島根大農研報 (Bull. Fac. Agr. Shimane Univ.) **20** : 36−41, 1986

対数正規分布とその応用

第3報　分布の再生性と相対生長

稲　田　充　男*

Lognormal distribution and its applications
3. Multiplicative reproductive properties and allometry

Mitsuo Inada

The lognormal distribution possesses a number of interesting reproductive properties, most of which are immediate consequences of those for the normal distribution. The lognormal distribution has the multiplicative reproductive property, that is, if X is lognormal and a and b are constants, then aX^b is lognormal. Utilizing this property, the height frequency distribution can be estimated by the diameter frequency distribution.

The theoretical method to estimate the height frequency distribution was proposed. This method was based on the lognormal distribution expressing the diameter frequency and on the height curve derived from the theory of column buckling. Two height frequencies expected by this method fitted the respective observed frequencies sufficiently. The method may be useful and practicable, and it may be a clue to create the new forest inventory system organized with the diameter as a main factor.

緒　　言

林分構造を解析するためには，胸高直径，樹高などの頻度分布をうまく表現する理論分布が必要となる．この点について筆者らは第1報（山本他，1982）[1]において，3母数対数正規分布を林分の胸高直径の頻度分布に応用し，林分の直径分布解析にとって有力な手段になり得ることを認めた．さらに，第2報（稲田他，1986）[2]では，2母数対数正規分布が林分の胸高直径，樹高の頻度分布に適合することを応用，理論の両面より示した．

林分構造解析のための調査としては，個々の樹木の胸高直径，樹高などの測定を行うのが一般的である．しかし，樹高の測定は手間の割には正確さに欠ける．材積についても同様のことが言える．これら樹高，材積の頻度分布を比較的容易に測定できる胸高直径の頻度分布から推定することができれば，森林の調査のみならず，森林の管理，施業を行う上で大きな助けとなる．

本論では，2母数対数正規分布（以後，単に対数正規分布と呼ぶ）のべき変換に関する「分布の再生性」を利用し，胸高直径の頻度分布から他の生長因子の頻度分布が推定できるか，その可能性について検討する．

なお，あてはめ計算等は森林計画学研究室所有のパーソナルコンピュータ NEC-PC9801F を用いて行った．

分布の再生性

分布の再生性 (Reproductive Properties) とは，ある分布に従う確率変数をなんらかの変換を行った後も変換前と同じ形の分布になることである．たとえば，正規分布の再生性とは，それぞれ正規分布をなし，互いに独立な k 個の確率変数 $x_i(i=1, 2, 3, \ldots, k)$ の1次結合

$$x=a+\Sigma b\cdot x_i$$

として与えられる x もまた正規分布に従うことである．もっとも簡単な場合としては，確率変数 x が正規分布 $N(x|\mu, \sigma^2)$ に従い，$y=a+b\cdot x$ である時，y は正規分布 $N(y|a+b\mu, b^2\cdot\sigma^2)$ に従うことである．

正規分布が1次結合に対して再生性を有しているのに対して，対数正規分布はべき変換について再生性を有している．このことについて，Aitchison & Brown はその著書「The Lognormal Distribution」において対数正

*　森林計画学研究室

規分布の再生性に関する次のような定理を示している.[3]

定理1　x が$LN(x|\mu, \sigma^2)$ という対数正規分布をなすとき，$y=a\cdot x^b$ という確率変数もまた $LN(y|\log a+b\cdot\mu, b^2\cdot\sigma^2)$ という対数正規分布になる.

定理2　任意の標本 x_1, x_2 がそれぞれ独立に $LN(x_1|\mu_1, \sigma_1^2), LN(x_2|\mu_2, \sigma_2^2)$ という対数正規分布をなすとき，積 $y=x_1\cdot x_2$ もまた $LN(y|\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ という対数正規分布になる.

さらに，定理1，2を一般化して，

定理3　任意の標本 $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ がそれぞれ独立に $LN(x_1|\mu_1, \sigma_1^2), LN(x_2|\mu_2, \sigma_2^2), \ldots, LN(x_i|\mu_i, \sigma_i^2), \ldots, LN(x_n|\mu_n, \sigma_n^2)$ という対数正規分布をなすとき，積 $y=a\Pi x_i b_i$ という確率変数もまた $LN(y|\log a+\Sigma b_i\cdot\mu_i, \Sigma b_i^2\cdot\sigma_i^2)$ という対数正規分布になる．ただし，$b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_n$ および a は定数であり，$\Sigma b_i\cdot\mu_i$ および $\Sigma b_i^2\cdot\sigma_i^2$ がともに収束するものとする.

