

対数正規分布とその応用

第2報 直径および樹高の頻度分布に対する2母数対数正規分布のあてはめ

稲田 充男*・安井 鈞*・藤江 勲**

Lognormal distribution and its applications
2. Adapting 2-parameter lognormal distribution to diameter and height distributions.

Mitsuo INADA, Hitoshi YASUI & Isao FUJIE

The two-parameter lognormal distribution was derived theoretically and proposed as a simple mathematical model to describe the diameter frequency distributions and height ones in even-aged stands. The model was applied to 24 observed diameter frequency distributions and 22 observed height ones. The agreement between the observed and the expected frequencies was tested by the chi-square test. The model achieved a good fit to the diameter and the height frequency distributions except 2 cases out of 24 in the diameter and 4 cases out of 22 in the height. The two-parameter lognormal distribution is very simple, but it may be useful for analyzing the even-aged stands.

緒 言

樹木の集団である林分を解析する上で、その構成個体である樹木の胸高直径、樹高、材積などの分布を知ることが重要である。これは、単に生物学的な立場からだけではなく、林業経営の立場から見ても意義深い。特に、収獲予測など施業計画を立てる上において、現時点での林分構成を正確に把握することは重要である。また、将来の予測を正確に行うためにも不可欠である。さて、林分構造解析のためには、胸高直径、樹高などの頻度分布をうまく表現する理論分布が必要となる。この点について筆者らは前報(山本他, 1982)において、3母数対数正規分布を林木の胸高直径の頻度分布に適用し、林分の直径分布解析にとって対数正規分布がかなり有力な手段になり得ることを認めた。

対数正規分布とは、観測値あるいは観測値にある定数を加えたものに対数変換を行ったものの母集団が正規になる母集団分布のことである。つまり、正の値のみをとる確率変数 y あるいは $y+y_0$ の対数をとったとき $x = \log(y)$, $x = \log(y+y_0)$ の分布が正規分布 $N(x|\mu, \sigma^2)$ になるとき y の従う分布をいう。ここで、前者が2母

数対数正規分布であり、後者が3母数対数正規分布である。本論では、より単純な形で林木の胸高直径および樹高の頻度分布を表現しようという目的で、第1報で用いた3母数対数正規分布ではなく2母数対数正規分布を用いた。この2母数対数正規分布による胸高直径および樹高の頻度分布に対するあてはめの結果について報告する。

なお、あてはめ計算等は森林計画学研究室所有のパーソナルコンピュータ NEC-PC9801F を用いて行った。

2 母数対数正規分布

2母数対数正規分布の性質などについては第1報で示したが、理解を助ける為にここに再掲する。

2母数対数正規分布 $LN(y|\mu, \sigma^2)$ は、

$$LN(y) = N(\log y) \quad y > 0$$

$$LN(y) = 0 \quad y \leq 0$$

である。密度関数 $l(y)$ は y で微分して、

$$l(y) = 0 \quad y \leq 0$$

$$l(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log y - \mu)^2\right\} \quad y > 0$$

である。この分布の中央値 m_e は、

$$m_e = \exp(\mu)$$

である。最頻値 m_0 は密度関数の対数を y で微分する

* 森林計画学研究室

** 附属演習林

ことにより求まる。すなわち、

$$\{\log l(y)\}' = \frac{1}{\sigma^2 y} (\mu - \sigma^2 - \log y)$$

であるから、密度関数を最大にする m_0 は、

$$m_0 = \exp(\mu - \sigma^2)$$

となる。次に、分布の原点まわりの j 次積率は、

$$\begin{aligned} \mu_j' &= \int_0^\infty y^j dLN(y) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \exp(jx) dN(x) \\ &= \exp(j\mu + j^2\sigma^2/2) \end{aligned}$$

となる。これより分布の平均 μ_1' 、分散 μ_2 は、

$$\begin{aligned} \mu_1' &= \exp(\mu + \sigma^2/2) \\ \mu_2 &= \exp(2\mu + \sigma^2) \{\exp(\sigma^2) - 1\} \end{aligned}$$

である。ここで歪度 β_1 は、

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \mu_3'/\mu_2^3 \\ &= \{\exp(\sigma^2) - 1\} \{\exp(\sigma^2) + 2\}^2 \end{aligned}$$

であり、 $\sigma^2 > 0$ 、 $\exp(\sigma^2) > 1$ より $\beta_1 > 0$ である。また、尖度 β_2 は、

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \mu_4'/\mu_2^2 \\ &= \exp(4\sigma^2) + 2\exp(3\sigma^2) + 3\exp(2\sigma^2) - 3 \end{aligned}$$

