島根大農研報 (Bull. Fac. Agr. Shimane Univ.) 22 : 121−125, 1988

クリープ温度応力解析法としての状態方程式法と流速法の比較

野　中　資　博*

Comparison between State Theory Method and Rate of Flow Method for Creep Thermal Stress Analysis

Tsuguhiro NONAKA

Thermal cracking within mass-concrete structures is one of themes of today's concrete technology. How to evaluate thermal stress that causes thermal cracking exactly is the most basic subject in it. Up to now, State theory method and Rate of flow method are proposed to apply F. E. M. thermal stress analysis. This paper describes precision and utility of these two methods. As a result, State theory method has question about creep Poisson's ratio of 0.5 and Rate of flow method generates slightly greater thermal stress.

1. はじめに

マスコンクリート構造物の温度ひびわれの問題は今日のコンクリート工学の主要な問題の一つであり，多くの研究者によりこの問題の解決のために種々の試みがなされている．その内，温度ひびわれを引き起こすもとになる温度応力を如何に正確に求めるかということは最も根元的な研究課題であろう．この温度応力発生のメカニズムとしては勿論コンクリートの水和熱による非定常な温度場と構造物の拘束の状態が直接の原因であるのだが，それに加えて材料の構成関係としてコンクリートの若材令クリープが関係してくる．仮にクリープを導入せずに温度応力解析を行うと，その結果は実現象とは解離してしまう．現在までにこの温度応力解析にクリープを加味する適切な方法として状態方程式法と流速法という理論が提案されており，著者もこの二つの方法で数多くの解析を行ってきた．そこでここでは今までの解析経験からこの二つの方法に関してその使用性や精度等の特徴を上げ，これらの方法の総括を試みることにする．ここで述べることは総て著者の実験と解析に基ずくものであり，私的なノウハウであるが，これを公開することでマスコンクリートの温度応力の問題が幾らかでも解決の方向へ向かうことを願うものである．

* 農業施設工学研究室

2. 状態方程式法によるクリープの定式化

状態方程式法とは簡単に言えば，ある時刻のクリープひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_c$ がその時点の状態量によって一義的に決定されるという仮定のもとに成立する理論である．そして，その状態量とは時間，応力，ひずみ等である．又，その与え方によって，ひずみ硬化則，時間硬化則の二つに分ける事ができる．一般には，ひずみ硬化則の方が実験結果と良く一致すると言われているが，定式化に関しては時間硬化則の方が簡単である．

クリープひずみを表現するための状態方程式は次のように書かれる．

$$\{\dot{\varepsilon}_c\} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_c}{\bar{\sigma}} \{\sigma'\} \tag{2.1}$$

ただし，$\{\dot{\varepsilon}_c\}$ はクリープひずみ速度ベクトル，$\{\sigma'\}$ は偏差応力ベクトル，$\dot{\bar{\varepsilon}}_c$ は相当クリープひずみ速度，$\bar{\sigma}$ は相当応力である．ここで，相当クリープひずみ速度 $\dot{\bar{\varepsilon}}_c$ を表わすのに時間硬化則とひずみ硬化則がある．また，相当クリープひずみ速度は単軸定応力場でのクリープひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_c$ と一致する．

この状態方程式法を2次元問題として表記すれば，平面応力の時，

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{cx} \\ \dot{\varepsilon}_{cy} \\ \dot{\gamma}_{cxy} \end{Bmatrix} = \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_c}{2\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

ただし，

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+\sigma_y^2+\sigma_x^2+6\tau_{xy}^2]^{1/2}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_c=\frac{\sqrt{2}}{3}[(\dot{\varepsilon}_{cx}-\dot{\varepsilon}_{cy})^2+(\dot{\varepsilon}_{cy}-\dot{\varepsilon}_{cz})^2+(\dot{\varepsilon}_{cz}-\dot{\varepsilon}_{cx})^2+1.5\dot{\gamma}_{cxy}^2]^{1/2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{cz}=-\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_c}{2\bar{\sigma}}(\sigma_x+\sigma_y)$$

平面ひずみの時，

$$\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_{cx}\\ \dot{\varepsilon}_{cy}\\ \dot{\gamma}_{cxy}\end{Bmatrix}=\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_c}{2\bar{\sigma}}\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0\\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