定理4　積 $x_1\cdot x_2$ が対数正規分布をするような，互いに独立な2つの確率変数 x_1, x_2 はそれぞれ対数正規分布である．ただし，特別な場合として，一方が一定で他方が対数正規分布であることもある.

この定理4は定理2の逆である.

相対成長

イギリスの Huxley，フランスの Teissier 等の唱えた相対生長の法則について，稲垣 (1980)[4] は次のように説明している.

「からだ全体と1つの器官の大きさを x, y，または，2つの異なった器官の大きさを x, y，または，1つの器官の異なった方向の大きさ（たとえば頭の長さと幅）をx, y，とするとき，x と y の生長速度には，一般に違いがある．この違いのため，x と y の比がからだ・器官の増大とともに変わり，それに従ってからだ・器官の形も変わって行く．このような変化を「変転」という．変転を調べるためには，x の増加を横軸に，y の増加を縦軸にとったグラフを描いてみればよい．この x, y の増加（すなわち生長）の比較を「相対生長」という.

Teissier は，

1）一定時間に起こる甲器官の大きさの微小な増加 dx が，そのときの甲器官の大きさ x と動物体の吸収する栄養分の微小量 da に比例する.

2）同一時間に起こる乙器官の大きさの微小な増加 dy が，乙器官のそのときの大きさ y と da に比例する.

3）ただし，甲乙両器官の間でそれぞれの比例定数 p, q が一般に異なる.

p と q が異なるのは，甲乙二器官の栄養分吸収能と，吸収した栄養分を器官の大きさの増加に役立たせる割合が異なるためと見なしたのである.

以上の考えを式で表わすと，

$$dx=pxda$$

$$dy=qyda$$

両式から da を消去すれば，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{q}{p}\cdot\frac{y}{x}$$

ここで，

$$q/p=\beta$$

とおき，微分方程式を解くと，

$$\log y=\beta\log x+\log\alpha \quad \log\alpha$$

は積分定数である．この式は，

$$y=\alpha\cdot x^\beta$$

と変形され，異調律（相対生長則）を表わすべき関数となる.」

この相対生長則は，前節の分布の再生性で述べたべき変換にほかならない．これにより，ある因子の分布が対数正規分布に従い，その因子と他の因子との間に相対生長関係（べき変換）が認められるならば，他の因子の分布もまた対数正規分布になると考えられる.

筆者（1984，1985）[5)6)]は，長柱の座屈理論より理論的樹高曲線式

$$h=\alpha\cdot d^{2/3}$$

h：樹高

d：胸高直径

α：定数

を求めている．これは，胸高直径と樹高との間の相対生長関係を認めたもので，相対生長式の係数 β を2/3 と特定したものである．この関係を用いて，胸高直径の頻度分布より樹高の頻度分布を推定することができる．以下，次節において説明する資料を用いて，この関係が実際に成り立つか検討する.

資料と方法

資料として，桶辰林業株式会社所有の森林（島根県六日市町上高尻地内字桑ノ野木谷）に設定した固定標準地における調査結果[7)]（資料Ⅰ，Ⅱ）を用いた．資料Ⅰは第3固定標準地の昭和58年調査結果，資料Ⅱは第5固定標準地の昭和57年調査結果である．どちらも植栽年は昭和36年で，樹種はヒノキである．各資料の胸高直径，樹高の平均および分散は，

資料Ⅰ　胸高直径　平均 14.68cm　分散 2.65cm²

樹　　高　平均 13.09m　分散 0.98m²

資料Ⅱ　胸高直径　平均 11.69cm　分散 3.47cm²

樹　　高　平均 10.59m　分散 0.98m²

である．さらに，表－1，2に各資料の胸高直径－樹高相関表を示す．

次に，胸高直径と樹高との間の相対生長関係を用いて胸高直径の頻度分布より樹高の頻度分布を推定する方法について説明する．

1）胸高直径，樹高の測定値に対し最小二乗法により，理論的樹高曲線式の係数 α を求める．係数 α を求める式は，胸高直径，樹高の測定結果を (d_1, h_1), (d_2, h_2), ..., (d_n, h_n) とすると

$$\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{n} h_i \cdot d_i^{2/3}}{\sum_{i=1}^{n} d_i^{4/3}}$$

