

## 対数正規分布とその応用

### 第4報 混合対数正規分布の択伐林直径分布への応用

稲田 充男\*・安井 鈞\*・藤江 勲\*\*

Lognormal distribution and its applications

#### 4. Application of mixed lognormal distribution to diameter distributions of selection forest

Mitsuo INADA, Hitoshi YASUI & Isao FUJIE

The mixed lognormal distribution was derived theoretically and proposed as a mathematical model to describe the diameter frequency distributions in selection forests. The assumptions of the model are that the diameter frequency distributions in selection forests are the composition of diameter distribution on each age class, and that each diameter distribution can be described by the lognormal distribution. The model was applied to 4 observed diameter frequency distributions in Ate (*Thujaopsis dolabrata* var. HONDAI MAKINO) selection forests. The agreement between the observed and the expected frequencies was tested by the chi-square test. The model achieved a good fit to every observed diameter frequency distribution. The mixed lognormal distribution may be useful for analyzing the diameter frequency distributions of selection forests.

#### 緒 言

筆者はこれまで、対数正規分布を一斉林の胸高直径ならびに樹高の頻度分布に適応し、対数正規分布がこれらの理論分布として十分満足するものであることを確かめてきた(山本他, 1982, 稲田他, 1986, 稲田, 1986)。ここでは、一斉林ではなく択伐林の直径分布を対象として、これもまた対数正規分布により表現できるかという点について検討する。

大金(1981)が述べているように、「一般に択伐林経営は、森林から林木を収穫する場合、皆伐のように一度に伐採して収穫するのではなく、ほぼ毎年の生長量に相当する量を数年毎にまとめて収穫するものである。その際、一定の基準で伐採対象木を選定し、弱い伐採率で択伐を繰り返すのである。したがって、択伐の対象となる森林は、多様な樹種で構成され、また幼齢から老齢まで、つまり、直径の小さいものから大きいものまで成立しており、蓄積もある程度高いことが条件となっている。」それゆえ、択伐林の直径分布は一斉林に比べて複雑

なものになる。択伐林でしばしば見られるL型の直径分布を表現するものとして Meyer 型分布

$$f(D) = a \cdot \exp(-c \cdot D)$$

や、鈴木(1979)が、種子発芽の曲線と林分遷移の方程式の基本解との「たたみ込み」として考えて得た鞍部点近似評価式

$$f(D) = a \cdot (1 - D/b)$$

などがある。ただし、 $a, b, c$  は定数で、 $D$  は直径である。安定した択伐林の直径分布が Meyer 型を示すことは、ヨーロッパのモミ、トウヒの択伐林において広く認められている。また、松村・山本(1983)は鈴木<sup>6)</sup>の近似評価式を択伐林のL型直径分布にあてはめ、満足いく結果を得ている。

しかし、択伐林の直径分布が Meyer 型分布や鞍部点近似評価式で必ずしも表現できるわけではない。択伐林は幼齢から老齢まで種々の年齢の樹木により成立しているとはいえ、その構成割合には偏りや限りがあり、択伐林の直径分布はL型になるとは限らない。大隅(1961)<sup>7)</sup>が指摘しているように、「択伐林はその性質上、種々の年齢のものを含んでいる。したがって択伐林の直径分布

\* 森林計画学研究室

\*\* 附属演習林

は、これら齡階毎の分布の結合された形である。」と考えた方が理解しやすい。本論では、各齡階毎の直径分布は対数正規分布に従うとして、これらが結合したものである混合対数正規分布を択伐林の直径分布に応用し、その有効性について検討する。

### 混合対数正規分布

混合対数正規分布とは2つ以上の対数正規分布の合成によって形成された分布のことである。では、択伐林分の胸高直径の頻度分布が、なぜ混合対数正規分布に従うかを、鈴木(1985)に倣い、簡単なモデルを用いて説明する。

