島根大農研報 (Bull. Fac. Agr. Shimane Univ.) **19** : 29－33, 1985

長柱の座屈理論に基づく樹高曲線式の検討

山　本　充　男*

Height curve derived from the theory of column buckling

Mitsuo YAMAMOTO

A kind of the height-diameter curve equation was derived from the theory of column buckling. The mathematical expression of the hieght curve is

$H=aD^{2/3}$

where H: height

D: diameter

a : constant.

Since this equation consists of only one constant, the curve expressed by this equation is not flexible but stable.

The applicability of this equation was examined by applied it to the observed height-diameter relationships. The goodness of fit of this equation was good enough for use in comparison with following existing 6 height curve equations.

Allometric equation	$H=aD^b$
Näslund equation	$H=\left(\frac{D}{a+bD}\right)^2+1.2$
Modified Näslund eq.	$H=\left(\frac{D}{a+bD}\right)^2$
Inverse equation	$H=\frac{D}{a+bD}$
Henricksen equation	$H=a+b\log D$
Linear regression	$H=a+bD$

where H: height

D: diameter

a, b : constants.

緒　　言

樹高曲線とは，「直径と樹高の関係を示すもの」(鈴木・平田，1958)[1]であるが，さらに詳しく，「胸高直径に対する樹高の平均的大きさを示す関係曲線」(大隅ら，1981)[2]と定義づけることができる．その役割について，大隅らは，「断面積から材積への移行方法の一つに立木材積表を用いる材積表法と呼ばれる方法がある．わが国でもっともよく整備され実用に供されている立木材積表として，胸高直径と樹高とを独立変数とする二変数材積表がある．この材積表を用いる場合には，胸高直径と樹高の平均的関係をつかまえる必要があり，これがなくては，断面積から材積への移行ができない．すなわ

* 森林計画学研究室

ち，樹高曲線は不可欠なものであり，これを定めることは胸高直径の毎木調査と同様きわめて重要な作業である.」と，和田ら（和田・川村・牧瀬，1982)[3)]は，「林分材積の推定にあたって，現在わが国においては，直径と樹高を知ることにより立木材積が与えられる，いわゆる二変数材積表が広く用いられている．樹高は胸高直径に比べてその測定にかなり多くの時間，労力を要するので，林分内の全立木については測定しないのが普通で，一般に測定木として一部を選び，これらの胸高直径と樹高の測定値から樹高曲線を求める.」と述べている．すなわち，樹高曲線は毎木調査結果から明らかにされた胸高断面積を幹材積に移行する際，重要な媒介役を果たすのである．

このような樹高曲線に対し，曲線式，いわゆる樹高曲線式をあてはめるのが一般的であり，この曲線式は数十種にも及ぶ（西沢，1972)[4)]．しかし，これらはともに理論的根拠に乏しく，経験的に与えられたものが多い．これに対し，長柱の座屈理論より一種の樹高曲線式が誘導されている（山本・松村・鈴木，1984)[5)]．本論では，この樹高曲線式（以下，座屈式と呼ぶ）の有効性について検討を行った．対象とした林分は，島根大学農学部付属匹見演習林内の試験地である．また，比較のために現在よく用いられている樹高曲線式についても同様のあてはめを行った．

樹高曲線としての座屈式

長柱の座屈理論より誘導された式（座屈式）について，その誘導および形状について説明する．

地上に直立している樹木は，その太さが十分大きなものでなければ自重によって彎曲し，荷重のわずかな増加によっても大きな変化を起こし破壊してしまうはずである．したがって，自重による座屈に耐えられる形をしているとすると，その高さ H と半径 R との関係は，次元解析的に，

$$\frac{H^3}{R^2} < \frac{2E}{\rho g} \sim 2.10^6 m$$

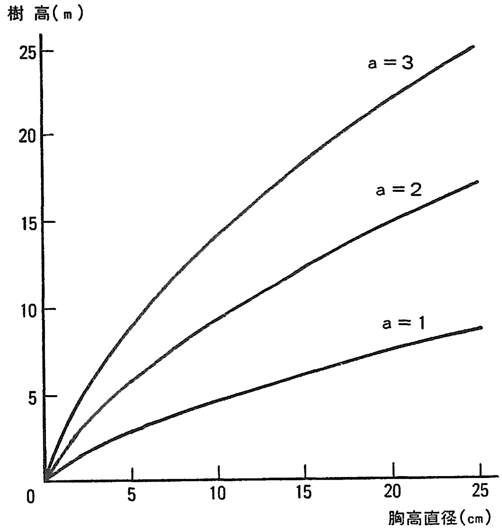
を満足しなければならないとされている．ここで，E, ρ は木材のヤング率，密度であり，g は重力の加速度である．このことから，樹高 H は胸高直径 D の $2/3$ 乗に比例すると考え，