である．

2）胸高直径の頻度分布に対して対数正規分布をあてはめる．あてはめ方法については第2報を参照されたい．

3）1で求めた理論的樹高曲線式の係数 α ならびに2で求めた胸高直径の頻度分布に対する対数正規分布の母数 μ_d および $\sigma_d{}^2$ を用いて，樹高の頻度分布に対する対数正規分布の母数 μ_h および $\sigma_h{}^2$ を，前述の分布の再生性で示した定理1に従い，次式により推定する．

$$\mu_h=\log\alpha+(2/3)\mu_d$$

$$\sigma_h{}^2=(2/3)^2\cdot\sigma_d{}^2$$

4）3で求めた母数 μ_h および $\sigma_h{}^2$ の推定値を用いて，樹高の頻度分布に対して対数正規分布のあてはめを行う．

表－1　資料Ⅰの胸高直径，樹高相関表　（単位：本）

	胸高直径階中央値 (cm)										合計
	10.5	11.5	12.5	13.5	14.5	15.5	16.5	17.5	18.5	19.5	
樹高階中央値(m) 17.25				1							1
16.75											0
16.25											0
15.75									1		1
15.25						1	1				2
14.75					2		2				4
14.25			1	1			2	2	1		7
13.75		1		1	7	4	3				16
13.25				3	5	10	3	1			22
12.75	1		4	8	4	3	2				22
12.25		1	1	6	4	4		1		1	18
11.75		2		5	1	2					10
11.25		1			1						2
合　計	1	5	6	25	24	24	13	4	2	1	105

表－2　資料Ⅱの胸高直径，樹高相関表　（単位：本）

	胸高直径階中央値 (cm)											合　計
	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5	12.5	13.5	14.5	15.5	16.5	17.5	
樹高階中央値(m) 13.25								1	1			2
12.75						1						1
12.25							1	1	2	1	1	6
11.75					3	3	3	1				10
11.25				3	8	4	6	5	1			27
10.75		1	2	7	6	4	3	1				24
10.25		1	7	10	7	3	3					31
9.75			3	3	6		1	1				14
9.25	1			6	1							8
8.75	1	3	1	1	1							7
8.25				1								1
7.75				1								1
合　計	2	5	13	32	32	15	17	10	4	1	1	132

結果と考察

各資料に対する理論的樹高曲線式のあてはめ結果は，

資料Ⅰ　$h=2.1741 \cdot d^{2/3}$

資料Ⅱ　$h=2.0602 \cdot d^{2/3}$

であった．図－1，2にその様子を示す．

また，胸高直径の頻度分布に対する対数正規分布の母数推定結果は，

資料Ⅰ　$\mu_d=2.68,\ \sigma_d{}^2=0.0125$

資料Ⅱ　$\mu_d=2.45,\ \sigma_d{}^2=0.0253$

であり，図－3，4にそのあてはまりの様子を示す．

理論的樹高曲線式の係数および胸高直径分布に対する対数正規分布の母数より，樹高分布に対する母数を推定すると，

資料Ⅰ　$\mu_h=2.56,\ \sigma_h{}^2=0.0056$

資料Ⅱ　$\mu_h=2.36,\ \sigma_h{}^2=0.0112$

となる．これらの母数による各資料に対する対数正規分布のあてはめ結果を表－3，4，図－5，6に示す．なお，表－3，4には比較のために，対数正規分布をなんら制限することなく，樹高の頻度分布に直接あてはめた結果も併記した．ちなみに，制限なく直接あてはめた場合の対数正規分布の母数はそれぞれ

資料Ⅰ　$\mu_h=2.57,\ \sigma_h{}^2=0.0054$

資料Ⅱ　$\mu_h=2.36,\ \sigma_h{}^2=0.0089$

であった．

資料Ⅰに対する推定結果は，直接樹高分布に対数正規分布をあてはめた結果とほとんど差がない．その母数についても差はなく非常によい推定ができた．他方，資料Ⅱについてみると，若干母数 σ^2 に対する推定値が本来のものより大きくなり，尖度が小さめの推定結果となった．χ の値を計算してみると，

資料Ⅰ　推定分布1　$\chi_0{}^2=2.22$

　　　　推定分布2　$\chi_0{}^2=1.37$

資料Ⅱ　推定分布1　$\chi_0{}^2=12.67$

　　　　推定分布2　$\chi_0{}^2=9.17$

となる．ただし，推定分布1とは理論的樹高曲線式により制限された対数正規分布による推定結果であり，推定分布2とは制限のない自由な対数正規分布による推定結果である．$\chi_0{}^2$ の値も少しずつ大きな値となったが，さほど問題にする程のものではない．資料Ⅰ，資料Ⅱとも全体的には樹高の頻度分布をよく表現しており，分布の推定結果としては満足いくものである，