いま、択伐林の林分内には  $M$  種の齡階群があり、各群は、それぞれ独特の値の近辺に初期直径をもち、独特の値の近辺に生長率をもっているとする。このとき、時刻  $T$  における第  $m$  齡階 ( $m=1, 2, \dots, M$ ) に属するある樹木の直径  $D_{m,T}$  は、

$$D_{m,T} = D_{m,0} \prod_{t=1}^T (1 + r_{m,t}) \quad (1)$$

によって示される。ただし、 $D_{m,0}$  は第  $m$  齡階に属するその樹木の時刻0における直径である。 $r_{m,t}$  は時刻  $t-1$  から時刻  $t$  までの第  $m$  齡階に属するその樹木の直径の生長率であり、

$$r_{m,t} = (D_{m,t}/D_{m,t-1}) - 1$$

のように定義される。ここで、各樹木の  $D_{m,0}$  の値ならびに  $r_{m,t}$  の値は、一定の値をとらず、互いに異なった値を示すものとする。

式(1)について、両辺を対数で示せば、

$$\log D_{m,T} = \log D_{m,0} + \sum_{t=1}^T \log(1 + r_{m,t}) \quad (2)$$

となる。

中心極限定理によれば、一般に、 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$  が偶然的に変化する変数であるならば、

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \quad (3)$$

で定義された  $X$  の分布は、 $n$  が大きいとき、正規分布に近づく。中心極限定理については第2報を参照された。したがって、式(2)の  $\log D_{m,0}$  を  $X_0$ 、 $\log(1+r_{m,t})$  を  $X_t (t=1, 2, \dots, T)$  とすれば、

$$\log D_{m,T} = \sum_{t=0}^T X_t$$

となり、 $\log D_{m,T}$  は、偶然的に変化する変数  $X_t$  の和であるため、 $T$  が大きいとき、正規分布に従うことができる。このことから、 $T$  が大きいとき、 $D_{m,T}$  の分布は、対数正規分布に従うということが出来る。これから、林分内に第1齡階から第  $M$  齡階までのすべて

の齡階が存在し、それから成る択伐林分の時刻  $T$  における直径分布は、対数正規分布に従う第1齡階から第  $M$  齡階までの各齡階に属する樹木の直径分布の合成によって形成される混合対数正規分布になる。

したがって、いま、現在の時点が  $T$  であるとすれば、現在の択伐林分の直径の頻度分布が混合対数正規分布に従うことは、式(1)で示されるようなモデルによって説明することができる。

混合対数正規分布に従う択伐林の直径分布の確率密度関数  $f(D)$  は、

$$f(D) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=1}^M N_m \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_m D_m} \exp \left\{ -\frac{(\log D_m - \mu_m)^2}{2\sigma_m^2} \right\}$$

である。ただし、 $N$  は択伐林全体の樹木数、 $N_m$  は第  $m$  齡階に属する樹木数である。また、 $\mu_m$  は  $\log D_m$  の平均値、 $\sigma_m^2$  は  $\log D_m$  の分散である。本論では  $M=2$  とし、2つの対数正規分布が合成した

$$f(D) = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1 D_1} \exp \left\{ -\frac{(\log D - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} + \frac{N_2}{N} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 D_2} \exp \left\{ -\frac{(\log D - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}$$

というもっとも単純な形の混合対数正規分布を用いる。ここで、混合対数正規分布を形づくる2つの対数正規分布を分布I、分布IIと呼ぶことにする。各分布の平均、分散は、対数正規分布の性質より、

$$\begin{aligned} \text{分布 I} \quad & \text{平均 } \bar{D}_1 = \exp(\mu_1 + \sigma_1^2/2) \\ & \text{分散 } V_1 = \exp(2\mu_1 + \sigma_1^2) (\exp(\sigma_1^2) - 1) \\ \text{分布 II} \quad & \text{平均 } \bar{D}_2 = \exp(\mu_2 + \sigma_2^2/2) \\ & \text{分散 } V_2 = \exp(2\mu_2 + \sigma_2^2) (\exp(\sigma_2^2) - 1) \end{aligned}$$

