

対数正規分布とその応用

第5報 混合対数正規分布の択伐林樹高分布への応用

稲 田 充 男*

Lognormal Distribution and its Applications

5. Application of Mixed Lognormal Distribution to
Height Distributions of Selection Forest

Mitsuo INADA

The mixed lognormal distribution, the two-component univariate lognormal mixture distribution,

$$f(H) = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1 H} \exp \left\{ -\frac{(\log H - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} + \frac{N_2}{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2 H} \exp \left\{ -\frac{(\log H - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}$$

was proposed as a mathematical model to describe the height frequency distribution in selection forests. The model was applied to 4 observed height frequency distributions in Ate (*Thujaopsis dolabrata* var. HONDAI MAKINO) selection forests. In order to estimate the 6 parameters of the mixed lognormal distribution, the method of moments estimation was used instead of the graphical techniques. The principle of the method was summarized briefly. The agreement between the observed and the expected frequencies was tested by the chi-square test. The model achieved a good fit to 3 observed height frequency distributions. The mixed lognormal distribution may be useful for analyzing the height frequency distribution of selection forests.

緒 言

筆者はこれまで、対数正規分布を一斉林の胸高直径ならびに樹高の頻度分布に適応し、対数正規分布がこれらの理論分布として十分満足するものであることを確かめてきた (山本他, 1982, 稲田他, 1986, 稲田, 1986)^{1) 2) 3)}。さらに、前報「対数正規分布とその応用、第4報 混合対数正規分布の択伐林直径分布への応用」(稲田他, 1986)⁴⁾において、択伐林の直径分布もまた対数正規分布を合成することにより表現できることを示した。

本論では、択伐林の樹高の頻度分布について、前報同

様の考え方にに基づき、混合対数正規分布をあてはめ、その適合性について検討する。すなわち、各齢階ごとの樹高分布は対数正規分布に従うものとして、これらが結合したものである混合対数正規分布を択伐林の樹高分布に応用する。

本論で用いた混合対数正規分布は、2つの対数正規分布が合成した、

$$f(H) = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1 H} \exp \left\{ -\frac{(\log H - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} + \frac{N_2}{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2 H} \exp \left\{ -\frac{(\log H - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}$$

というもっとも単純な形のものである。ここで、混合対

* 森林計画学研究室

数正規分布を形づくる2つの対数正規分布を分布I, 分布IIと呼ぶことにする. 各分布の平均, 分散は, 対数正規分布の性質より,

分布I 平均 $H_1 = \exp(\mu_1 + \sigma_1^2/2)$
 分散 $V_1 = \exp(2\mu_1 + \sigma_1^2) (\exp(\sigma_1^2) - 1)$
 分布II 平均 $H_2 = \exp(\mu_2 + \sigma_2^2/2)$
 分散 $V_2 = \exp(2\mu_2 + \sigma_2^2) (\exp(\sigma_2^2) - 1)$

である. さらに, 混合対数正規分布の平均, 分散はそれぞれ,

平均 $H = (N_1 H_1 + N_2 H_2) / N$
 分散 $V = (N_1 V_1 + N_2 V_2) / N + N_1 \cdot N_2 (H_1 - H_2)^2 / N^2$
 ただし, $N = N_1 + N_2$

である.

資料と方法

資料として, 前報と同様, 「能登地方のアテ択伐林」試験地の1つである小泉試験地(輪島市三井町漆原字西の三, 福島又一氏所有, 方位S, 傾斜22~31°, 面積400m²)の調査結果を用いた. 小泉試験地は, 従来一斉林であったが, 1943年頃目通り周囲2尺以上の立木を全部伐採したといわれ, その後, 枝打などの手入れは行なわれず, かなり粗放な林分である. また, 下木は相当密生しており, 20s×20mの標準地内に6本のスギが含まれるなど, 林分は一斉林から択伐林へ移行する中途の状態にあるものとみられる(林業技術協会, 1982).