以上，二例と数少ない試みではあるが，胸高直径の頻度分布より樹高の頻度分布を推定することは，これらの例をみる限り十分可能であると考える．また，理論的樹高曲線式の係数の決定についても，ここで行ったような胸高直径，樹高の実測値に対する最小二乗法により係数を定める必要はないであろう．理論的樹高曲線式の係数は唯一つであるから，たとえば，収穫表に記載されている平均胸高直径と平均樹高とから求めることもできよう．実測値を用いるにしても，従来の樹高曲線式の係数を決定するよりも，ずっと少ない数の測定で十分であろう．これにより，樹高測定に費やす時間，労力はかなり軽減されるものと思われる，

表－3　資料Ⅰに対する樹高分布の推定結果

樹高階(m) 以上未満	実測分布 (本)	推定分布1* (本)	推定分布2** (本)
9.5-10.0	0	0.03	0.01
10.0-10.5	0	0.25	0.14
10.5-11.0	0	1.31	0.88
11.0-11.5	2	4.49	3.39
11.5-12.0	10	10.49	8.75
12.0-12.5	18	17.40	15.87
12.5-13.0	22	21.30	20.96
13.0-13.5	22	19.89	20.86
13.5-14.0	16	14.57	16.12
14.0-14.5	7	8.59	9.92
14.5-15.0	4	4.16	4.98
15.0-15.5	2	1.69	2.08
15.5-16.0	1	0.59	0.74
16.0-16.5	0	0.18	0.22
16.5-17.0	0	0.05	0.06
17.0-17.5	1	0.01	0.01

*　推定分布1は理論的樹高曲線式により制限された対数正規分布による推定結果．

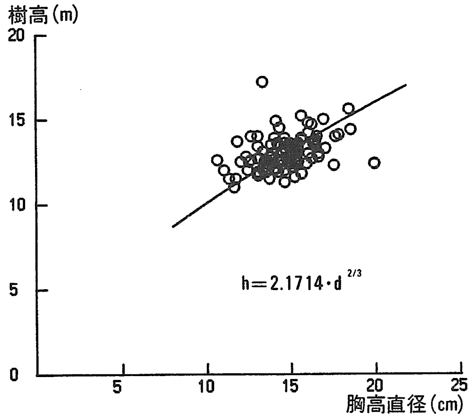
**　推定分布2は制限のない自由な対数正規分布による推定結果．

表－4　資料Ⅱに対する樹高分布の推定結果

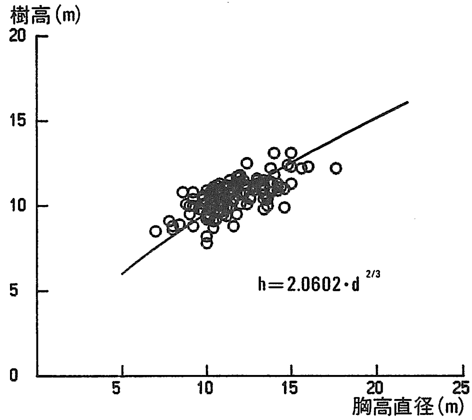
樹高階(m) 以上未満	実測分布 (本)	推定分布1* (本)	推定分布2** (本)
7.0- 7.5	0	0.07	0.02
7.5- 8.0	1	0.46	0.20
8.0- 8.5	1	1.96	1.25
8.5- 9.0	7	5.70	4.68
9.0- 9.5	8	11.90	11.63
9.5-10.0	14	18.69	20.21
10.0-10.5	31	22.94	25.82
10.5-11.0	24	22.75	25.23
11.0-11.5	27	18.73	19.52
11.5-12.0	10	13.11	12.31
12.0-12.5	6	7.96	6.49
12.5-13.0	1	4.26	2.92
13.0-13.5	2	2.04	1.15
13.5-14.0	0	0.89	0.40
14.0-14.5	0	0.35	0.12
14.5-15.0	0	0.13	0.03
15.0-15.5	0	0.05	0.01