で、 $\exp(\sigma^2) > 1$ より $\beta_2 > 3$ である。

資料と方法

本論で用いた資料は、桶辰林業株式会社所有の森林（島根県六日市町上高尻地内字桑ノ野木谷）における毎木調査の結果である。

桶辰林業は、吉野林業の施業の流れをくむものであるが雪害等も考慮して主としてヒノキを植栽している。施業方針は、集約的であり無節材生産を目的としており、予定主伐は45年である。この間、数回間伐を行うこととしている。なお、桶辰林業については安井他（1986）を参照されたい。

標準地はいずれも南東～南に面している。昭和56年に標準地1, 2, 3, 4を設定、昭和57年に標準地5, 6, 7, 8を設定し、実習の際に調査を行っている。各標準地は斜距離で20m×20mであり、各面積は0.0328～0.0400haである。調査は、標準地内の全立木について胸高直径と樹高とを測定する。測定方法は、胸高直径については輪尺を用いて地上高1.2mの位置をmm単位で、樹高については、測高竿およびブルーメライスをを用いて測定する。ただし、樹高測定は時間の都合により、必ずしも標準地内の全立木には及んでいない。

標準地内の立木本数、胸高直径、樹高の統計量は表-1のとおりである。なお、この資料の中で標準地4の昭和58年度の調査における樹高については測定数が少ないのでここでは用いなかった。また、標準地8の昭和59年

度の樹高の調査は行われていない。あてはめ計算に用いた資料数は、胸高直径については24資料、樹高については22資料である。

各資料の胸高直径、樹高の頻度分布に2母数対数正規分布をあてはめ、そのあてはめ結果に対して χ^2 分布検定を行う。2母数対数正規分布のあてはめ手順は次に示すとおりである。

1) 前節で示した2母数対数正規分布の平均ならびに分散をモーメント法により求め、それより母数 μ と σ^2 を計算する。

2) 級間の期待度数 F_i を2母数対数正規分布関数式を用いて計算する。

$$F_i = N \int_b^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left\{-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dy$$

ただし、 a は級上限、 b は級下限、 N は観測総度数である。なお、この式は次の変換を行い、正規確率表を用いて求める。

$$x = \frac{\log y - \mu}{\sigma}$$

また、あてはめ結果に対する χ^2 分布検定の手順は次のとおりである。

1) 仮説：観測度数 f_i は期待度数 F_i に適合する。

2) χ_0^2 の値を次式により求める。

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i}$$

ただし、度数分布表の階級のうちに観測度数 f_i が $f_i < 5$ のものがあるときは、その階級を他の階級と併せて $f > 5$ として計算する。

3) 自由度 n を計算する。

$$n = k - d$$

ただし、 k は階級数、 d は期待度数を計算するのに使用した統計量の数である。

4) 有意水準 α を決め、 χ^2 分布表から自由度 n の χ_α^2 の値を求める。

5) χ_0^2 と χ_α^2 とを比較して、

$$\chi_0^2 \geq \chi_\alpha^2 \text{ ならば 仮説棄却}$$

$$\chi_0^2 < \chi_\alpha^2 \text{ ならば 仮説採択}$$

とする。

なお、本論では有意水準 α を5%として検定を行った。

結果と考察

胸高直径、樹高の資料それぞれに対して2母数対数正規分布をあてはめた結果を表-2, 3に示す。

2母数対数正規分布は胸高直径、樹高の頻度分布どちらにも良いあてはまりを示した。 χ^2 分布検定の結果を

表-1 標準地調査結果

(植栽年はすべて昭和36年, 樹種はヒノキ)