調査は昭和43, 48, 53, 58年の4回行われており, これら4つの調査年別の樹高測定結果を用いた(山根, 1984). 各調査年別資料の諸統計量を表-1に示す.

混合対数正規分布の母数の推定方式としては, 図解による方法と積率解による方法とがある. 図解法とは, 両対数グラフ上に観測値をプロットし, 落とした点が描く2本の放物線により分布を2つに分けようとする方法である(HALD, 1952). また, 積率解法とは, 観測値の平均値ならびに平均値まわりの5次積率までを計算し, これらを使って混合対数正規分布の6つの母数 $\mu_1, \sigma_1^2, N_1, \mu_2, \sigma_2^2, N_2$ の値を決定しようとするものである(EVERITT *et al.*, 1981).

本論では, 混合対数正規分布のあてはめ計算をできるだけ自動化しようとする試みから, 積率解法により混合対数正規分布の母数を決定した. 積率解法の説明については, 鈴木(1985)に詳しく記載されているので, これより引用する.

x の度数分布における第 j 階級 ($j=1, 2, \dots, J$) の階級代表値を X_j その階級の度数を f_j とする. このとき, x の平均値 \bar{x} は,

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum_{j=1}^J f_j} \sum_{j=1}^J f_j X_j$$

によって, また, 平均値のまわりの q 次の積率 V_q は,

$$V_q = \frac{1}{\sum_{j=1}^J f_j} \sum_{j=1}^J f_j (X_j - \bar{x})^q$$

によって与えられる.

これらの値を用いて,

$$\sum_{h=0}^9 a_h u^h = 0 \tag{1}$$

を解く. ただし,

$$\begin{aligned} a_0 &= -24 V_3^6 \\ a_1 &= -96 V_3^4 k_4 \\ a_2 &= -(63 V_3^2 k_4^2 + 72 V_3^2 k_5) \\ a_3 &= 288 V_3^4 - 108 V_3 k_4 k_5 + 27 k_4^3 \\ a_4 &= 444 V_3^2 k_4 - 18 k_5^2 \\ a_5 &= 90 k_4^2 + 72 V_3 k_5 \\ a_6 &= 36 V_3^2 \\ a_7 &= 84 k_4 \\ a_8 &= 0 \\ a_9 &= 24 \end{aligned}$$

上式において用いられている k_4 および k_5 は,

$$\begin{aligned} k_4 &= V_4 - 3V_2^2 \\ k_5 &= V_5 - 10V_3 V_2 \end{aligned}$$

表-1 調査年別資料の諸統計量

樹高階級中央値(m)	調査年別観測度数(本)			
	昭和43年	昭和48年	昭和53年	昭和58年
1	—	—	—	—
2	8	4	3	1
3	12	8	7	5
4	13	12	13	8
5	8	10	10	8
6	5	5	5	7
7	4	2	3	1
8	4	3	0	1
9	6	3	5	5
10	11	5	0	0
11	11	5	5	2
12	18	12	4	5
13	6	14	8	5
14	1	9	13	3
15	1	4	9	14
16	1	1	6	13
17	—	—	6	7
18	—	—	—	2
合計(本)	109	97	97	87
平均(m)	7.87	8.85	9.76	10.95
分散(m ²)	15.06	18.47	24.95	26.18
標準偏差(m)	3.88	4.30	5.00	5.12
変動係数(%)	49.30	48.59	51.23	46.76

である。式(1)の u の値としては種々の値が得られその中には複素数の値も現われることがあるがそれらのうち、特に負の実根 \hat{u} を求める (\hat{u} も1個以上得られることがある)。適当な \hat{u} を用いて (あるが \hat{u} 適当であるかどうかは、最終的計算結果を得た後にはじめて判明する)。

$$\delta^2 - \frac{\hat{\omega}}{\hat{u}}\delta + \hat{u} = 0$$

という式を満たす δ (これは2種得られる。従って、その一方を δ_1 によって、他方を δ_2 によって示すことにする) を求める。ただし、 $\hat{\omega}$ は、

$$\hat{\omega} = \frac{-8V_3\hat{u}^3 + 3k_3\hat{u}^2 + 6V_3k_4\hat{u} + 2V_3^3}{2\hat{u}^3 + 3k_4\hat{u} + 4V_3^2}$$