となる。さらに、混合対数正規分布の平均、分散はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \text{平均 } \bar{D} &= (N_1 \cdot \bar{D}_1 + N_2 \cdot \bar{D}_2) / N \\ \text{分散 } V &= (N_1 \cdot V_1 + N_2 \cdot V_2) / N + N_1 \cdot N_2 (\bar{D}_1 - \bar{D}_2)^2 / N^2 \end{aligned}$$

ただし、 $N = N_1 + N_2$

となる。

### 資料と方法

ここで用いた資料は、「能登地方のアテ択伐林」試験地の1つである小泉試験地(輪島市三井町漆原字西の三、福島又一氏所有、方位S、傾斜22~31°、面積400m<sup>2</sup>)の調査結果である。小泉試験地は、従来一斉林であったが、昭和18年頃目通り周囲2尺以上の立木を全部伐採したといわれ、その後枝打などの手入れは行われていない(山根, 1984)<sup>9)</sup>。調査は昭和43, 48, 53, 58年の4回行われており、これら4つの調査年別の胸高直径測定結果を用いた。各調査年別資料の諸統計量を表-1に示す。ただし、各資料とも表中に( )で示した。直径が大き

く他のものから飛び離れているものについては、以下のあてはめ計算から除外した。

混合対数正規分布の母数の推定方法としては、図解による方法と積率解による方法とがある。

図解法とは、両対数グラフ上に観測値をプロットし、落とした点が描く2本の放物線により分布を2つに分けようとする方法である (HALD, 1952)<sup>10)</sup>。

ある変数が対数正規分布に従うとすると、それを両対数グラフ上にプロットすると1つの放物線を描く。これが、2つの対数正規分布の合成から成る分布ならば、2本の放物線を描くことになる。そこで、この2本の放物線を利用して観測分布を2つの構成分布に分けることができる。次に、これら構成分布それぞれに対して対数正規分布をあてはめる。対数正規分布のあてはめ方法については第2報を参照されたい。

積率解による方法は、観測値の平均値ならびに平均値まわりの5次積率までを計算し、これらを使って混合対数正規分布の6つの母数  $\mu_1, \sigma_1^2, N_1, \mu_2, \sigma_2^2, N_2$  の値を決定しようとするものである。(EVERITT et al., 1981)<sup>11)</sup>。これは、混合対数正規分布の構成分布 I, II が比較的接近していて、図解法では分けにくいような場