標準地	調査年	立木数	胸高直径				樹高				備考
			平均	分散	標準偏差	変動係数	平均	分散	標準偏差	変動係数	
	昭和	本	cm	cm ²	cm	%	m	m ²	m	%	
1	56	122	12.87	3.47	1.86	14.47	11.66	0.55	0.74	6.36	注 1
	58	122	13.80	3.98	1.99	14.46	12.73	1.11	1.05	8.28	
	60	121	14.51	4.79	2.19	15.08	13.63	0.88	0.94	6.88	
2	56	131	13.10	2.94	1.71	13.09	11.85	0.51	0.71	6.03	注 2
	58	131	14.03	3.42	1.85	13.18	13.21	0.90	0.95	7.18	
	60	129	14.38	4.26	2.06	14.35	13.95	0.58	0.76	5.46	
3	56	105	13.81	2.12	1.46	10.54	11.94	0.52	0.72	6.04	注 3
	58	105	14.68	2.65	1.63	11.09	13.09	0.98	0.99	7.56	
	60	104	15.13	3.48	1.87	12.33	13.85	0.88	0.94	6.77	
4	56	113	13.29	3.33	1.82	13.78	11.51	0.82	0.91	7.87	注 4 注 5
	58	113	13.92	4.39	2.10	15.05	13.47	1.07	1.03	7.68	
	60	112	14.84	5.38	2.32	15.63	13.48	1.23	1.11	8.23	
5	57	132	11.69	3.47	1.86	15.93	10.59	0.96	0.98	9.25	注 6
	59	132	12.21	4.60	2.14	17.57	11.50	1.82	1.35	11.73	
	61	132	12.84	5.31	2.30	17.95	13.33	2.49	1.58	11.85	
6	57	124	12.18	4.40	2.10	17.22	10.69	1.56	1.25	11.68	注 7
	59	124	12.94	5.00	2.34	17.28	11.51	1.95	1.40	12.13	
	61	122	13.52	6.16	2.48	18.35	12.49	2.18	1.48	11.82	
7	57	94	14.11	2.89	1.70	12.05	11.47	0.97	0.98	8.59	注 8
	59	94	14.96	3.71	1.93	12.88	12.97	1.91	1.38	10.66	
	61	92	15.58	4.22	2.06	13.20	13.64	1.08	1.04	7.60	
8	57	105	13.91	3.67	1.92	13.77	10.64	0.62	0.79	7.40	注 8
	59	105	14.73	4.75	2.18	14.80	—	—	—	—	
	61	105	15.40	5.94	2.44	15.83	12.82	1.27	1.13	8.79	

注 1：樹高は122本中 89本のみ測定

注 2：樹高は131本中113本のみ測定

注 3：樹高は105本中94本のみ測定

注 4：樹高は113本中 94本のみ測定

注 5：樹高は113本中 18本のみ測定

注 6：樹高は124本中106本のみ測定

注 7：樹高は132本中130本のみ測定

注 8：樹高は測定せず

みても、有意水準5%で棄却された分布は、胸高直径で24資料中2資料、樹高で22資料中4資料である。図-1に2母数対数正規分布のあてはめ例を示す。図-1の(1)、(2)に胸高直径および樹高の頻度分布に対する2母数対数正規分布の適合例を、(3)、(4)にそれぞれに対する棄却例を示す。これら棄却された分布はともにくし形(凹凸形)をしたものであり、このような形の分布には一山分布である2母数対数正規分布をあてはめることは困難である。これら例外的なものを除き2母数対数正規分布は胸高直径、樹高の頻度分布によく適合し、これらの分布を十分表現していると言える。

次に、林分の胸高直径、樹高の頻度分布が、単にここで示した資料だけではなく、一般的に2母数対数正規分布に従うかを、鈴木(1985)⁴⁾に倣い、簡単なモデルを用いて理論的に検討する。

いま、林分内の樹木数は十分大きく、各樹木の直径は多様な値を示すものとする。このとき、時刻 T におけるある樹木の直径 D_T は、

$$D_T = D_0 \prod_{i=1}^T (1+r_i) \quad (1)$$

によって示される。ただし、 D_0 はその樹木の時刻0に

おける直径、 r_i は時刻 $t-1$ から時刻 t までの直径の生長率であり、

$$r_t = (D_t/D_{t-1}) - 1$$

のように定義される。ここで、各樹木の D_0 の値ならびに r_t の値は、一定の値をとらず、互いに異なった値を示すものとする。

式(1)について、両辺を対数で示せば、

$$\log D_T = \log D_0 + \sum_{i=1}^T \log (1+r_i) \quad (2)$$

となる。

中心極限定理によれば、一般に、 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ が偶然的に変化する変量であるならば、

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \quad (3)$$

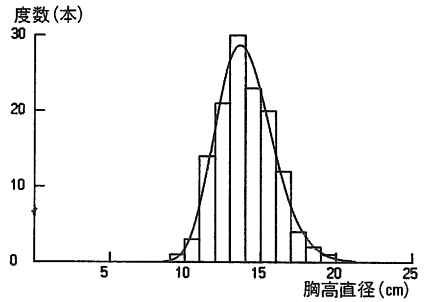
で定義された X の分布は、 n が大きいとき、正規分布に近づく。中心極限定理とは、