ただし，

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\tau_{xy}^2]^{1/2}$$

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_c=\frac{\sqrt{2}}{3}[(\dot{\varepsilon}_{cx}-\dot{\varepsilon}_{cy})^2+\dot{\varepsilon}_{cy}^2+\dot{\varepsilon}_{cx}^2+1.5\dot{\gamma}_{cxy}^2]^{1/2}$$

$$\sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)$$

次に，実験より求めたクリープ関数をこれ等の式に組み込む事を考えてみよう．クリープ試験は高炉B種セメントコンクリートについて行い，その設計基準強度はマスコンクリートを対象とする為 210 kg/cm^2 としている．また，クリープは引張クリープである．結果としてのクリープ関数は以下のようであった．

$$J(k,\ t)=(4.377\ e^{-0.03065k}+2.436)\,ln(t+1)\times10^{-6} \quad (2.4)$$

ここで，k：載荷材令（日），t：載荷後の継続時間（日）である．

これより時間硬化則の相当クリープひずみ速度は，

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_c=\frac{\bar{\sigma}}{t+1}(4.377e^{-0.03065k}+2.436)\times10^{-6} \quad (2.5)$$

また，ひずみ硬化則の相当クリープひずみ速度は，

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_c=\bar{\sigma}(4.377\ e^{-0.03065k}+2.436)\exp\left[\frac{-\bar{\varepsilon}_c\times10^6}{\bar{\sigma}(4.377\ e^{-0.03065k}+2.436)}\right]\times10^{-6} \quad (2.6)$$

これ等の式を式(2.2)，(2.3)に代入すれば平面応力，平面ひずみ各々について時間硬化則，ひずみ硬化則で表わした4通りの結果が得られる事になる．

コンクリートに適用する場合はその結果にさらに温度の影響を表わす関数 $\phi(T)$を乗じなければならない．

3．流速法によるクリープの定式化

流速法とはイングランドとイルストンによって提唱されたクリープ理論であり，クリープひずみを回復成分と非回復成分に分けてそれぞれ定式化を行い，そして重ね合わせる方法である．また，定式化を簡単に行うために次の仮定を導入する．

i）非回復クリープひずみ ε_f のひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_f$ は載荷時の材令には無関係である．

ii）回復性クリープひずみ ε_d は載荷材令に無関係な一定の値 $\varepsilon_{d\infty}$ に収束する．

iii）回復性クリープ曲線は除荷時と載荷時で一致する．

iv）それぞれのクリープひずみ成分は応力に比例するものとし，対応したクリープコンプライアンスを定義できる．

また，仮に非回復クリープコンプライアンスが載荷材令に無関係な傾きが常に一定な直線で表わせるなら，回復性クリープコンプライアンスも簡単に表わせる事になり，その目的のためにジョルダンが擬似時間 t' なるものを採用している．それは実時間 t の対数を取り，

$$t'=a\ \log\ t \quad (3.1)$$

よって，非回復クリープコンプライアンス J_f と回復クリープコンプライアンス J_d は以下のように表わされる．

$$J_f=t' \quad (3.2)$$

$$J_d=J_{d\infty}(1-e^{-J_f/Q}) \quad (3.3)$$

ここで，a，$J_{d\infty}$，Q は実験結果より求まる．また，τ は載荷材令であり，τ' はそれを擬似時間に直したものである．

この流速法を二次元問題に拡張するにはクリープポアソン比を導入して，また増分形式で表わすのが最も良い．その最終結果は次式であり，クリープポアソン比によるマトリックス $[C]$ の形に応じて平面応力，平面ひずみ状態となる．

$$\{\varDelta\varepsilon_f\}=\varDelta t'[C]\{\sigma\} \quad (3.4)$$

$$\{\varDelta\varepsilon_d\}=J_{d\infty}\,e^{-t'/Q}(1-e^{-\varDelta t'/Q})[C]\{\sigma\} \quad (3.5)$$

ただし，平面応力の時，

$$[C]=\begin{bmatrix}1 & -\nu_c & 0\\ -\nu_c & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu_c)\end{bmatrix} \quad (3.6)$$

平面ひずみの時，

$$[C]=\begin{bmatrix}(1-\nu_c^2) & -\nu_c(1+\nu_c) & 0\\ -\nu_c(1+\nu_c) & (1-\nu_c^2) & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu_c)\end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ここで，

