

長柱の座屈理論に基づく樹高曲線式の検討

第2報 材積式の誘導とその適合性

稲田 充 男*

Height curve derived from the theory of column buckling
2. Derivation of volume equation and its applicability

Mitsuo INADA

A mathematical model for describing diameter-volume relationships was derived theoretically. The model is based on the assumptions that the diameter-height relationships are expressed by the height curve derived from the theory of column buckling, and that the stem form is expressed by the Kunze's stem-curve equation. The model is a kind of one-variable volume equation, and its mathematical expression is

$$V = bD^{8/3}$$

where V : volume
 D : diameter
 b : constant.

The value of D 's exponent, $8/3$, was examined by comparing with 6 actual yield tables and 249 volume tables. The value ($8/3$) is reasonable, and the model may have a practical use.

緒 言

樹高曲線式とは胸高直径に対する樹高の平均的大きさを示す関係曲線式で、毎木調査結果から明らかにされた胸高直径を幹材積に移行する際、重要な媒介役を果たす。すなわち、胸高直径の毎木調査結果より直径階別本数を求め、ついで樹高曲線を定めることにより各直径階の木の平均樹高を求める。次に、これら各直径階値と平均樹高に応ずる単木材積を材積表により推定し、これに各直径階の本数を乗じて直径階別材積を求め、これらを総計して林分材積とする。このような林分材積の推定方法を材積表法という。現在、一般的に用いられている材積表は二変数材積表であり、その基となっているものが二変数材積式である。これは、胸高直径と樹高の関数として材積を推定しようとするものである。これには、全立木あるいは一部立木について樹高を測定しなければならない。しかし、樹高測定は胸高直径の測定に比べ、時間・労力を必要とする。また、測定誤差も大きい。その点、樹高を測定することなく、胸高直径より直接材積を推定する一変数材積表（一変数材積式）の実用的価値は

高い。

前報（山本，1985¹⁾では、長柱の座屈理論より

$$h = a \cdot d^{2/3}$$

なる樹高曲線式を導き、その有効性について検討をした。その結果、この樹高曲線式は実用性の高いものであることを認めた。本論では、この樹高曲線式と KUNZE の幹曲線式を応用し、一種の一変数材積式である、

$$v = b \cdot d^{8/3}$$

なる材積式を誘導し、この材積式の有効性について現在用いられている林分収穫表、立木幹材積表と比較し、検討する。

材積式の誘導

筆者らは「長柱の座屈理論に基づく樹高曲線式について」(1984)²⁾において、材積 v は、

$$v = f \cdot g \cdot h$$

f : 胸高形数
 g : 胸高断面積
 h : 樹高

という関係に、長柱の座屈理論より導いた理論的樹高曲

* 森林計画学研究室

線式、

$$h = a \cdot d^{2/3} \quad (1)$$

a : 定数

d : 胸高直径

を代入して、

$$v = f \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot a \cdot d^{2/3} = b \cdot d^{8/3} \quad (2)$$

b : 定数

という材積式(2)を想定した。ここでは、同様の材積式を KUNZE の幹曲線式を用いて誘導する。

樹幹の形状を KUNZE 式、

$$y^2 = p \cdot x^r$$

x : 梢端からの距離

y : x における半径

p, r : 定数

で表わす。材積 v は、この幹曲線が幹軸の回りに回転したときに得られる回転体の体積であるから、

$$v = \int_0^h \pi \cdot y^2 dx$$

として与えられる。これを变形すると、

$$\begin{aligned} v &= \pi \int_0^b p \cdot x^r dx \\ &= \frac{\pi}{r+1} p \cdot h^{r+1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $p \cdot h^r$ は地際半径の二乗に等しいから、地際直径を d_0 とすると

$$v = \frac{\pi}{4(r+1)} d_0^2 \cdot h$$

となる。これに、樹高曲線式(1)を代入すると、

$$v = \frac{\pi}{4(r+1)} d_0^2 \cdot a \cdot d^{2/3}$$

となる。ここで、 $d_0 = c \cdot d$ (c は定数) と考えられるから、

$$v = \frac{\pi}{4(r+1)} c^2 \cdot d^2 \cdot a \cdot d^{2/3}$$

となる。ここで、

$$b = \frac{\pi}{4(r+1)} a \cdot c^2$$

とおくと、

$$v = b \cdot d^{8/3}$$

という材積式を得る。これは、筆者らが想定した材積式にほかならない。

この材積式は一種の一変数材積式ではあるが、従来の経験的に導かれたものとは異なり、いわゆる理論的材積式と言うことができる。また、他の材積式には2~3個の自由な定数を持つものに対して、この材積式は1個のみであり、単純相対生長式 $v = a \cdot d^\beta$ における指数の値 β を $8/3$ と特定したものである。図-1にこの材積式