によって求められる。ここでは、これまでに得た \bar{x} , \hat{u} , δ_1 , δ_2 , $\hat{\omega}$, V_2 および V_3 を用いて、混合対数正規分布の6つのパラメータを次の式から求める。

$$\mu_1 = \bar{x} + \delta_1$$

$$\mu_2 = \bar{x} + \delta_2$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{3}\delta_1\left(2\frac{\hat{\omega}}{\hat{u}} - \frac{V_3}{\hat{u}}\right) + V_2 - \delta_1^2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{3}\delta_2\left(2\frac{\hat{\omega}}{\hat{u}} - \frac{V_3}{\hat{u}}\right) + V_2 - \delta_2^2$$

$$N_1 = \frac{\delta_2}{\delta_2 - \delta_1} \cdot N$$

$$N_2 = N - N_1$$

上記のような方法によって、算出されるべきパラメータの値が得られる理由は、 V_2 , V_3 , V_4 , V_5 ならびに N_1 , N_2 および δ_1 , δ_2 の間に、

$$0 = p\delta_1 + (1-p)\delta_2$$

$$V_2 = p(\sigma_1^2 + \delta_1^2) + (1-p)(\sigma_2^2 + \delta_2^2)$$

$$V_3 = p(3\delta_1\sigma_1^2 + \delta_1^3) + (1-p)(3\delta_2\sigma_2^2 + \delta_2^3)$$

$$V_4 = p(3\sigma_1^4 + 6\sigma_1^2\delta_1^2 + \delta_1^4) + (1-p)(3\sigma_2^4 + 6\sigma_2^2\delta_2^2 + \delta_2^4)$$

$$V_5 = p(15\sigma_1^4\delta_1 + 10\sigma_1^2\delta_1^3 + \delta_1^5) + (1-p)(15\sigma_2^4\delta_2 + 10\sigma_2^2\delta_2^3 + \delta_2^5)$$

という関係のあることにある。ただし、

$$\delta_1 = (\mu_1 - \bar{x}), \delta_2 = (\mu_2 - \bar{x})$$

$$p = N_1/N$$

である。

結果と考察

各調査年別資料に対する各母数の推定結果は次のとおりである。また、各資料に対する混合対数正規分布のあてはめ結果を表-2~5, 図-1, 2に示す。図-1には混合対数正規分布によるあてはめ結果が、図-2には構成分布 I, IIに分けた結果が示してある。