ν_c：クリープポアソン比

$\varDelta\varepsilon_f$：非回復性クリープひずみ増分

$\varDelta\varepsilon_d$：回復性クリープひずみ増分

さて，前述の実験より求めたクリープ関数，式(2.4)を用いて流速法を表現する事を考えよう．回復成分は最終値に比較的早く収束するから，載荷後長期ではクリープの大部分が非回復成分である．よって，これよりまず非回復成分を決定し，全クリープから非回復成分を引けば回復成分が求まる．その結果を以下に示す．

$$J_f=18.722\ \log t\times10^{-6} \quad (3.8)$$

$$J_d=9.51(1-e^{-0.217t'})\times10^{-6} \quad (3.9)$$

これらを式(3.4)，(3.5)に用いれば良いのであるが，この時クリープポアソン比としては簡単の為に弾性ポアソン比とほぼ等しいと置いても問題はないようである．

さらに，流速法でも温度の影響を考慮するが，非回復成分のみが温度の影響を受けるとし，状態方程式法と同じ温度の影響関数を掛ける．

4. 有限要素クリープ解析と解析例

ここでは，状態方程式法と流速法によるクリープひずみを有限要素法に導入する方法を最初に述べる．その方法は初期ひずみ法と呼ばれる方法であり，初期ひずみとして温度ひずみだけでなく，クリープひずみをも考えるものである．そのアルゴリズムは以下の通りである．

i）$t=0$ において，自重，外荷重，初期温度分布に対する弾性応力を計算する．

ii）微小時間増分 Δt 後におけるクリープひずみ増分を計算する．

iii）クリープひずみ増分と温度ひずみ増分の和を初期ひずみとして等価荷重に置き変える．

iv）この等価荷重に関する有限要素方程式を解き，全ひずみ増分を求める．

v）全ひずみ増分から初期ひずみを引いて弾性ひずみ増分を求める．

vi）応力ひずみ関係を用いて応力増分を計算し，この時点の応力状態を求める．

vii）ii）に戻り計算を繰り返す．

すなわち，時間ステップ毎の温度変化と前の応力状態によるクリープひずみを知り，初期ひずみ法を用いて弾性係数を時間の関数に取って F. E. M. 解析を繰り返すのである．

次に，この有限要素クリープ解析を用いて二つの構造物の温度応力の解析を行った．まず初めは温度応力の実測値のあるフーチング[1)]であり，図1にその構造モデルを，さらに図2～6に各々の実測点に関する解析結果を示す．また，表1に解析に用いた物性値をまとめて示す．ここでは有効材令ではなく実材令を使っているが，別の解析から有効材令を用いた方が実材令を用いたものより応力を大きく評価する事が判ってはいるが，その差はあまり大きくはなかったので，この例ではまず手始めに実材例を用いてみた．測点3以外は実測値とあまり合ってない様だが，この場合は測定装置の精度の問題もあり実測値が正しいとは一概に言えないのである．状態方程式法と流速法の値はどの測点においても良く一致していると思える．

表1　フーチングの温度応力解析の物性値

密　　　度	$\rho = 1630\mathrm{kg/m^3}$
熱膨張係数	$\alpha = 7.51\times10^{-6}/^\circ\mathrm{C}$
ポアソン比	$\nu = 0.17$
クリープ関数	$J(t)=\{1.69(1-e^{-0.049t}) + 0.977(1-e^{-0.344t})\}\times10^{-6}$
温度関数	$\phi(T)=0.76+0.012T$
載荷材令関数	$\xi(\tau)=-0.55\log\tau+1.8$
弾性係数	$E(t)=1.53\times10^5\times\{t/(5.6+0.8t)\}^{0.5}\mathrm{kg/cm^2}$
非回復成分	$J_f=3.244\log t\times10^{-6}$
回復成分	$J_d=9.602(1-e^{-2.383t'})\times10^{-6}$