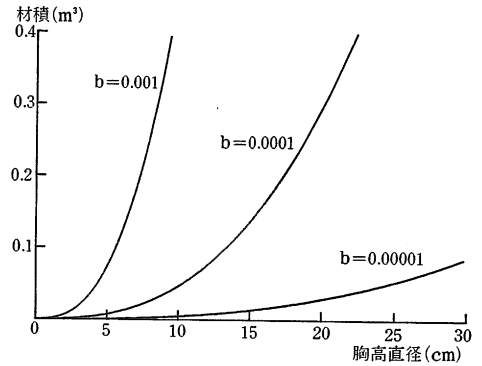


図-1 材積式 $v = b \cdot d^{8/3}$ の一般的形状 $b = 0.001, 0.0001, 0.00001$

の一般的形状を示す。

資料と方法

前節で示した材積式の有効性について、現在実際に使用されている次の林分収穫表と立木幹材積表とを用いて検討する。

林分収穫表 (島根県造林課編)³⁾

1. 斐伊川森林計画区スギ林分収穫表 (昭和28年3月調整)
2. 斐伊川森林計画区中間奥部赤松天然生林分収穫表 (昭和28年3月調整)
3. 斐伊川森林計画区雑木林分収穫表 (昭和28年3月調整)
4. 石西地方スギ林分収穫表 (昭和30年3月調整)
5. 石西地方アカマツ林分収穫表 (昭和30年3月調整)
6. 石西地方雑木林分収穫表 (昭和30年3月調整)

立木幹材積表 (林野庁計画課編)

1. 立木幹材積表 西日本編 (1956)⁴⁾
2. 立木幹材積表 東日本編 (1956)⁵⁾

これらの資料に対する検討方法は次に示すとおりである。

材積式(2)式の両辺の対数をとると、

$$\log v = \log b + \frac{8}{3} \log d \quad (3)$$

となる。すなわち、胸高直径と材積との関係は両対数グラフ上で傾き $8/3$ の直線となる。そこで、各林分収穫表に示してある平均胸高直径と、平均幹材積とを両対数グラフ上にプロットし、この傾きが $8/3$ の直線と一致

するかを調べる。

また、立木幹材積表には二変数材積式

$$\log v = \alpha + \beta \log d + \gamma \log h$$

が多数記載されており、これに理論的樹高曲線式

$$h = a \cdot d^{2/3}$$

を代入すると、

$$\begin{aligned} \log v &= \alpha + \beta \log d + \gamma \log(a \cdot d^{2/3}) \\ &= \alpha + \gamma \log a + (\beta + \frac{2}{3}\gamma) \log d \end{aligned}$$

を得る。この式と(3)式とを比べると、ともに $\log d$ についての一次式であり、 $\log d$ にかかる係数は $8/3$ および $\beta + (2/3)\gamma$ である。そこで、立木幹材積表に記載されている二変数材積式より $\beta + (2/3)\gamma$ を計算し、 $8/3$ と比較する。

結果と考察

各林分収獲表に示してある平均胸高直径と、平均幹材積を両対数グラフにプロットし、 $8/3$ の傾きの直線を入れたものを図-2(1)~(6)に示す。

各資料に対する材積式のあてはめ結果は次のとおりである。なお、括弧内の式は同じ資料に単純相対生長式をあてはめた結果である。

1. 斐伊川森林計画区スギ林分収獲表

$$\begin{aligned} v &= 7.97 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3} \\ (v &= 7.00 \times 10^{-5} \cdot d^{2.71}) \end{aligned}$$

2. 斐伊川森林計画区中間奥部赤松天然生林分収獲表

$$\begin{aligned} v &= 7.67 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3} \\ (v &= 1.76 \times 10^{-4} \cdot d^{2.41}) \end{aligned}$$

3. 斐伊川森林計画区雑木林収獲表

$$\begin{aligned} v &= 6.46 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3} \\ (v &= 1.83 \times 10^{-4} \cdot d^{2.17}) \end{aligned}$$

4. 石西地方スギ林分収獲表

$$\begin{aligned} v &= 7.95 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3} \\ (v &= 1.98 \times 10^{-4} \cdot d^{3.12}) \end{aligned}$$

5. 石西地方アカマツ林分収獲表

$$\begin{aligned} v &= 7.89 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3} \\ (v &= 7.47 \times 10^{-5} \cdot d^{2.68}) \end{aligned}$$