昭和43年調査

分布 I $\mu_1 : 1.2631 \quad \sigma_1^2 : 0.1212 \quad N_1 : 45.71$

分布 II $\mu_2 : 2.3619 \quad \sigma_2^2 : 0.0323 \quad N_2 : 63.29$

昭和48年調査

分布 I $\mu_1 : 1.4645 \quad \sigma_1^2 : 0.1540 \quad N_2 : 45.11$

分布 II $\mu_2 : 2.5149 \quad \sigma_2^2 : 0.0175 \quad N_2 : 51.89$

昭和53年調査

分布 I $\mu_1 : 1.5185 \quad \sigma_1^2 : 0.1526 \quad N_1 : 46.18$

分布 II $\mu_2 : 2.6429 \quad \sigma_2^2 : 0.0148 \quad N_2 : 50.82$

昭和58年調査

分布 I $\mu_1 : 1.6123 \quad \sigma_1^2 : 0.1411 \quad N_1 : 36.49$

分布 II $\mu_2 : 2.7005 \quad \sigma_2^2 : 0.0124 \quad N_2 : 50.51$

表-2 昭和43年調査に対するあてはめ結果

樹高階 (m)	観測度数 (本)	推定度数 (本)		
		計	分布 I	分布 II
1	—	0.32	0.32	—
2	8	6.98	6.98	—
3	12	15.01	15.01	—
4	13	12.23	12.23	—
5	8	6.51	6.50	0.01
6	5	3.03	2.84	0.19
7	4	2.62	1.13	1.49
8	4	5.62	0.44	5.18
9	6	10.33	0.17	10.16
10	11	13.20	0.06	13.14
11	11	12.44	0.02	12.42
12	18	9.26	0.01	9.25
13	6	5.75	—	5.75
14	1	3.10	—	3.10
15	1	1.50	—	1.50
16	1	0.66	—	0.66
17	—	0.27	—	0.27
18	—	0.11	—	0.11
19	—	0.04	—	0.04
20	—	0.01	—	0.01
21	—	0.01	—	0.01
合計	109	109.00	45.71	63.29

表-3 昭和48年調査に対するあてはめ結果

樹高階 (m)	観測度数 (本)	推定度数 (本)		
		計	分布 I	分布 II
1	—	0.16	0.16	—
2	4	3.51	3.51	—
3	8	9.63	9.63	—
4	12	11.07	11.07	—
5	10	8.55	8.55	—
6	5	5.44	5.44	—
7	2	3.13	3.13	—
8	3	1.82	1.71	0.11
9	3	2.00	0.91	1.09
10	5	4.90	0.48	4.42
11	5	9.77	0.25	9.52
12	12	12.62	0.13	12.49
13	14	11.16	0.07	11.09
14	9	7.26	0.04	7.22
15	4	3.68	0.02	3.66
16	1	1.53	0.01	1.52
17	—	0.54	—	0.54
18	—	0.17	—	0.17
19	—	0.05	—	0.05
20	—	0.01	—	0.01
合計	97	97.00	45.11	51.89

さらに、これらの母数より各構成分布の平均、分散および分布全体の平均、分散を計算すると表-6のようになる。

あてはめ結果に対して χ^2 分布による適合度検定を行った。ただし、度数分布表の階級のうちに観測度数が5未満のものがあるときは、その階級を他の階級と併せて

表-4 昭和53年調査に対するあてはめ結果

樹高階 (m)	観測度数 (本)	推 定 度 数 (本)		
		計	分布 I	分布 II
1	—	0.10	0.10	—
2	3	2.75	2.75	—
3	7	8.61	8.61	—
4	13	10.94	10.94	—
5	10	9.14	9.14	—
6	5	6.18	6.18	—
7	3	3.74	3.74	—
8	0	2.13	2.13	—
9	5	1.21	1.18	0.03
10	0	1.03	0.64	0.39
11	5	2.44	0.35	2.09
12	4	6.19	0.19	6.00
13	8	10.42	0.10	10.32
14	13	11.80	0.06	11.74
15	9	9.61	0.03	9.58
16	6	5.95	0.02	5.93
17	6	2.94	0.01	2.93
18	—	1.21	0.01	1.20
19	—	0.43	—	0.43
20	—	0.13	—	0.13
21	—	0.04	—	0.04
22	—	0.01	—	0.01
合 計	97	97.00	46.18	50.82

表-5 昭和58年調査に対するあてはめ結果

樹高階 (m)	観測度数 (本)	推 定 度 数 (本)		
		計	分布 I	分布 II
1	—	0.02	0.02	—
2	1	1.15	1.15	—
3	5	5.01	5.01	—
4	8	7.93	7.93	—
5	8	7.68	7.68	—
6	7	5.76	5.76	—
7	1	3.76	3.76	—
8	1	2.26	2.26	—
9	5	1.30	1.30	—
10	0	0.77	0.73	0.04
11	2	0.87	0.40	0.47
12	5	2.64	0.22	2.42
13	5	6.76	0.12	6.64
14	3	11.01	0.07	10.94
15	14	11.92	0.04	11.88
16	13	9.16	0.02	9.14
17	7	5.29	0.01	5.28
18	2	2.42	0.01	2.41
19	—	0.90	—	0.90
20	—	0.29	—	0.29
21	—	0.08	—	0.08
22	—	0.02	—	0.02
合 計	87	87.00	36.49	50.51