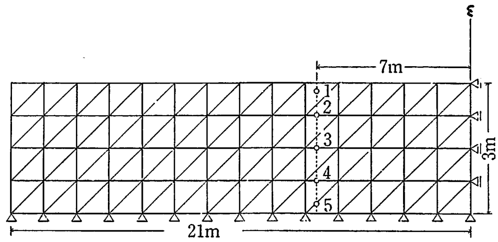

図1　フーチングの温度応力解析モデル

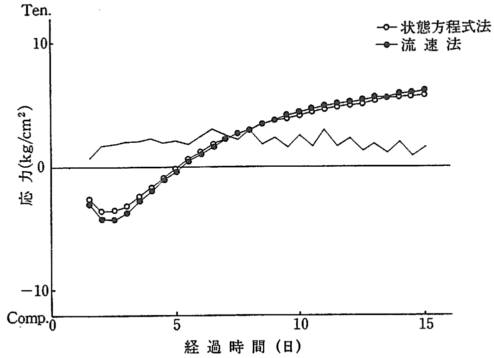

図2　温度応力解析結果（フーチング，測点1）

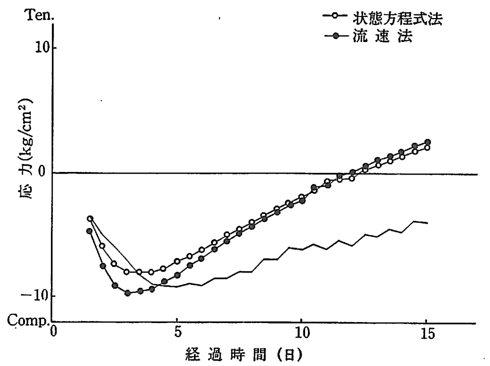

図3　温度応力解析結果（フーチング，測点2）

さらに，実測値はないがフィルダムの監査廊を有効材令を用いて解析した．図7に構造モデルを示し，代表的な解析結果を図8～10に示す．また，この場合に使用した物性値を表2に示す．この例では状態方程式法と流速法の結果に差がありフーチングの場合とは異なる挙動を示した．

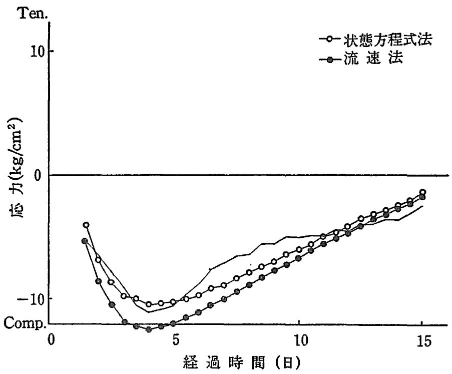

図4　温度応力解析結果（フーチング，測点3）

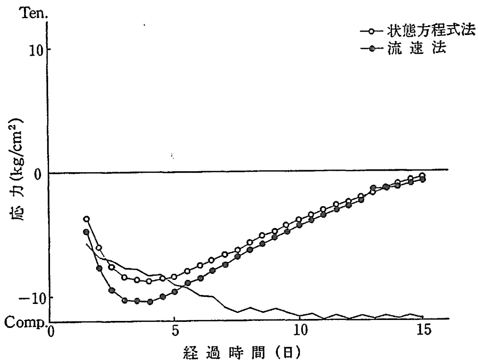

図5　温度応力解析結果（フーチング，測点4）

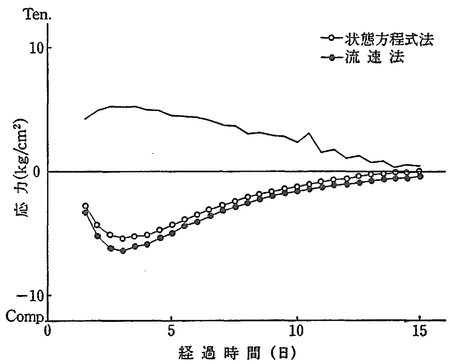

図6　温度応力解析結果（フーチング，測点5）

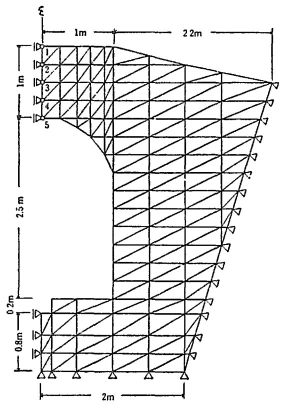

図7　監査廊の温度応力解析モデル

表2　監査廊の温度応力解析の物性値

密　　度	$\rho = 2328\mathrm{kg/m^3}$
熱膨張係数	$\alpha = 1.0 \times 10^{-5}/^\circ\mathrm{C}$
ポアソン比	$\nu = 0.17$
クリープ関数	$J(k,\ t) = (4.377e^{-0.0307k} + 2.436)\ 1n\ (t+1) \times 10^{-6}$
弾性係数	$E(t) = 10^6/\ (2.435e^{-0.0433t} + 3.785)\ \mathrm{kg/cm^2}$
非回復成分	$J_f = 18.722 \log t \times 10^{-6}$
回復成分	$J_d = 9.51(1 - e^{-0.217t'}) \times 10^{-6}$