合、すなわち、両対数グラフ上に落とした点が、2本の放物線を描かないような場合に用いるとよい。

本論では、各資料を検討した結果、いずれも比較的是っきりした二山分布を呈しているの、積率解法による複雑な計算を避け、図解法により混合対数正規分布の母数を決定した。

### 結果と考察

各調査年別資料に対する各母数の推定結果は次のとおりである。また、各資料に対する混合対数正規分布のあてはめ結果を表-2~5, 図-1に示す。

#### 昭和43年調査

分布 I  $\mu_1: 1.6060 \sigma_1^2: 0.1425 N_1: 49$

分布 II  $\mu_2: 2.7045 \sigma_2^2: 0.0487 N_2: 60$

#### 昭和48年調査

分布 I  $\mu_1: 1.7289 \sigma_1^2: 0.1392 N_1: 47$

分布 II  $\mu_2: 2.8415 \sigma_2^2: 0.0353 N_2: 50$

#### 昭和53年調査

分布 I  $\mu_1: 1.8351 \sigma_1^2: 0.1539 N_1: 49$

分布 II  $\mu_2: 2.9876 \sigma_2^2: 0.0335 N_2: 48$

#### 昭和58年調査

分布 I  $\mu_1: 1.9229 \sigma_1^2: 0.1299 N_1: 39$

分布 II  $\mu_2: 3.0902 \sigma_2^2: 0.0364 N_2: 48$

表-1 調査年別資料の諸統計量

直径階中央値 (cm)	調査年別観測度数 (本)			
	昭和43年	昭和48年	昭和53年	昭和58年
2	4	2	1	0
4	18	14	13	8
6	18	17	15	12
8	9	10	11	10
10	8	4	5	5
12	4	4	4	3
14	19	6	3	1
16	11	17	6	5
18	8	9	12	6
20	8	4	11	11
22	2	7	3	6
24	0	3	7	6
26	0	0	4	5
28	(2)	0	2	5
30		(1)	0	4
32			0	0
34			(1)	0
36				0
38				0
40				(1)
合計 (本)	109 111*	97 98*	97 98*	87 88*
平均 (cm)	10.81 11.12*	11.90 12.08*	13.38 13.59*	15.61 15.89*
分散 (cm <sup>2</sup> )	32.16 36.85*	40.53 43.45*	55.53 59.29*	69.94 75.90*
標準偏差 (cm)	5.67 6.07*	6.37 6.59*	7.45 7.70*	8.36 8.71*

\*は( )内の数字をも含めて計算した結果。また、( )内の数字はあてはめ計算の対象から除いた。

さらに、これらの母数より各構成分布の平均、分散および分布全体の平均、分散を計算すると表-6のようになる。積率解法のように複雑な計算によらず、図解法による比較的安易に求めた結果ではあるが、図-1に示したように全体の分布形をよく表現している。また、平均、分散の推定結果も観測値によるものとはほぼ等しい。

あてはめ結果に対して  $\chi^2$  分布による適合度検定を行った。ただし、度数分布表の階級のうちに観測度数が5未満のものがあるときは、その階級を他の階級と併せて5以上にして計算した。また、自由度は、自由度=(階級数-6)とした。その結果は、

昭和43年調査	$\chi_0^2=3.02$	(自由度2)
昭和48年調査	$\chi_0^2=3.72$	(自由度2)
昭和53年調査	$\chi_0^2=1.78$	(自由度4)
昭和58年調査	$\chi_0^2=2.93$	(自由度5)

となる。有意水準5%とすると自由度2に対する  $\chi^2$  の値は 5.99, 自由度4では 9.49, 自由度5では 11.07 であり、各資料とも「観測度数は混合正規分布に適合する」という仮説は棄却されなかった。

図-1には混合対数正規分布によるあてはめ結果を示したが、構成分布 I, II に分けると図-2のようになる。各資料とも分布 I と分布 II にはっきりと分けられ、

表-2 昭和43年調査に対するあてはめ結果

直径階 (cm)	観測度数 (本)	推定度数 (本)		
		計	分布 I	分布 II
2	4	4.38	4.38	
4	18	20.30	20.30	
6	18	15.33	15.31	0.02
8	9	6.77	6.14	0.63
10	8	6.28	1.99	4.29
12	4	11.48	0.61	10.87
14	19	14.76	0.19	14.57
16	11	12.89	0.06	12.83
18	8	8.51	0.02	8.49
20	8	4.61		4.61
22	2	2.18		2.18
24		0.93		0.93
26		0.37		0.37
28		0.14		0.14
30		0.05		0.05
32		0.02		0.02
合計	109	109.00	49.00	60.00

表-3 昭和48年調査に対するあてはめ結果

直径階 (cm)	観測度数 (本)	推定度数 (本)		
		計	分布 I	分布 II
2	2	2.14	2.14	
4	14	15.45	15.45	
6	17	16.23	16.23	
8	10	8.27	8.26	0.01
10	4	3.65	3.21	0.44
12	4	4.20	1.12	3.08
14	6	8.79	0.38	8.41
16	17	12.32	0.13	12.19
18	9	11.34	0.05	11.29
20	4	7.62	0.02	7.60
22	7	4.06	0.01	4.05
24	3	1.82		1.82
26		0.72		0.72
28		0.26		0.26
30		0.09		0.09
32		0.03		0.03
34		0.01		0.01
合計	97	97.00	47.00	50.00