5以上になるようにして計算した。自由度は自由度 = (階級数 - 6) とした。その結果は、

昭和43年調査 $\chi_0^2 = 13.47$ (自由度 5)
 昭和48年調査 $\chi_0^2 = 4.31$ (自由度 5)
 昭和53年調査 $\chi_0^2 = 2.18$ (自由度 5)
 昭和58年調査 $\chi_0^2 = 7.48$ (自由度 4)

となる。有意水準 5% とすると自由度 4 に対する χ^2 の値は 9.49、自由度 5 では 11.07 である。昭和 43 年調査結果について「観測度数は混合対数正規分布に適合する」という仮説は棄却されたが、それ以外の 3 資料については「観測度数は混合対数正規分布に適合する」という仮説は棄却されなかった。

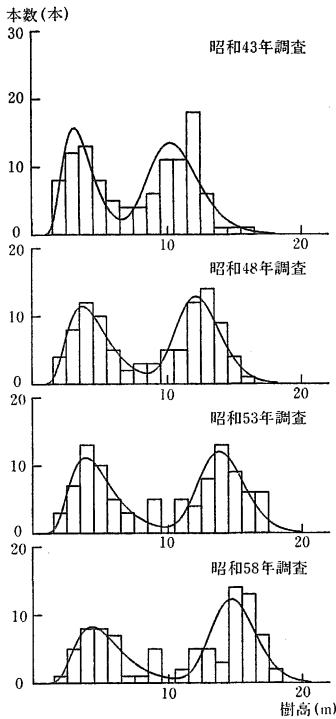
棄却された昭和43年資料についてみると、樹高階中央値 12m のところが18本と自由度他の樹高階に比べ極端に飛び出ているため、2個の対数正規分布を合成した比較的単純な混合対数正規分布ではよいあてはまりを期待することは難しいと思われる。実際この場合の χ_0^2 の値は 13.47 ではあるが樹高階 12m のところだけで、8.25 とその大半を占めている。この樹高階があてはめに失敗した大きな原因であることがわかる。このような極端な突出がある場合には、単純な分布によるあてはめはほとんど不可能であるように思われる。このような不整形の実測分布に対する理論分布のあてはめについては、今後の研究課題として残るであろう。しかし、これ以外の 3 資料については、ほぼ満足できる結果であった。

また、あてはめ結果の図をみると、各資料とも、棄却された昭和43年資料も含めて、それぞれ 2 つの分布に明確に分けられ、分布 I と分布 II が時間とともにそれぞれ生長している様子をはっきりと読み取れる。このことは、表-6 で示した、分布 I・分布 II および全体の平均・分散の推定値からも理解できる。しかし、これらの値はあくまでもあてはめ結果から出てきた数字であり、前もって予測した数字ではない。この点について、どのように

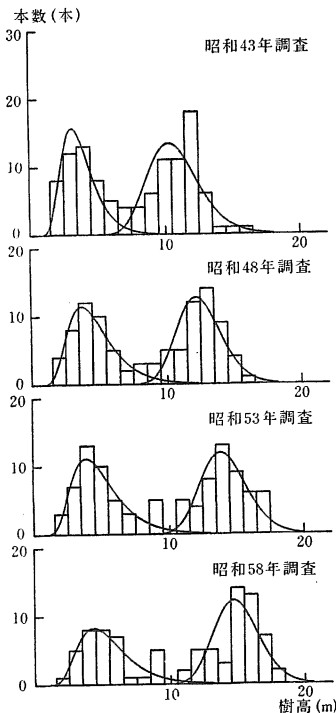
表-6 各調査年別資料に対する対数正規分布の母数ならびに平均、分散の推定結果
(単位は平均：m、分散：m²)