6. 石西地方雑木林収獲表

$$\begin{aligned} v &= 7.26 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3} \\ (v &= 9.64 \times 10^{-5} \cdot d^{2.53}) \end{aligned}$$

これら6資料に対するあてはめ結果から、残差平方和、誤差率を計算すると表-1に示すとおりである。残差平方和 RSS 、誤差率 $P(\%)$ は次の計算式により求めた。

平均値を \bar{v} 、個々の実測値を v_i 、各式で推定したそれぞれに必ず推定値を \hat{v}_i 、標本の数を n 、定数の数

表-1 林分収獲表に対する材積式のあてはめ結果

収獲表	残差平方和		誤差率(%)	
	材積式	単純相対生長式	材積式	単純相対生長式
1	0.00250	0.00246	5.73	5.80
2	0.00668	0.00302	8.62	5.91
3	0.00003	0.00001	12.74	7.41
4	0.01732	0.01352	13.96	12.58
5	0.00693	0.00692	9.40	9.58
6	0.00004	0.00004	12.18	12.30

- 1：斐伊川森林計画区スギ林分収獲表
- 2：斐伊川森林計画区中間奥部赤松天然生林分収獲表
- 3：斐伊川森林計画区雑木林収獲表
- 4：石西地方スギ林分収獲表
- 5：石西地方アカマツ林分収獲表
- 6：石西地方雑木林収獲表

を m とすると、

$$RSS = \sum (v_i - \hat{v}_i)^2$$

$$P = \sqrt{\frac{RSS}{n-m} \cdot \frac{100}{\bar{v}}} \quad (\%)$$

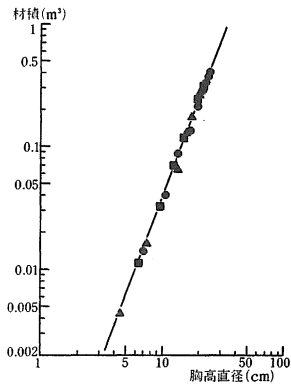
である。

また、立木幹材積表に記載されている二変数材積式より計算した $\beta + (2/3)\gamma$ の値を、その出現度数で示すと表-2のようになる。なお、立木幹材積表より見いだした二変数材積式の数は249式であった。

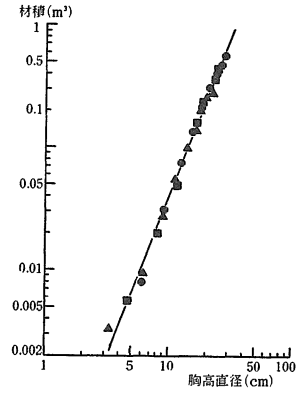
図-2(1)~(6)に示したように林分収獲表に示してある平均胸高直径と平均幹材積との関係は、両対数グラフ上ではほぼ傾き $8/3$ の直線と一致する。また、表-1に示したように残差平方和、誤差率とも単純相対生長式のそれらと大差なく、材積式として充分満足いくものである。次に、立木幹材積表についてみる。249式の二変数材積式より求めた $\beta + (2/3)\gamma$ の値を単純に平均すると

表-2 立木幹材積表に記載されている二変数材積式より計算した $\beta + (2/3)\gamma$ の値の頻度分布

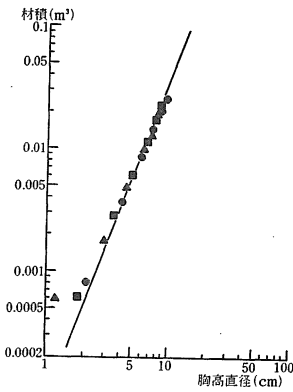
$\beta + (2/3)\gamma$ の値 以上 未満	出現数
1.8—1.9	1
1.9—2.0	1
2.0—2.1	1
2.1—2.2	4
2.2—2.3	4
2.3—2.4	24
2.4—2.5	84
2.5—2.6	94
2.6—2.7	27
2.7—2.8	5
2.8—2.9	2
2.9—3.0	1
3.0—3.1	1
合計	249



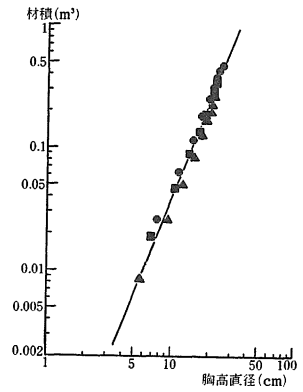
(1) 斐伊川森林計画区スギ林分収穫表に対するあてはめ結果
 $v = 7.97 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3}$