*　推定分布1は理論的樹高曲線式により制限された対数正規分布による推定結果．

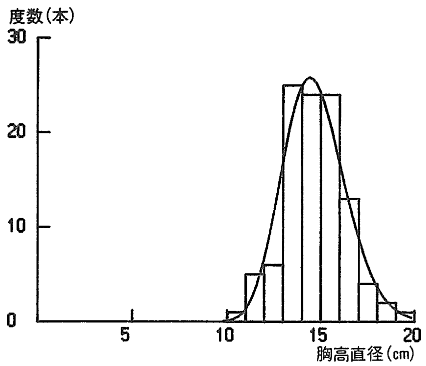
**　推定分布2は制限のない自由な対数正規分布による推定結果．



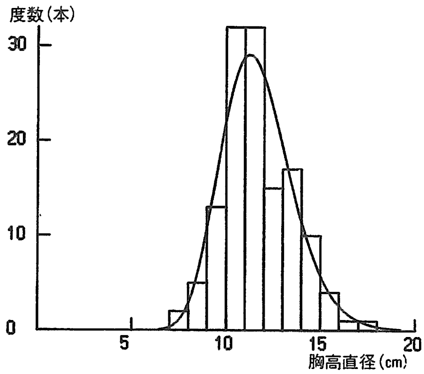
図－1　資料Ⅰに対する理論的樹高曲線式のあてはめ結果



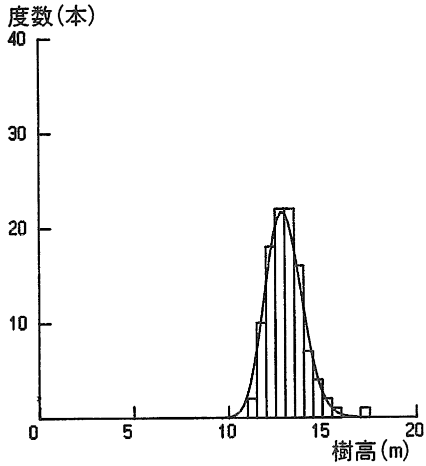
図－2　資料Ⅱに対する理論的樹高曲線式のあてはめ結果



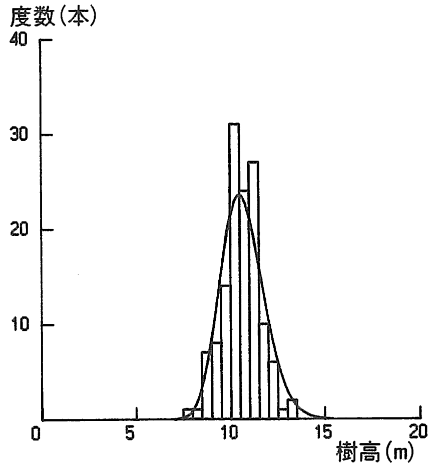
図－3　資料Ⅰの胸高直径分布に対するあてはめ結果



図－4　資料Ⅱの胸高直径分布に対するあてはめ結果



図－5　資料Ⅰに対する推定結果
$\mu=2.56$, $\sigma^2=0.0056$



図－6　資料Ⅱに対する推定結果
$\mu=2.36$, $\sigma^2=0.0112$

結　　言

対数正規分布はべき変換に対して分布の再生性を有しており，この性質を利用し胸高直径の頻度分布より樹高の頻度分布を推定できることを示した．その際，胸高直径と樹高との間に認められる相対生長関係（理論的樹高曲線式）を用いて推定を行っている．特殊な関係を用いるのではなく，広く認められている関係を用いていることに意義がある．相対生長則に代表される「べき変換」について，分布の再生性を有している対数正規分布は，ある生長因子の頻度分布より他の生長因子の頻度分布を合理的に推定することができ，非常に実用性の高い分布であると言える．

本論では，対数正規分布の再生性を利用し，胸高直径分布による樹高分布の推定を行った．同様に，材積についても胸高直径との相対生長関係が認められており，対数正規分布の再生性を利用して，材積分布の推定も行えると考えられる．筆者は「長柱の座屈理論に基づく樹高曲線式の検討２」（1986）[8] において，

$$v=b\cdot d^{8/3}$$

v：材積，d：胸高直径，b：定数

なる材積式を誘導した．この関係を用いて，胸高直径の頻度分布より材積の頻度分布が，樹高の場合と同様に，推定できるものと思われる．今後，この点についてさらに検討してみる必要があろう．これが，本論で示したような満足のいく推定が可能ならば，対数正規分布の有効性はますます高まるものと考える．

謝辞　本研究を行うにあたり，協力していただいた元専攻生の河合儀昌君に深く感謝する．

引　用　文　献

1. 山本充男・安井　鈞・本田秀昭：島根大農研報**16**：53-56，1982.
2. 稲田充男・安井　鈞・藤江　勲：島根大農研報**20**：31-35，1986.
3. AITCHISON, J. and BROWN, J. A. C.: The Lognormal Distribution, 176pp, Cambridge University Press, London, 1966.
4. 稲垣　新：数量生物学のすすめ，220pp，講談社（B428)，東京，1980.
5. 山本充男・松村直人・鈴木太七：日林論**95**：89-91，1984.
6. 山本充男：島根大農研報**19**：29-33，1985.
7. 安井　鈞・藤江　勲・山本充男：山陰地域研究（森林資源）**1**：1-8，1985.
8. 稲田充男：島根大農研報**20**：52-58，1986.