表-4 昭和53年調査に対するあてはめ結果

直径階 (cm)	観測度数 (本)	推定度数 (本)		
		計	分布 I	分布 II
2	1	1.49	1.49	
4	13	12.37	12.37	
6	15	16.10	16.10	
8	11	10.33	10.33	
10	5	5.04	5.01	0.03
12	4	2.64	2.17	0.47
14	3	3.43	0.90	2.53
16	6	6.90	0.37	6.53
18	12	10.11	0.15	9.96
20	11	10.40	0.06	10.34
22	3	8.12	0.03	8.09
24	7	5.12	0.01	5.11
26	4	2.75	0.01	2.74
28	2	1.30		1.30
30		0.56		0.56
32		0.22		0.22
34		0.08		0.08
36		0.03		0.03
38		0.01		0.01
合計	97	97.00	49.00	48.00

表-5 昭和58年調査に対するあてはめ結果

直径階 (cm)	観測度数 (本)	推定度数 (本)		
		計	分布 I	分布 II
2		0.43	0.43	
4	8	7.06	7.06	
6	12	13.00	13.00	
8	10	9.80	9.80	
10	5	5.06	5.05	0.01
12	3	2.33	2.20	0.13
14	1	1.83	0.89	0.94
16	5	3.54	0.35	3.19
18	6	6.55	0.14	6.41
20	11	8.84	0.05	8.79
22	6	9.07	0.02	9.05
24	6	7.51	0.01	7.50
26	5	5.25		5.25
28	5	3.23		3.23
30	4	1.79		1.79
32		0.92		0.92
34		0.44		0.44
36		0.20		0.20
38		0.09		0.09
40		0.04		0.04
42		0.02		0.02
合計	87	87.00	39.00	48.00

表-6 各調査年別資料に対する対数正規分布の母数ならびに平均、分散の推定結果

(単位は平均: cm, 分散: cm<sup>2</sup>)

調査年		昭和43年	昭和48年	昭和53年	昭和58年
分布 I	$\mu_1$	1.6060	1.7289	1.8351	1.9229
	$\sigma_1^2$	0.1425	0.1392	0.1539	0.1299
	$N_1$	49	47	49	39
分布 II	平均	5.35	6.04	6.77	7.30
	分散	4.39	5.45	7.62	7.39
	$\mu_2$	2.7045	2.8415	2.9876	3.0902
全体	$\sigma_2^2$	0.0487	0.0353	0.0335	0.0364
	$N_2$	60	50	48	48
	平均	15.32	17.45	20.17	22.39
全体	分散	11.70	10.92	13.84	18.56
	平均	10.84	11.92	13.40	15.62
	分散	(10.81)	(11.90)	(13.38)	(15.61)
		32.98	40.76	55.63	69.83
		(32.16)	(40.53)	(55.53)	(69.94)

( ) 内の数字は各資料より直接計算したものである。  
表-1より再掲。

それぞれが年とともに順次分散を大きくしながら生長していく様子が読み取れる。択伐林の直径分布は、択伐林に存在する種々の階級の分布が結合したものであり、それぞれが年とともに生長し、全体としても生長していく択伐林の生長過程を表現し、理解するには図-1よりも図-2の方が相応しいであろう。ともかく、混合対数正規分布の表現能力は高く、変化する択伐林の直径分布を解析する手段として役立つであろう。