$$H = aD^{2/3} \qquad (1)$$

という樹高曲線式を得る．

この理論について，T.McMahon も，その著書「Size and Shape in Biology」[6)]の中で樹高と直径の関係が，

$$H \propto D^{2/3}$$



図－1　座屈式の一般的形状
（a=1, 2, 3 の場合）

になると述べている．

この式は後述する相対生長式の指数部分を $2/3$ と定めたものである．それゆえ，曲線の形状は非常に固定的であり，従来の樹高曲線式ほどの柔軟性は望めない．しかし，定数の一つを $2/3$ と固定することにより，a の次元が長さの $1/3$ 乗という次元をもつ．よってこの a の値により，林分間，樹種間，その他の比較が可能となる．

図-1に座屈式の一般的形状を示す．原点を通る上に凸の曲線である．

資 料 と 方 法

資料として，島根大学農学部付属匹見演習林内の試験地の測定結果を用いた．各試験地は，20m×20mの方形プロットで，その中にある全立木について，胸高直径，樹高を測定してある．各試験地の林齢，樹種，胸高直径および樹高の平均，分散等を表-1に示す．

これら11試験地の測定結果に対し，座屈式を正規方程式による最小二乗法によりあてはめを行った．比較のために，次の6式についてもあてはめを行った．

相対生長式　$H = aD^b$　(2)

Näslund 式　$H = \left(\frac{D}{a+bD}\right)^2 + 1.2$　(3)

Näslund 式 変形　$H = \left(\frac{D}{a+bD}\right)^2$　(4)

逆数式　$H = \frac{D}{a+bD}$　(5)

Henricksen 式　$H = a + b\log D$　(6)

直線回帰式　$H = a + bD$　(7)

表－1　匹見演習林内の試験地別諸統計量　　　D：胸高直径　H：樹高

試験地番号	調査年	樹齢	樹種	樹高測定本数	平均		分散		標準偏差		変動係数		林小班
					D	H	D	H	D	H	D	H	
	昭和年	年		本	cm	m	cm^2	m^2	cm	m	%	%	
1	59	17	ヒノキ	82	8.8	6.22	6.62	2.12	2.57	1.45	29.2	23.4	7－い
2	59	17	スギ	106	11.4	7.55	18.10	5.59	4.25	2.36	37.1	31.3	7－は
3	59	16	スギ	94	11.8	7.62	9.18	2.63	3.03	1.62	25.6	21.3	7－ほ
4	55	12	スギ	100	6.5	4.64	4.80	1.38	2.19	1.17	33.9	25.3	7－ち
5	59	15	スギ	94	10.6	6.58	15.00	3.99	3.87	2.00	36.7	30.3	7－ぬ
6	59	15	ヒノキ	93	9.3	5.72	5.35	1.33	2.31	1.15	24.9	20.1	7－る
7	58	20	スギ	73	12.8	7.64	14.80	2.70	3.84	1.64	30.1	21.5	8－ろ
8	58	18	スギ	97	13.8	9.02	32.97	6.79	5.74	2.60	41.5	28.8	8－は
9	58	17	スギ	62	12.0	7.38	19.20	5.09	4.38	2.25	36.4	30.5	8－ほ
10	58	13	スギ	90	9.4	5.79	7.94	2.18	2.81	1.47	29.9	25.5	9－い
11	58	17	スギ	72	8.3	5.19	8.32	3.04	2.88	1.74	34.8	33.6	11－ほ

ただし，H は樹高，D は胸高直径，a, b は定数である．なお，各曲線式のあてはめは，胸高直径階（1cm括約）ごとに樹高の平均値を求め，その値に対して最小二乗法を適用した．また，各式の適合度の比較は誤差率によった．誤差率とは，平均樹高を $\overline{H}$，個々の樹高を H_i，樹高曲線で推定したそれに対応する値を $\hat{H}_i$，，標本木の数を n，定数の数を m とすると，

$$P=\frac{\sigma}{\overline{H}}\times 100\ (\%)$$

ただし，

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(H_i-\hat{H}_i)^2}{n-m}}$$

として定義されるものである．

結果と考察

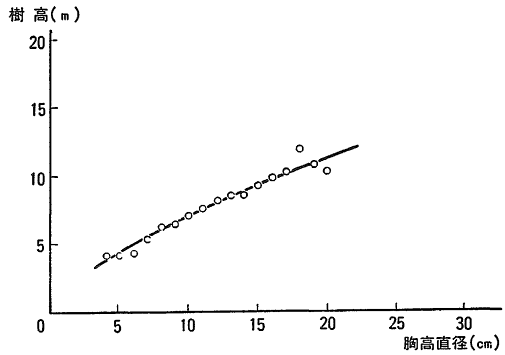
各資料に対する座屈式のあてはめ結果について，そのあてはまりの様子を図-2，3，4に示す．また，最小二乗法により求めた，定数 a の値，残差平方和，σ のならびに誤差率 $P(\%)$ を表-2に示す．