「 X_1, X_2, \dots, X_n が互いに独立な(互いに無関係に出現する)確率変数であり、すべて同一の分布に従い、その期待値 $E(X_i)$ および分散 $V(X_i)$ が存在し、それらがそれぞれ μ および σ^2 であるならば、確率変数 X

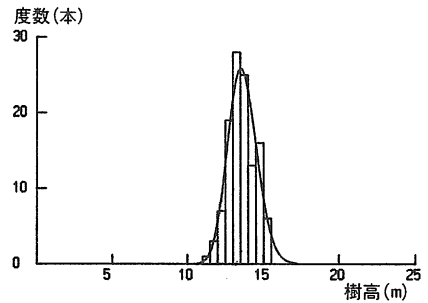
$$X = (\bar{X} - \mu) \sqrt{n}/\sigma$$

表-2 胸高直径の頻度分布に対する
2母数対数正規分布のあてはめ結果

標準地	調査年		μ	σ^2	χ^2_0	自由度	$\chi^2_{0.05}$	備考
	昭和	本数						
1	56	122	2.54	0.0205	1.852	5	11.07	
	58	122	2.61	0.0202	3.608	5	11.07	
	60	121	2.66	0.0224	2.073	5	11.07	
2	56	131	2.56	0.0171	2.194	4	9.49	
	58	131	2.63	0.0174	1.179	4	9.49	
	60	129	2.66	0.0212	7.988	5	11.07	
3	56	105	2.62	0.0113	1.988	3	7.81	
	58	105	2.68	0.0125	2.561	3	7.81	
	60	104	2.71	0.0155	1.081	4	9.49	
4	56	113	2.58	0.0198	2.942	4	9.49	
	58	113	2.62	0.0233	7.336	5	11.07	
	60	112	2.69	0.0243	2.380	6	12.59	
5	57	132	2.45	0.0253	6.125	5	11.07	
	59	132	2.49	0.0310	2.321	6	12.59	
	61	132	2.54	0.0314	2.537	6	12.59	
6	57	124	2.49	0.0299	9.918	6	12.59	
	59	124	2.55	0.0291	8.493	6	12.59	
	61	122	2.59	0.0334	3.666	6	12.59	
7	57	94	2.64	0.0149	7.902	4	9.49	棄却
	59	94	2.70	0.0174	17.507	5	11.07	
	61	92	2.74	0.0183	10.337	4	9.49	
8	57	105	2.62	0.0193	5.432	5	11.07	
	59	105	2.68	0.0226	4.510	5	11.07	
	61	105	2.72	0.0265	8.492	6	12.59	



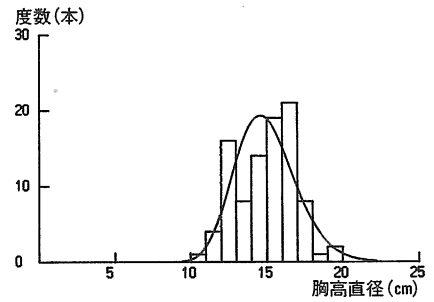
(1) 適合例 (胸高直径)
標準地: 2 調査年: 昭和58年



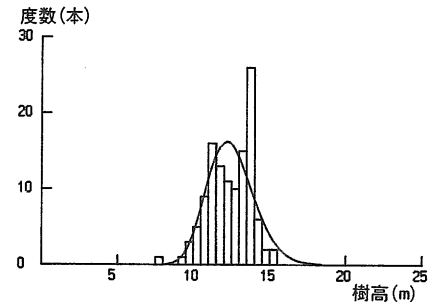
(2) 適合例 (樹高)
標準地: 1 調査年: 昭和60年

表-3 樹高の頻度分布に対する
2母数対数正規分布のあてはめ結果

標準地	調査年		μ	σ^2	χ^2_0	自由度	$\chi^2_{0.05}$	備考
	昭和	本数						
1	56	89	2.54	0.0039	1.524	2	5.99	
	58	122	2.54	0.0262	5.782	5	11.07	
	60	121	2.61	0.0047	4.570	4	9.49	
2	56	113	2.47	0.0036	2.172	3	7.81	
	58	131	2.58	0.0053	3.432	4	9.49	
	60	129	2.63	0.0031	1.720	3	7.81	
3	56	94	2.48	0.0037	9.309	3	7.81	棄却
	58	105	2.57	0.0054	1.370	4	9.49	
	60	104	2.63	0.0049	8.047	5	11.07	
4	56	80	2.44	0.0063	2.092	3	7.81	計算せず
	58	—	—	—	—	—	—	
	60	112	2.60	0.0071	7.531	5	11.07	
5	57	132	2.36	0.0089	9.170	5	11.07	棄却
	59	132	2.43	0.0155	24.212	8	15.51	
	61	130	2.58	0.0157	7.238	7	14.07	
6	57	124	2.36	0.0137	15.815	6	12.59	棄却
	59	106	2.44	0.0151	12.219	7	14.07	
	61	122	2.52	0.0149	33.100	7	14.07	
7	57	94	2.44	0.0072	4.460	5	11.07	
	59	94	2.56	0.0125	13.048	7	14.07	
	61	92	2.61	0.0060	4.265	5	11.07	
8	57	105	2.36	0.0067	6.449	4	9.49	計算せず
	59	—	—	—	—	—	—	
	61	105	2.55	0.0078	6.488	5	11.07	