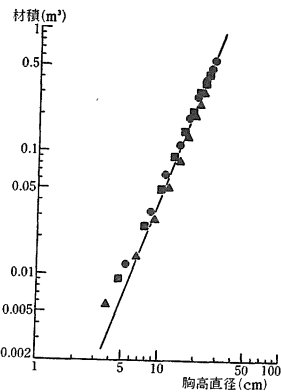
(2) 斐伊川森林計画区中間奥部赤松天然生林分収穫表に対するあてはめ結果
 $v = 7.67 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3}$



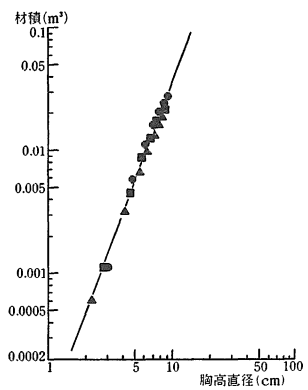
(3) 斐伊川森林計画区雑木林分収穫表に対するあてはめ結果
 $v = 6.46 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3}$



(4) 石西地方スギ林分収穫表に対するあてはめ結果
 $v = 7.95 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3}$



(5) 石西地方アカマツ林分収穫表に対するあてはめ結果
 $v = 7.89 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3}$



(6) 石西地方雑木林分収穫表に対するあてはめ結果
 $v = 7.26 \times 10^{-5} \cdot d^{8/3}$

図-2 各林分収穫表に対する材積式のあてはめ結果
ただし、●は地位上、■は地位中、▲は地位下である。

2.50 となる。本論で誘導した材積式の係数の値 8/3 はこれより若干大きい。しかし、これはさほど問題にする程の違いではないと考える。材積式に含まれる定数 b の値を然るべく定めることにより充分対応することができる。事実、図-2(1)~(6)に示した林分収穫表に対するあてはめ結果をみても、それぞれ単純相対生長式の係数の値は 2.71, 2.41, 2.17, 3.12, 2.68, 2.53 であるにもかかわらず、傾き 8/3 の直線は非常によく適合している。また、これらの値は丁度表-2に示した $\beta + (2/3)\gamma$ の出現範囲と一致しており、材積式の係数の値 8/3 は立木幹材積表に対しても充分適合するものと考えられる。

結 言

本論文では、樹幹の形状をKUNZE 式とし、これより

$$v = b \cdot d^{8/3}$$

なる材積式を誘導した。また、この式の有効性について、胸高直径にかかる指数 8/3 という値がどれだけ現実的なものであるかという観点より検討を加えた。その結果、現在実際に用いられている林分収穫表、立木幹材積表に比較的良好に適合しており、指数の値は現実的なものであり、材積式そのものも充分実用に耐え得るものであると言える。

立木の材積は簡単には測定することはできない。それは、立木のままで任意の位置の直径や樹高を測定することが難しいからである。また、大隅他(1971)が述べているように、「上部直径や樹高の測定は、最近測樹器の発達により実用的にもある程度まで可能となってきたが、まだその精度や所要時間のうえで限界があり、伐採木の場合のように自由に測定することはできない。」それゆえ、立木の場合は、なるべく測定因子の数を少なく

し、かつ実用に耐え得るような材積推定法が望まれる。この点からして、立木のままで測定しやすい胸高直径の関数として材積を推定できる一変数材積式は非常に貴重である。しかし、従来の一変数材積式は経験的に導かれたものがほとんどで、理論的根拠に乏しい。ここで示した材積式は、長柱の座屈理論に基づく樹高曲線式を発展させたもので理論的材積式と言えるものである。理論的根拠ならびに本論で示したような高い適合性、これらを兼ね備えたこの材積式の有効性は高いものと考えられる。今後、この材積式の有効性について、前報で示した樹高曲線式ともども、さらに検討を加えていくつもりである。

謝辞 本研究を行うにあたり、協力していただいた元専攻生の象谷勝一君に深く感謝する。

引用文献

1. 山本充男：島根大農研報，19：29-33，1985。
2. 山本充男・松村直人・鈴木太七：日林論，95：89-90，1984。
3. 島根県造林課編：林分収穫表，59pp。
4. 林野庁計画課編：立木幹材積表 西日本編，319pp，日本林業調査会，東京，1973。
5. 林野庁計画課編：立木幹材積表 東日本編，333pp，日本林業調査会，東京，1973。
6. 西沢正久：森林測定，348pp，農林出版，東京，1972。
7. 大隅真一・北村昌美・菅原聡・大内幸雄・梶原幹弘・今永正明：森林計測学，415pp，養賢堂，東京，1971。