表－2　座屈式のあてはめ結果

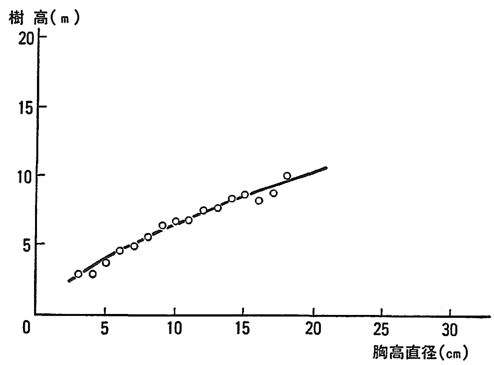
試験地番号	定数 a	残差平方和	σ	誤差率 $P(\%)$
1	1.512	0.450	0.224	3.92
2	1.559	1.447	0.347	4.57
3	1.512	0.249	0.166	2.18
4	1.419	0.099	0.119	2.44
5	1.424	1.402	0.316	4.90
6	1.379	2.829	0.595	10.80
7	1.448	1.636	0.426	5.47
8	1.630	8.856	0.701	7.90
9	1.494	2.506	0.501	6.61
10	1.358	1.144	0.378	6.46
11	1.370	2.307	0.480	9.03

図-2～4に示したように，座屈式によるあてはめ結果はほぼ満足のいくものである．また，表-2に示したように，残差平方和はそれ程大きくなく，誤差率も十分満足のいく値である．

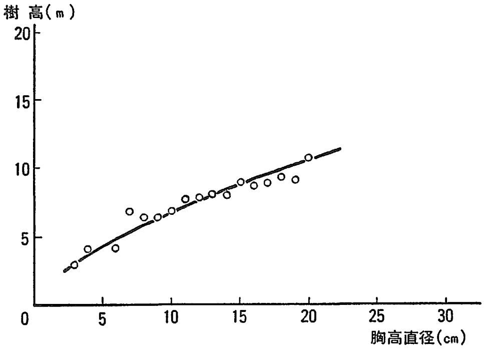
次に，この座屈式が従来の樹高曲線式と比較してどの程度のものであるかを検討する．試験地別に各曲線式の誤差率 $P(\%)$ をまとめると表-3のようになる．



図－2　試験地3に対する座屈式のあてはめ結果
(a =1.512)



図－3　試験地5に対する座屈式のあてはめ結果
(a=1.424)



図－4　試験地7に対する座屈式のあてはめ結果 (a=1.448)

座屈式の誤差率は他の曲線式のそれと比較しても，それ程大きいという程のものではない．逆に一番小さいという試験地もある．また，これら試験地別の誤差率を単純に平均した場合，若干他の曲線式よりも大きいが，しいて問題にする程でもないと考える．

座屈式の有効性

一般的に式中の定数の数が多くなると，測定値に対する適合度は良くなるが，逆に測定値の誤差に対する抵抗力は落ちる．このことについて，継続調査の資料を用いて考察する．

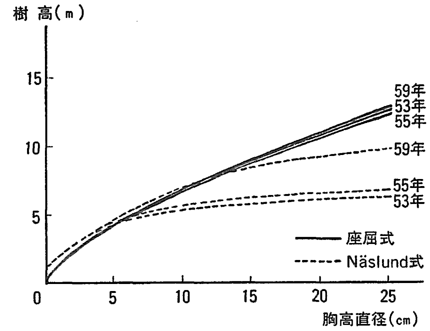
前節のあてはめに用いた資料の中で，試験地1，5，6などは数回調査が行われている．試験地1は昭和53年，55年，59年に，試験地5は昭和53年，56年，59年に，試験地6は昭和53年，56年，59年に調査が行われて

表－3　試験地別各曲線式の誤差率 P (%)