### 結 言

混合対数正規分布を択伐林の直径分布に適用することにより、択伐林の直径分布の特徴をよく表わすことがで

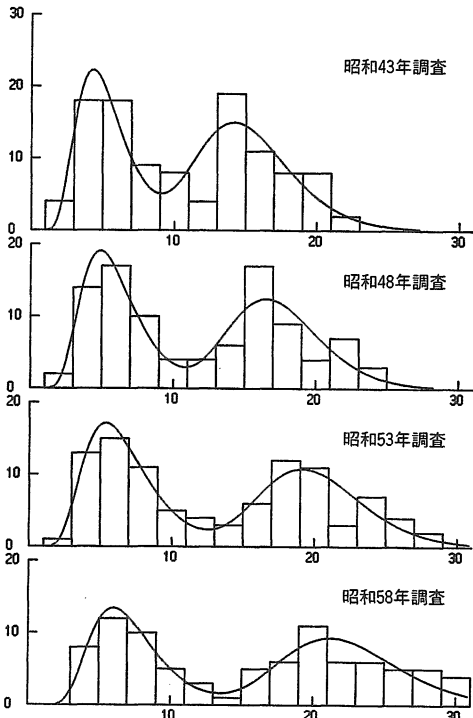


図-1 各調査年別資料に対する混合対数正規分布のあてはめ結果

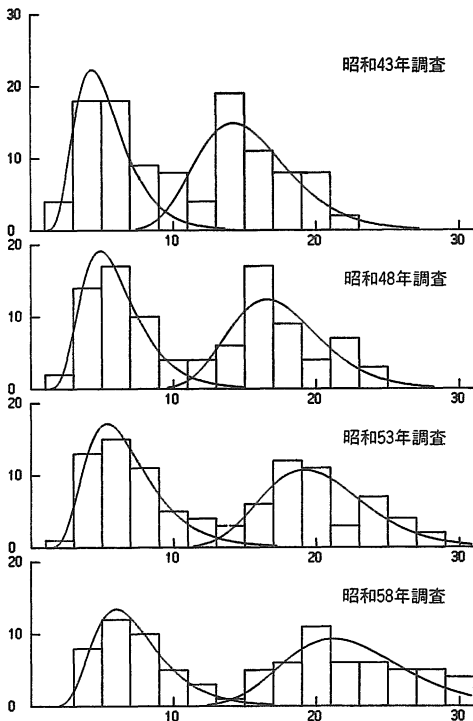


図-2 各調査年別資料に対する混合対数正規分布の構成分布のあてはめ結果

きた。しかし、本論で検討の対象とした分布は、比較的はっきりした二山分布であったが、択伐林の直径分布は千差万別で他にもいろいろな形のものがある。それらの分布に対しても混合対数正規分布がここで示したような適合結果が得られるか、今後資料を増やしさらに検討する必要がある。

択伐林の直径分布は、択伐林に存在する種々の齢階の分布が結合したものであり、それぞれの分布がどのような形をしているかを知れば、全体としての択伐林の直径分布がどのような形をしているかを知ることができる。さらに、それぞれの分布がどのように生長していくかを解明できれば、全体としての択伐林がどのように動いていくかもまた理解されよう。これからは、林分の形を表現するだけでなく、動きをも表現することができるモデルが必要となるであろう。

### 引用文献

1. 山本充男・安井 鈞・本田秀昭：島根大農研報16：53-56, 1982.
2. 稲田充男・安井 鈞・藤江 勲：島根大農研報20：31-35, 1986.
3. 稲田充男：島根大農研報20：36-41, 1986.
4. 大金永治：日本の択伐，370pp, 日本林業調査会，東京，1981.
5. 鈴木太七：森林経営学，197pp, 朝倉書店，東京，1979.
6. 松村直人・山本充男：日林論94：109-110, 1983.
7. 大隅真一：京都府大演報 5：9-18, 1961.
8. 鈴木啓祐：人口分布の構造解析，241pp, 大明堂，東京，1985.
9. 山根陽二：島根大農卒論，127pp, 1984.
10. HALD, A. : Statistical Theory with Engineering Applications, 152-158, John Wiley & Sons, N. York, 1952.
11. EVERITT, B. S. and HAND, D. J. : Finite Mixture Distribution, 30-35 (143pp), Chapman and Hall, London, 1981.