(3) 棄却例 (胸高直径)
標準地: 7 調査年: 昭和59年



(4) 棄却例 (樹高)
標準地: 6 調査年: 昭和61年

図-1 対数正規分布のあてはめ結果
適合例および棄却例

$$\text{ただし, } \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$$

の分布関数は、 n が大きいとき、正規分布 $N(0,1)$ の分布関数に近づく。すなわち、

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right\} \rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-X^2/2) dX$$

という式が成立する。 x は X のある値である。

さらに、 X_1, X_2, \dots, X_n が同一の分布に従わなくとも、 n が大きいとき、

$$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} \leq x\right\} \rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-X^2/2) dX$$

という式が成立する。ただし、 $\mu_{\bar{X}}$ は \bar{X} の平均値、 $\sigma_{\bar{X}}$ は \bar{X} の標準偏差である。

である。したがって、式(2)の $\log D_0$ を X_0 、 $\log(1+r_t)$ を $X_t (t=1, 2, \dots, T)$ とすれば、

$$\log D_T = \sum_{i=0}^T X_i$$

となり、 $\log D_T$ は、偶然的に変化する変量 X_t の和であるため、 T が大きいとき、正規分布に従うことができる。このことから、 T が大きいとき、 D_T 分布は、2母数対数正規分布に従うことができる。

したがって、いま、現在の時点が T であるとすれば、現在の直径の頻度分布が対数正規分布に従うことは、式(1)で示されるようなモデルによって説明することができる。同様に、樹高の頻度分布もまた対数正規分布に従うことも容易に説明できる。

以上、実測資料に対するあてはめ結果ならびに上述のモデルによる検討から、2母数対数正規分布は林分の胸高直径、樹高の頻度分布をよく表現し、これらの理論分布として、さらに林分構造解析の手立てとして有効であると考える。

結 言

林分の胸高直径、樹高の頻度分布として2母数対数正規分布を取り上げ、理論分布としての有効性について検討した、胸高直径、樹高の頻度分布どちらにもよく適合

し、満足な結果を得た。特に、第1報で用いた3母数対数正規分布ではなく、より単純な2母数対数正規分布を用いてもなお、十分な適合度が得られたことは注目に値する。一般に、モデルに含まれる母数の数が多くなれば、モデルとしての柔軟性は増し、適合性は高まる。反面、母数に対する制約が多くなり、モデルとしての発展性、応用性は低くなる。その点、母数の数を減らしたにも拘らず、十分な適合性をもつ2母数対数正規分布は、モデルとしての価値は高いと言える。また、モデルとは単に現象を数式化したものではない。定められた目的に対して、複雑な現象をその本質を失うことなくできるだけ単純化し、現象の理解や予測の助けになるものでなければならない。そのためには、生物学的認識に基づき合理的にモデルを誘導しなければならない。本論では、非常に単純な形ではあるが、胸高直径、樹高の頻度分布が2母数対数正規分布に従うことを、モデルを用いて理論的に示すことができた。このように、2母数対数正規分布の有効性は応用面、理論面の両面において認められ、林分構造解析の手段として高く評価できる。特に、2母数対数正規分布のモデルとしての発展性・応用性の豊かさは、今後の研究に大いに役立つものと考えらる。

謝辞 本研究を行うにあたり、協力していただいた元専攻生の河合儀昌君ならびに調査に参加した林学科卒業生および学生諸君に深く感謝する。

引 用 文 献

1. 山本充男・安井鈞・本田秀昭：島根大農研報16：53-56, 1982.
2. 安井鈞・藤江勲・山本充男：山陰地域研究(森林資源)1：1-8, 1985.
3. 岸根卓郎：理論応用統計学, 600pp, 養賢堂, 東京 1980.
4. 鈴木啓祐：人口分布の構造解析, 241pp, 大明堂, 東京, 1985.