導入することも検討する必要がある。そして、静水圧載荷によるせん断ひずみの発生、いわゆるせん断進行効果 (shear travel effect) も考慮できる定式化の試みも望まれる。

さらに、本報告では、この理論を構造物の有限要素解析に応用するときの計算手順を示した。しかし、この理論は従来の粘弾性理論と異なり、ひずみ履歴をパラメータとする記憶積分型構成式であることから、三次元的な数値計算法が非常に複雑になること、そして、コンクリートや土質材料の場合に金属材料と異なり、非弾性的な静水圧挙動やせん断と静水圧挙動のあいだの連成効果を考慮しなければならないため、計算手順がかなり複雑になることなどから、その合理的な数値計算の方法の開発が今後とも必要である。

最後に、本研究をすすめるに当り、御指導を賜った京都大学農学部長谷川高士教授、および本報告をまとめる機会を下された本学農学部鳥山教授と野中助教授に深甚なる感謝の意を表します。

#### 引用文献

1. VALANIS, K. C. and READ, H. E.: Mech. of materials 5 : 277-295, 1986.
2. 藤居良夫：島根大農研報 23 : 146-155, 1989.
3. FUJII, Y.: Bulletin of Faculty of Agri., Shimane Univ. 20 : 139-145, 1986.
4. 藤居良夫・長谷川高士：農士学会論文集 141 : 7-17, 1989.
5. 藤居良夫：農士学会中四国支部講演要旨集 : 70-72, 1987.
6. 藤居良夫：農士学会中四国支部講演要旨集 : 76-77, 1985.