調 査 年		昭和43年	昭和48年	昭和53年	昭和58年
分布 I	μ_1	1.2631	1.4645	1.5185	1.6123
	σ_1^2	0.1212	0.1540	0.1526	0.1411
	N_1	45.71	45.11	46.18	36.49
分布 II	平均	3.76	4.67	4.93	5.38
	分散	1.82	3.63	4.00	4.39
	μ_2	2.3619	2.5149	2.6429	2.7005
全体	σ_2^2	0.0323	0.0175	0.0148	0.0124
	N_2	63.29	51.89	50.82	50.51
	平均	10.78	12.47	14.16	14.98
全体	分散	3.82	2.75	2.99	2.80
	平均	7.84	8.84	9.77	10.95
	分散	(7.87)	(8.85)	(9.76)	(10.95)
		14.98	18.29	24.72	25.91
		(15.06)	(18.47)	(24.95)	(26.18)

()内の数字は各資料より直接計算したものである。表-1 より再掲。



図一 各調査年別資料に対する混合対数正規分布のあてはめ結果



図二 各調査年別資料に対する混合対数正規分布の構成分布(分布I, 分布II)のあてはめ結果

樹高の頻度分布が時間とともに動いているか、これを明示するモデルへ、現在の対数正規分布モデルを改良する必要がある。

結 言

前報の択伐林直径分布に引き続いて、択伐林樹高分布についても、混合対数正規分布をあてはめその適合度を検討した。4資料中3資料については、よくあてはまっていたが自由度1資料だけ χ^2 分布による適合度検定の結果棄却された。しかし、全体的には、ほぼ満足いくあてはまりを示しており、混合対数正規分布は択伐林の樹高分布にも十分適応できるものと考えられる。

これまで、「樹木の集団である林分を解析する上で、その構成個体である樹木の胸高直径、樹高、材積などの分布を知ることは重要である。これは、単に生物学的な立場からだけではなく、林業経営の立場から見ても意義深いことである。特に、収穫予測など施業計画を立てる上において、現時点での林分構造を正確に把握することと重要であり、将来の予測を正確に行うためにも不可欠である。」という立場から、一斉林の直径分布、樹高分布、さらに、択伐林の直径分布、今回さらに、択伐林の樹高分布に対数正規分布を適応してきた。その結果、対数正規分布が各種頻度分布をほぼ的確に表現できるものとの結論を得た。しかし、これではまだ収穫予測や施業計画を立てるためには不十分である。今後は、これからさらに発展し、林分構造の将来予測を正確に行なうための方法について検討しなければならない。

謝辞 本研究を行うにあたり、協力していただいた元専攻生の渡邊勝廣君に深く感謝する。

引用文献

1. 山本充男・安井 鈞・本田秀昭：島根大農研報 16：53-56, 1982.
2. 稲田充男・安井 鈞・藤江 勲：島根大農研報 20：31-35, 1986.
3. 稲田充男：島根大農研報 20：36-41, 1986.
4. 稲田充男・安井 鈞・藤江 勲：島根大農研報 20：42-46, 1986.
5. 林業技術協会編：複層林の施業技術，日本林業技術協会，東京，160pp, 1982.
6. 山根陽二：島根大農卒論，127pp, 1984.
7. HALD, A. : Statistical Theory with Engineering Applications, John Wiley & Sons, New York, 1952, p. 152-158.
8. EVERITT, B. S. and HAND, D. J. : Finite Mixture Distribution, Chapman and Hall, London, 1981, p. 30-35.
9. 鈴木啓祐：人口分布の構造解析 大明堂 東京 241pp, 1985.