5.　両手法の特徴と問題点

この二つの例で違いに差はあるが，流速法の方が状態方程式法より温度応力を大きく評価する傾向にある．特に有効材令を用いた場合に顕著である．この事が何に起因しているか調べるのはかなり難しい．想像するに，元々のクリープの実験データは一つであるから，原因の一つはやはり定式化の違いであろう．特にここでは状態方程式に時間硬化則を使用したせいもあろう．また，流速法で非回復成分と回復成分との分離に問題があったのかもしれない．しかし著者が考えるに最も問題なものの一つは状態方程式法でのクリープポアソン比1/2の採用ではないだろうか．他の研究者の実験からクリープポアソン比は弾性ポアソン比に近いと言われているので，この点を主要因の一つと考えるのが妥当のように思える．さらに，もう一つの問題点として流速法は載荷材令に無関係なクリープで表わして良い事になっているが，この事に関しては著者の実験結果[2]からきわめて若材令では載荷材令の影響を受ける事が判明している．よって流速法は若材令期の平均的なクリープ特性を結果的に使用することになり，きわめて若材令ではクリープを小さく評価してしまい，それによって応力は状態方程式法より大きくでる可能性がある．この様な疑問点は残るが概略的には両手法とも温度応力の挙動を十分表現出来ているとみなしても良いだろう．使用においての残る問題はそれらの使い分けであろう．

6.　お　わ　り　に

この報告の最期にあたって，これまでの論旨をまとめておく事にしよう．コンクリートの温度応力の解析には

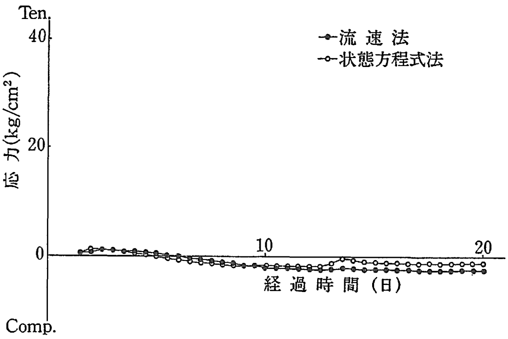

図8　温度応力解析結果（監査廊，測点1）

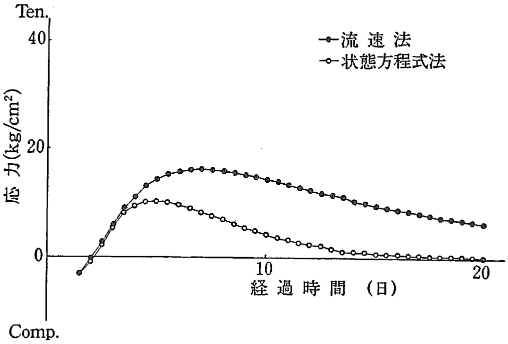

図9　温度応力解析結果（監査廊，測点3）

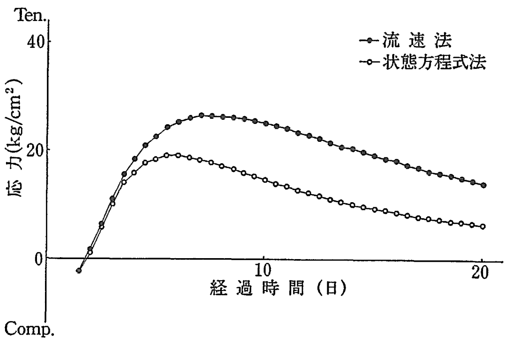

図10　温度応力解析結果（監査廊，測点5）

クリープ温度応力解析として状態方程式法と流速法が適用可能であるが，それに加えて弾性係数を有効材令の関数として定義すべきである．また，クリープの定式化が簡単なのは状態方程式法であるが，クリープポアソン比1/2の仮定には疑問が残る．流速法はその点の問題はないがクリープの定式化がやや難解であるし，応力を少し大きめに評価する傾向がある．よって，実利用に関しては，理論的な整合性からは流速法の方が好ましいが，しかしそこでクリープの定式化に難があれば状態方程式法を用いるとしても良かろう．

この様な結論では割り切れない所も残ろうが，解析例を増やす事によって改良を計る以外は手段はなかろう．数多くの事例研究をこの後も試みたい．

引　用　文　献

1. 中内他：間組研究年報　1980：159–179，1980.
2. 野中：島大農研報，**20**：135–138，1986.