試験地番号	調査年	座屈式	相対生長式	Näslund 式	Näslund 式 変型	逆数式	Henricksen 式	直線回帰式
	昭和年							
1	59	3.92	3.92	3.87	4.71	3.91	4.86	4.73
2	59	4.57	4.92	4.05	3.99	4.21	4.10	5.62
3	59	2.18	2.29	2.37	2.51	2.30	2.51	2.49
4	55	2.44	2.18	1.65	2.63	1.81	2.73	3.32
5	59	4.90	5.06	5.02	6.09	5.00	6.91	6.03
6	59	10.80	10.42	9.23	8.56	9.19	8.81	10.95
7	58	5.47	3.51	3.32	3.31	3.34	3.36	3.79
8	58	7.90	8.29	6.47	6.10	6.67	5.87	9.15
9	58	6.61	7.73	6.24	5.41	6.46	5.05	8.01
10	58	6.46	6.87	6.92	7.19	6.91	7.29	7.00
11	58	9.03	8.47	8.26	10.22	8.61	11.94	7.34
総平均		5.84	5.79	5.22	5.52	5.31	5.77	6.22

表－4　座屈式，Näslund 式による試験地別調査年別あてはめ結果
各式の定数の値と誤差率

試験地	調査年	座屈式	Näslund 式		誤差率 (%)	
		a	a	b	座屈式	Näslund 式
1	昭和53年	1.472	0.988	0.396	4.61	1.02
	55	1.445	1.241	0.335	4.21	3.57
	59	1.512	1.320	0.284	3.92	3.87
5	53	1.326	0.932	0.422	9.32	5.93
	56	1.263	1.572	0.310	3.75	3.39
	59	1.424	1.733	0.251	4.90	5.02
6	53	1.409	0.648	0.506	14.45	7.06
	56	1.361	1.000	0.382	6.83	2.82
	59	1.379	1.283	0.316	10.80	9.23



図－5　試験地1の継続調査に対する座屈式，Näslund 式のあはめ結果

いる．これら3試験地の調査結果に座屈式をあてはめる．また，比較の意味で，前節のあてはめ結果の中で最もよくあてはまると思われる Näslund 式をも同時にあてはめる．

あてはめ結果のうち，各式の定数，誤差率についてまとめると表-4のようになる．

これらのあてはめ結果を見ると，Näslund 式は常に各測定値に対しよく適合していることがわかる．これに対し，座屈式は林齢が若い頃の調査結果にはそれ程よく適合しているとは言えない．しかし，各年の調査結果から推定される座屈式の定数 a の値はほぼ一定で，若齢時におけるあてはめ結果がそれ以後の樹高曲線式として使える可能性を暗示している．一方，Näslund 式は，各測定値にあまりにもよく適合しているので，測定時点が異なれば，他の時点で同一の定数を用いることはほとんど不可能である．試験地1について，調査年別に得られた結果を同じ座標上に示すと図-5のようになる．

座屈式が調査年により，それ程変化していないのに対し，Näslund 式は大きく変化しているのがわかる．樹高曲線は，樹高測定の作業を軽減するためにも用いられることを考えれば，このような結果になった座屈式の有効性は高いものであると言える．すなわち，同一林分で，若齢時において推定した座屈式による樹高曲線は，その後も同じ定数の値を用いることができると考えられる．

結　　言

樹高曲線の役割は，「断面積から材積への移行における媒介役」であり，曲線の測定結果内でのあてはまりの程度が問題となる．しかし，測定結果の範囲内で十分な適合度を得るだけの目的であるならば，しいて複雑な計算を要する樹高曲線式法を用いる必要はない．フリーハンド法や平均値を利用する方法で十分であるかもしれない．従来の樹高曲線式は，測定結果内でのあてはめだけを問題にしている．しかし，測定結果の範囲外へ曲線を延長した部分での使い道は全くない．座屈式は，測定結果の範囲を越え曲線を延長した部分でも有効な使い道があるように思える．座屈式は，「樹高は，胸高直径の⅔乗に比例する」ということを示す式であり，樹木が自然な状態で生長した場合，この関係になるというものである．それゆえ，座屈式の示す値は極端に現実の値から離れることはない．長柱の座屈理論より導びかれた理論式である座屈式を樹高曲線として用いることにより，従来の樹高曲線式にはない，いろいろな使い道が生まれるものと思われる．今後，この可能性について検討を加えていくつもりである．

謝辞　本研究を行うにあたり，協力していただいた元専攻生の井上純弘君に深く感謝する．

引　用　文　献

1．鈴木太七・平田種男：測樹学新論抄，615pp，日本林業調査会，東京1958．
2．大隅真一・北村昌美・菅原　聰・大内幸雄・梶原幹弘・今永正明：森林計測学，415pp，養賢堂，東京，1981．
3．和田茂彦・川村　誠・牧瀬明弘：京大演習林集報 **15**：76-85，1982．
4．西沢正久：森林測定，348pp，農林出版，東京，1972．
5．山本充男・松村直人・鈴木太七：日林論 **95**：89-90，1984．
6．McMahon, T.：Science **179**：1201-1204, 1973.